



Semnan University

Journal of Modeling in Engineering

Journal homepage: <https://modelling.semnan.ac.ir/>

ISSN: 2783-2538



Research Article

A stable limit cycle existence analysis in a diaphragm thermos-acoustic oscillator using Lyapunov stability theorem of perturbed systems

A. Heydari ^a, A. Teymuri ^a, M.R Ramezani-al ^{b*}

^a Department of Mathematics, Payam Noor University, Tehran, Iran

^b Department of Electrical Engineering, Faculty of Electrical and Computer Engineering, Quchan University of Technology, Quchan, Iran

PAPER INFO

Paper history:

Received: 2022-03-13

Revised: 2022-05-12

Accepted: 2022-10-19

Keywords:

Thermo-acoustic

Oscillator

Nonlinear systems

Lyapunov stability

Limit cycle

ABSTRACT

In this paper, the existence of a stable limit cycle in a diaphragm thermos-acoustic oscillator is analyzed using the Lyapunov stability theorem of perturbed dynamic systems. In this regard, first the dynamic differential equations of the thermos-acoustic oscillator are written as the state equations. Then, in order to system have a limit cycle, the error equations are extracted using the system equations and the desired states of the limit cycle. Next, a new Lyapunov function is introduced to asymptotic stability analysis of the error dynamics. Three conditions are examine, first condition of stability related to the positive definiteness of the Lyapunov function and the second condition related to the negativity of the derivative of this function. Third condition also guarantees that the error state is located within a certain bound to ensure that an asymptotic stable limit cycle occurs under these conditions. Besides, the upper and lower bounds of the error are obtained. Also, the effect of some important physical parameters of the system on the obtained error's bounds has been analyzed. The results obtained showed that the presented method has been able to successfully solve the most important challenge of this type of thermal oscillator, namely ensuring selecting the proper parameters for a thermo-acoustic oscillations .

DOI: <https://doi.org/10.22075/jme.2024.31282.2495>

© 2024 Published by Semnan University Press.

This is an open access article under the CC-BY 4.0 license.(<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

* Corresponding author.

E-mail address: m-ramezani@qiet.ac.ir

How to cite this article: A .Heydari, A.Teymouri and M.R. Ramezani-al and " A Stable limit cycle existence analysis in a diaphragm thermos-acoustic oscillator using Lyapunov stability theorem of perturbed systems.", Journal of Modeling in Engineering,....

تحلیل وجود چرخه حدی پایدار در یک نوسانگر حرارتی-صوتی دیافراگمی با استفاده از نظریه پایداری لیپانوف سیستم های غیرخطی دارای آشفتگی

عقیله حیدری^۱، اعظم تیموری^۱، محمدرضا رضائی آل^۲

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت مقاله:	در این مقاله به تحلیل وجود چرخه حدی پایدار در یک نوسانگر حرارتی-صوتی دیافراگمی با استفاده از نظریه پایداری لیپانوف سیستم های دینامیکی دارای آشفتگی پرداخته شده است. در این راستا و با کمک نظریه پایداری لیپانوف، ابتدا معادلات دیفرانسیلی دینامیکی حاکم بر نوسانگر حرارتی به صورت معادلات حالت بیان می شوند. سپس برای آنکه سیستم دارای چرخه حدی باشد معادلات حالت خطا به کمک معادلات سیستم و حالت های مطلوب چرخه حدی نوشته می شوند. در ادامه تابع لیپانوف جدید برای دینامیک توصیف کننده خطا معرفی و شرایط پایداری مجانبی دینامیک خطا با توجه به این تابع لیپانوف بررسی می گردد. از شروط ارائه شده شرط اول مربوط به مثبت معین بودن تابع لیپانوف و شرط دوم مربوط به منفی بودن مشتق این تابع می باشد. سومین شرط نیز تضمین کننده آنست که بردار حالت خطا در یک کران معین قرار گیرد تا اطمینان یابیم چرخه حدی پایدار مجانبی تحت این شرایط رخ می دهد. از این رو کران بالا و پایین خطا به دست می آیند. همچنین تاثیر برخی پارامترهای مهم فیزیکی سیستم بر روی باند خطای به دست آمده تحلیل شده است. نتایج بدست آمده از این مقاله نشان می دهد که روش ارائه شده به خوبی توانسته است مهمترین چالش این نوع موتورها یعنی تضمین نوسانات پایدار قبل از ساخت را برطرف سازد.
واژگان کلیدی:	
نوسانگر حرارتی-صوتی دیافراگمی سیستم های غیرخطی پایداری لیپانوفی چرخه حدی	

DOI: <https://doi.org/10.22075/jme.2024.31282.2495>

© 2024 Published by Semnan University Press.

This is an open access article under the CC-BY 4.0 license. (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

اکثر تلاش ها در صنعت در راستای پایداری سازی دینامیک

۱-مقدمه

و رفتار انواع سازه ها صورت می پذیرد. در این راستا از روش ها

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: m-ramezani@qiet.ac.ir

۱. گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ص.پ. ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵ تهران، ایران

۲. گروه مهندسی برق، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی قوچان

نظر گرفته می‌شود و سپس با ایجاد نوسانات در دینامیک شان و انتقال آن به ژنراتورها، حرکت مکانیکی ایجاد شده به انرژی الکتریسیته تبدیل می‌گردد. نوسانگرهای حرارتی به انواع مختلفی تقسیم می‌شوند که مهمترین آن‌ها شامل نوسانگرهای استرلینگ، نوسانگرهای حرارتی-صوتی، نوسانگرهای حرارتی تغییر فاز^۲ و نوسانگرهای حرارتی بی-مثال است ([۹, ۱۰]). نوسانگرهای استرلینگ و حرارتی-صوتی از معروفترین نوسانگرها به منظور تولید انرژی الکتریسیته از طریق انرژی خورشید هستند. نوسانگرهای حرارتی-صوتی از جدیدترین نوع نوسانگرهای حرارتی هستند که بر اساس ساختارشان به انواع مختلفی تقسیم بندی می‌گردند ([۱۱, ۱۲]).

نوسانگرهای حرارتی-صوتی بر اساس تعداد هسته به کاربرده شده در ساختارشان و همچنین استفاده یا عدم استفاده از تسهیل‌گرها^۳ به انواع مختلفی تقسیم‌بندی می‌شوند ([۱۳]). علاوه بر این، تحلیل و ارزیابی هر نوع از نوسانگرهای حرارتی-صوتی با دیگر انواع آن‌ها تفاوت دارد و نیاز است هر یک از روش‌های ارائه شده برای هر یک این نوع نوسانگرها مورد بررسی قرار گیرد ([۱۴]). در ساختار نوسانگرهای حرارتی-صوتی رابط‌های مکانیکی و فلابویل (چرخ لنگرکه برای انتقال انرژی چرخشی استفاده می‌شود) حذف شده است و این کار مزیت‌هایی مانند کار در فرکانس بالا، بازده بالا و عدم نیاز به تعمیر اساسی برای آن‌ها به

و نظریه‌های گوناگونی به منظور پایدارسازی رفتار دینامیکی یک سیستم استفاده می‌گردد ([۱ و ۱۲]). با این حال نمونه-هایی در صنعت وجود دارند که نیاز است دینامیک آنها در حالتی که مدل سیستم خطی در نظر گرفته می‌شود در مرز ناپایداری قرار گیرد ([۳, ۴]).

منظور از مرز ناپایداری مرزی بین حالت پایدار و ناپایداریک سیستم است. به عبارت دیگر سیستمی که در مرز ناپایداری قرارداد به اغتشاشات کوچک بسیار حساس است و هراغتشاش کوچک می‌تواند باعث شود که سیستم به سمت پایداری یا ناپایداری حرکت کند. به این نمونه‌ها نوسانگر گفته می‌شود. نوسانگرها در حوزه‌های مختلفی در صنعت کاربرد دارند که شامل دستگاه‌های پزشکی، سیستم تعلیق خودروها، تجهیزات آزمایشگاهی، تجهیزات موسیقی، شبیه‌سازها (مانند شبیه‌سازها در پرواز و خودرو)، پل‌ها و سازه‌های بزرگ و سیستم‌های تولید انرژی می‌شود ([۵, ۶]).

یکی از مهمترین کاربرد نوسانگرها به کارگیری آن‌ها در سیستم‌های تولید انرژی است. در واقع در این نوع نوسانگرها با ایجاد نوسان و انتقال نوسانات ایجاد شده به ژنراتورها، انرژی الکتریسیته تولید می‌شود ([۷, ۸]). نوسانگرهای حرارتی یکی از مهمترین نوع نوسانگرهایی هستند که توانایی تبدیل حرارت به انرژی الکتریسیته را دارند. به بیان بهتر، حرارت در این نوع نوسانگرها به عنوان منبع گرما در

²Thermal Phase Change Oscillators (TPCOs)

³Facillators

تحلیل وجود چرخه حدی پایدار در یک نوسانگر حرارتی-صوتی دیافراگمی با استفاده از نظریه پایداری لیپانوف سیستم های غیرخطی دارای آشفتگی

در [۲۰] پارامترهای طراحی نظیر سختی و جرم پیستون های نوسانگر استرلینگ را با به کارگیری یک تحلیل خطی و الگوریتم ژنتیک و بر اساس فرکانس مطلوب طراحی تخمین زدند. دوپل در [۲۱] به بررسی دینامیک خطی یک نوسانگر حرارتی اکوستیک پرداخته است. در این کار تاثیر نسبت دمای منبع گرم به سرد بر ناپایداری دینامیک نوسانگر مورد بررسی قرار گرفت و نتایج این تحقیق نشان داد که با افزایش این نسبت سیستم ناپایدارتر خواهد شد.

زارع و توکل پور صالح در [۲۲] دینامیک خطی یک نوسانگر حرارتی-صوتی را با استفاده از مکان قطب های حلقه بسته مورد بررسی و ارزیابی قرار دادند. در این مقاله اثر پارامترهای مختلف نوسانگر مانند طول رزوناتور و دمای منبع گرم بر ناپایداری دینامیک سیستم بررسی شد.

تاکنون مهمترین تحلیل های خطی به منظور بررسی ناپایداری دینامیک نوسانگرهای حرارتی استرلینگ و حرارتی-صوتی مرور گردید. اما بخشی از تحلیل های انجام شده غیرخطی هستند. اکثر این تحقیقات به صورت حل عددی معادلات غیرخطی بوده است و با شبیه سازی رفتار دینامیکی نوسانگرها، به بررسی ایجاد نوسانات پایدار در رفتار نوسانگر انجام شده است. به طور مثال زارع و توکل-پور صالح در [۲۳] با حل عددی به بررسی نوسانات پایدار یک نوسانگر حرارتی استرلینگ پرداخته و در ادامه اثر پارامترهای مهم این نوسانگر مانند دمای منبع گرم بر روی

ارمغان آورده است ([۱۵]). اما در کنار این مزیت ها، چالش هایی در طراحی و ساخت این نوع نوسانگرها به وجود آمده است که مربوط به راه اندازی دینامیک آنها است ([۱۶]).

محققان تاکنون روش های مختلفی به منظور بررسی نوسانات پایدار و راه اندازی نوسانگرهای حرارتی ارائه داده اند که در ادامه به مروری بر آنها پرداخته خواهد شد. بخشی از تحقیقات انجام شده در این حوزه، تحلیل های خطی بوده که صرفا به ناپایداری دینامیکی نوسانگرهای حرارتی پرداخته اند. در این نوع تحقیقات با کمک قطب های غالب حلقه بسته سیستم، اقدام به بررسی دینامیک نوسانگر کرده اند. در این راستا هوفاکر و همکاران در [۱۷] با کمک یک مدل خطی به بررسی ناپایداری دینامیک یک نوسانگر حرارتی پرداختند. در این تحقیق عواملی مانند دما به عنوان یک عامل مهم در ناپایداری دینامیک این نوسانگرها معرفی شد. بیگات و همکاران در [۱۸] نیز با کمک تحلیل خطی دینامیک یک نوسانگر خطی را مورد بررسی قرار دادند و ناپایداری آن را بررسی کردند. در این مقاله نیز دمای آستانه برای ناپایدار کردن دینامیک نوسانگر حرارتی تعیین شد. یک تحلیل خطی دیگر به وسیله ریوفریو و همکاران در [۱۹] بر روی نوسانگر حرارتی ساخته شده به وسیله شرکت سان پاور انجام پذیرفت که هدف آن ناپایداری دینامیک نوسانگر در لحظه شروع بود. در این تحقیق، با استفاده از نمودار نایکوئیست رفتار دینامیکی نوسانگر بررسی شد. در یک تحقیق دیگر زارع و توکل پور صالح

ارزیابی و بررسی قرار خواهد گرفت و مهمترین چالش محققان در طراحی این نوع از موتورها راه اندازی دینامیک آن ها) و تضمین نوسانات پایدار قبل از ساخت موتور را برطرف می سازد.

بی و همکاران در [۲۶] اقدام به ساخت یک موتور ترمواکوستیک سه حالتی کردند. در این موتور از سه بازیاب به منظور کاهش نسبت دمایی و افزایش عملکرد موتور استفاده شده است. با استفاده از گاز هلیوم در فشار 6 مگا پاسکال، این موتور قادر به تولید توانی معادل 5 کیلووات بود. وانگ و کیو در [۲۷] با ساخت یک موتور ترمواکوستیک چهارحالتی (دارای چهار بازیاب) نشان دادند که افزایش تعداد هسته ی موتور باعث افزایش راندمان و همچنین کاهش نسبت دمایی موتورهای ترمواکوستیک خواهد شد. در این پژوهش دمای منبع گرم و سرد به ترتیب برابر با 573 کلوین و 300 کلوین در نظر گرفته شده است که قادر به تولید توانی معادل با 1 . 223 کیلووات در فشار 3 مگا پاسکال است.

یانگ و همکاران در [۲۸] به منظور کاهش دمای منبع گرم و افزایش راندمان، اقدام به ساخت یک موتور ترمواکوستیک سه حالتی کردند و این اقدام باعث کاهش دمای منبع گرم تا 468 کلوین شد. همچنین آنها در [۲۹] با ساخت یک موتور ترمواکوستیک، به بررسی اثر تعداد هسته ی موتور بر عملکرد موتور پرداخته اند. نتایج این تحقیق نشان داد که افزایش تعداد هسته های موتور باعث بهبود عملکرد موتور شده است.

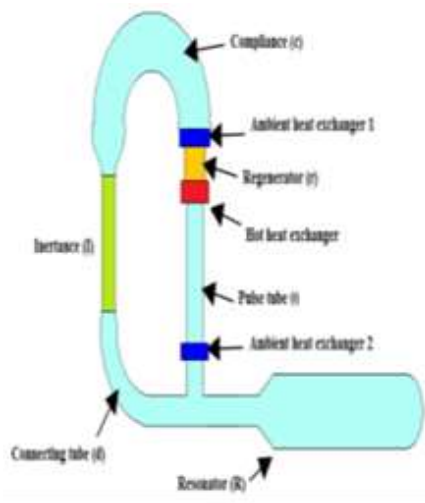
طول دامنه حرکت پیستون ها و نوسانات فشار مورد بررسی قرار گرفته است. فورموسا در [۲۴] به تحلیل عددی دینامیک غیرخطی یک نوسانگر حرارتی استرلینگ با استفاده از یک رویکرد ترمودینامیکی- مکانیکی پرداخته است. در این تحلیل علاوه بر بررسی نوسانات پایدار نوسانگر، به تخمین دمای گاز در بخش محفظه گرم نیز انجام شده است. همچنین زارع و توکل پور صالح در [۲۵] به بررسی عددی دینامیک غیرخطی یک نوسانگر حرارتی- صوتی با استفاده از معادلات مکانیکی غیرخطی پرداختند. در این کار نوسانات پایدار پیستون ها در مدل مکانیکی مورد بررسی و ارزیابی قرار گرفته و نتایج شبیه سازی با نتایج آزمایشگاهی مورد مقایسه قرار گرفته است.

بررسی تحقیقات انجام شده نشان می دهد که تاکنون یک ارزیابی تحلیلی بر روی دینامیک غیرخطی یک نوسانگر حرارتی- صوتی دیافراگمی به منظور بررسی نوسانات پایدار انجام نشده است. بر همین اساس و در این مقاله با کمک روش پایداری لیاپانوفی وجود یک چرخه حدی پایدار در یک نوسانگر حرارتی- صوتی دیافراگمی به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در این راستا ابتداء در بخش ۲ به معرفی نوسانگر حرارتی- صوتی و معادلات دینامیکی حاکم بر آن پرداخته شده است. در ادامه و در بخش ۳ به کمک تحلیل پایداری لیاپانوفی شرایط ایجاد نوسان در یک نوسانگر حرارتی- صوتی مورد تحلیل قرار می گیرد. سپس در بخش ۴ به بررسی و ارزیابی روش ارائه شده و بررسی شروط پایداری و تغییر تاثیر پارامترها بر حد نهایی پرداخته خواهد شد. در پایان و در بخش ۵ نیز نتایج حاصل شده مورد

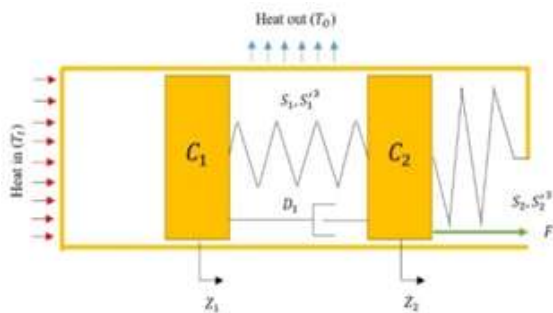
تحلیل وجود چرخه حدی پایدار در یک نوسانگر حرارتی-صوتی دیافراگمی با استفاده از نظریه پایداری لیپانوف سیستم های غیرخطی دارای آشفستگی

۲-دینامیک نوسانگر حرارتی-صوتی دیافراگمی

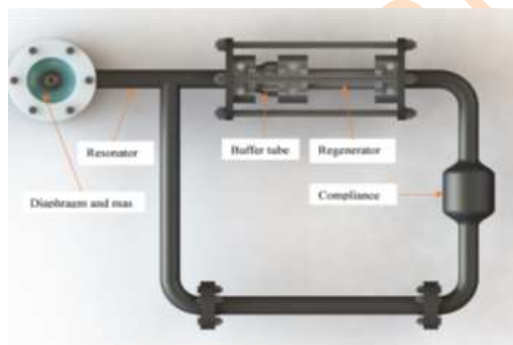
شکل ۱، [۳۰] طرحواره یک نوسانگر حرارتی-صوتی دیافراگمی را نشان می دهد. لازم به ذکر است که دیافراگم در بخش انتقال قدرت در ساختار نوسانگر استفاده می گردد. مدل مکانیکی نوسانگر در شکل (الف.۱) شامل مدل مکانیکی (در برگزیده اینرتنس^۴ و کامپالیانس^۵ است (۱)، منبع سرد ۱ (۲ و ۳)، بازیاب (۴)، منبع گرم (۵)، لوله ی بافر (۶)، منبع سرد ۲ (۷) و رزوناتور (۸ و ۹))



الف) مدل مکانیکی [۳۰]



ب) طرحواره [۳۰]



ج) شکل واقعی نوسانگر حرارتی [۳۱]

شکل ۱. نوسانگر حرارتی مورد مطالعه

نشان داده شده است. شکل (ب.۱) مدل مکانیکی نوسان گر حرارتی - فراصوتی شامل دو پیستون، دو فنر و دو جرم و در شکل (ج.۱) شکل واقعی آن نمایش داده شده است. پارامترهای C_1 ، C_2 جرم پیستون های قدرت و جابجاگر و همچنین سایر پارامترهای استفاده شده در جدول های ۱ و ۲ فهرست نشانه های اختصاری درون مقاله و ویژگی های پارامترهای نوسانگر مورد مطالعه بیان شده اند.

⁴ Inertans

⁵ Compiles

متغیرهای Z_1 و Z_2 حرکت دو پیستون قدرت و پیستون جابه جا گر می باشند که در جدول ۱ معرفی شده است. به این ترتیب، معادلات نهایی دینامیک حاکم بر نوسانگر حرارتی برابر با معادلات (1) و (5) است. برای درک بهتر بخش بعد ابتدا معادلات سیستم را به صورت معادلات حالت می نویسیم. برای این منظور با انتخاب متغیرهای حالت $Z_4 = \dot{Z}_2$ و $Z_3 = \dot{Z}_1$ و $Z_2 = \dot{Z}_1$ و $Z_1 = \dot{Z}_1$ معادلات به صورت زیر در می آیند.

$$C_1 \dot{Z}_3 + D_1(Z_3 - Z_4) + S_1(Z_1 - Z_2) + S'_1(Z_1^3 - Z_2^3) = 0$$

$$C_2 \dot{Z}_4 - \left(\frac{T_I}{T_O}\right) D_1 Z_3 + \left(\frac{T_I}{T_O}\right) D_1 Z_4 - S_1 Z_1 + (S_1 + S_2) Z_2 - S'_1 Z_1^3 + (S'_1 + S'_2) Z_2^3 = 0 \quad (۶)$$

معادلات حالات بالا را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \\ \dot{Z}_3 \\ \dot{Z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S_1 & D_1 & S_1 & D_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ S_1 & \left(\frac{T_I}{T_O}\right) D_1 & -S_1 - S_2 & -\left(\frac{T_I}{T_O}\right) D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ S'_1 Z_1^3 - S'_1 Z_2^3 \\ 0 \\ S'_1 Z_1^3 + (S'_1 + S'_2) Z_2^3 \end{bmatrix} \quad (۷)$$

که معادله (۷) را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \\ \dot{Z}_3 \\ \dot{Z}_4 \end{bmatrix}^T = c^{-1} g_1 Z + c^{-1} f_1(z) \quad (۸)$$

$\underbrace{g_1 Z}_{\text{Nonlinear part}} + \underbrace{f_1(z)}_{\text{Linear part}}$

همانگونه که دیده می شود بر طبق معادلات حالت رابطه

(۸) سیستم از یک بخش غیرخطی و یک بخش خطی

تشکیل شده است.

با توجه به شکل (۱-الف) و با استفاده از قانون دوم نیوتن، معادلات مکانیکی نوسانگر حرارتی مورد نظر معادلات (1) و (2) به دست می آیند.

$$C_1 \ddot{Z}_1 + D_1(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2) + S_1(Z_1 - Z_2) + S'_1(Z_1^3 - Z_2^3) = 0 \quad (۱)$$

$$C_2 \ddot{Z}_2 - D_1(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2) - S_1(Z_1 - Z_2) - S'_1(Z_1^3 - Z_2^3) + S_2 Z_2 + S'_2 Z_2^3 = F \quad (۲)$$

معادله‌ی نیروی F به صورت زیر است.

$$F = \left(\frac{T_I}{T_O} - 1\right) D_1(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2) \quad (۳)$$

T_O دمای ورودی و T_I دمای خروجی از منبع

گرم نوسانگر مورد مطالعه را نشان می دهند.

در صورت جایگذاری (3) در معادله دینامیکی حاکم بر

نوسانگر حرارتی، معادله‌ی (۲) به صورت زیر بدست می آید:

$$C_2 \ddot{Z}_2 - D_1(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2) - S_1(Z_1 - Z_2) - S'_1(Z_1^3 - Z_2^3) + S_2 Z_2 + S'_2 Z_2^3 = \left(\frac{T_I}{T_O} - 1\right) D_1(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2) \quad (۴)$$

به صورت رابطه (۵) ساده‌سازی می گردد:

$$C_2 \ddot{Z}_2 - \left(\frac{T_I}{T_O}\right) D_1 \dot{Z}_1 + \left(\frac{T_I}{T_O}\right) D_1 \dot{Z}_2 - S_1 Z_1 + (S_1 + S_2) Z_2 - S'_1 Z_1^3 + (S'_1 + S'_2) Z_2^3 = 0 \quad (۵)$$

تحلیل وجود چرخه حدی پایدار در یک نوسانگر حرارتی-صوتی دیافراگمی با استفاده از نظریه پایداری لیپانوف سیستم های غیرخطی دارای آشفتگی

۳ - تحلیل وجود چرخه حدی و شرایط پایداری

لیپانوف سیستم های دارای آشفتگی غیر صفر

شونده بر روی نوسانگر حرارتی-صوتی

در این صورت سیستم دارای چرخه حدی پایداری با دامنه ها و فرکانس توصیف شده به صورت روابط (۹) و (۱۰) خواهد بود.

اثبات: هدف نهایی ایجاد چرخه حدی پایدار در دینامیک نوسانگر است. بر همین اساس می توان Z_{1d} و Z_{2d} حرکت مطلوب پیستون قدرت و حرکت مطلوب پیستون جابجاگر با دامنه نوسانات A_1 و A_2 و فرکانس ω و اختلاف فاز θ را تعریف نمود که به شرح زیر است:

$$Z_{1d} = A_1 \sin(\omega t + \theta) \quad (9)$$

$$Z_{2d} = A_2 \sin(\omega t) \quad (10)$$

در واقع هدف این است که دینامیک نوسانگر حرارتی به حرکات مطلوب (۹) و (۱۰) تا حد امکان نزدیک شود. بر همین اساس معادلات خطا را به صورت زیر تعریف می گردند:

$$e_1 = Z_1 - Z_{1d} = Z_1 - A_1 \sin(\omega t + \theta) \quad (11)$$

$$e_2 = Z_2 - Z_{2d} = Z_2 - A_2 \sin(\omega t) \quad (12)$$

در ادامه معادلات دینامیکی خطا را می نویسیم تا بتوانیم از نظریه پایداری لیپانوفی برای تحلیل پایداری دینامیک خطا استفاده نماییم.

در این بخش به کمک نظریه پایداری لیپانوفی سیستم های دارای آشفتگی نشان خواهیم داد سیستم نوسانگر توصیف شده با معادلات حالت (۸) تحت شرایطی دارای حرکات نوسانی با دامنه های متفاوت و فرکانس یکسان خواهد بود. برای این منظور روش پایداری لیپانوف را می توان برای سیستم های غیرخطی به شکل $\dot{x} = f(x) + g(x, t)$ که دارای آشفتگی به صورت $g(x, t)$ هستند اعمال کرد ([۳۲]). جمله $g(x, t)$ در واقع یک جمله آشفتگی است که می تواند ناشی از خطای مدل سازی، یا عدم قطعیت باشد. معمولا مقدار دقیق این جمله نامشخص است اما می توان بر اساس ساختار سیستم یک حد بالا برای آن تعیین نمود. در اینجا نشان می دهیم که آشفتگی در سیستم مورد مطالعه به صورت غیر صفر شونده $g(0, t) \neq 0$ است.

قضیه ۱: سیستم نوسانگر توصیف شده با معادلات (۱) و (۵)

را در نظر بگیرید. فرض می کنیم که آشفتگی در عبارت

کران یکنواخت $\|g(e, t)\| \leq \beta$ صدق می کند یا به

$$|H_1(t)| \leq \beta_1 \text{ و } |H_2(t)| \leq \beta_2$$

$$3S_1'e_1^2 A_1 \sin(\omega t + \theta) - 3S_1'e_1 (A_1 \sin(\omega t + \theta))^2 = H_1(t)$$

$$C_1 \ddot{e}_1 + D_1 \dot{e}_1 - D_1 \dot{e}_2 + S_1 e_1 - S_1 e_2 - S_1' e_2^3 - 3S_1' e_2^2 A_2 \sin(\omega t) - 3S_1' e_2 (A_2 \sin(\omega t))^2 + S_1' e_1^3 + 3S_1' e_1^2 A_1 \sin(\omega t + \theta) + 3S_1' e_1 (A_1 \sin(\omega t + \theta))^2 = H_2(t) \quad (16)$$

که در آن $H_1(t)$ و $H_2(t)$ و به صورت زیر هستند.

$$H_1(t) = -C_2 \omega^2 A_2 \sin(\omega t) - \left(\frac{T_I}{T_O}\right) D_1 A_2 \omega \cos(\omega t) + \left(\frac{T_I}{T_O}\right) D_1 A_1 \omega \cos(\omega t + \theta) - (S_1 + S_2) A_2 \sin(\omega t) + S_1 A_1 \sin(\omega t + \theta) - (S_1' + S_2') (A_2 \sin(\omega t))^3 + S_1' (A_1 \sin(\omega t + \theta))^3 \quad (17)$$

$$H_2(t) = -C_1 \omega^2 A_1 \sin(\omega t + \theta) - D_1 A_1 \omega \cos(\omega t + \theta) + D_1 A_2 \omega \cos(\omega t) - S_1 A_1 \sin(\omega t + \theta) + S_1 A_2 \sin(\omega t) - S_1' (A_2 \sin(\omega t))^3 - S_1' (A_1 \sin(\omega t + \theta))^3 \quad (18)$$

به سادگی می توان نشان داد که معادلات دیفرانسیل

$$\dot{e} = f(e) + \quad (15) \text{ و } (16) \text{ می تواند به صورت بسته}$$

با جایگذاری معادلات خطای (۱۱) و (۱۲) و مشتقات آنها در معادلات دینامیک حاکم بر نوسانگر حرارتی (معادلات (۱) و (۵))، معادله دینامیک خطای نوسانگر حرارتی مورد

نظر به صورت زیر به دست می آید:

$$C_1 (\ddot{e}_1 - \omega^2 A_1 \sin(\omega t + \theta)) + D_1 ((\dot{e}_1 + \omega A_1 \cos(\omega t + \theta)) - (\dot{e}_2 + \omega A_2 \cos(\omega t))) + S_1 (e_1 + A_1 \sin(\omega t + \theta) - (e_2 + A_2 \sin(\omega t))) + S_1' ((e_1 + A_1 \sin(\omega t + \theta))^3 - (e_2 + A_2 \sin(\omega t))^3) = 0 \quad (13)$$

$$C_2 (\ddot{e}_2 - \omega^2 A_2 \sin(\omega t)) - \left(\frac{T_I}{T_O}\right) D_1 (\dot{e}_1 + \omega A_1 \cos(\omega t + \theta)) + \left(\frac{T_I}{T_O}\right) D_1 (\dot{e}_2 + \omega A_2 \cos(\omega t)) - S_1 (e_1 + A_1 \sin(\omega t + \theta)) + (S_1 + S_2) (e_2 + A_2 \sin(\omega t)) - S_1' (e_1 + A_1 \sin(\omega t + \theta))^3 + (S_1' + S_2') (e_2 + A_2 \sin(\omega t))^3 = 0 \quad (14)$$

که به صورت معادل زیر می توان نوشت:

$$C_2 \ddot{e}_2 + \left(\frac{T_I}{T_O}\right) D_1 \dot{e}_2 - \left(\frac{T_I}{T_O}\right) D_1 \dot{e}_1 + (S_1 + S_2) e_2 - S_1 e_1 + (S_1' + S_2') e_2^3 + 3(S_1' + S_2') e_2^2 A_2 \sin(\omega t) + 3(S_1' + S_2') e_2 (A_2 \sin(\omega t))^2 - S_1' e_1^3 - \quad (15)$$

تحلیل وجود چرخه حدی پایدار در یک نوسانگر حرارتی-صوتی دیافراگمی با استفاده از نظریه پایداری لیاپانوف سیستم های غیر خطی دارای آشفتگی

$$\dot{V}(e) \leq -c'_3 \|e\|^2 \quad (\text{ب})$$

در ابتدا شرط الف را بررسی می کنیم.

الف): برای بررسی شرایط تابع لیاپانوف باید مثبت معین بودن $V(e)$ بررسی شود برای این منظور آن را به صورت ماتریسی زیر می نویسیم.

$$V(e) = [e]^T Z [e] + \frac{1}{2} S'_1 e_1^4 + \frac{1}{2} S'_2 e_2^4 \quad (20)$$

که

$$Z = \begin{bmatrix} (S_1 + S_2) & \frac{\sqrt{(S_1+S_2)C_2}}{2} & -\frac{\sqrt{(S_1+S_2)S_1}}{2} & -\frac{\sqrt{(S_1+S_2)C_1}}{2} \\ \frac{\sqrt{(S_1+S_2)C_2}}{2} & C_2 & 0 & -\frac{\sqrt{C_2C_1}}{2} \\ -\frac{\sqrt{(S_1+S_2)S_1}}{2} & 0 & S_1 & \frac{\sqrt{S_1C_1}}{2} \\ -\frac{\sqrt{(S_1+S_2)C_1}}{2} & -\frac{\sqrt{C_2C_1}}{2} & \frac{\sqrt{S_1C_1}}{2} & C_1 \end{bmatrix}$$

$$\|e\| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2} \quad \text{و} \quad e = [e_1 \quad \dot{e}_1 \quad e_2 \quad \dot{e}_2]$$

$$\text{با انتخاب} \quad \sqrt{e_1^2 + \dot{e}_1^2 + e_2^2 + \dot{e}_2^2}$$

$$c'_1 = \lambda_{\max}(Z), \quad c'_2 = \lambda_{\min}(Z) \quad (21)$$

داریم:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + \dot{e}_1^2 + \dot{e}_2^2})^2 c'_1 \leq \\ & \frac{1}{2} S'_1 e_1^4 + \frac{1}{2} S'_2 e_2^4 + (S_1 + S_2) e_1^2 + \\ & S_1 e_2^2 + C_2 \dot{e}_1^2 + C_1 \dot{e}_2^2 + \\ & \sqrt{(S_1 + S_2)C_2} e_1 \dot{e}_1 - \\ & \sqrt{(S_1 + S_2)S_1} e_1 e_2 - \\ & \sqrt{(S_1 + S_2)C_1} e_1 \dot{e}_2 + \\ & \sqrt{S_1 C_1} \dot{e}_2 e_2 - \sqrt{C_2 C_1} \dot{e}_2 \dot{e}_1 \leq \\ & (\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + \dot{e}_1^2 + \dot{e}_2^2})^2 c'_2 \end{aligned} \quad (22)$$

$g(e, t)$ نوشته می شود که همان جمله

آشفتگی است و همچنین می توان نشان داد که

$g(0, t) \neq 0$ است. (آشفتگی غیر صفر شده) در ادامه

شرایط وجود چرخه حدی در سیستم توصیف شده با

معادلات خطای (۱۵) و (۱۶) ثابت می گردد.

سیستم نوسانگر توصیف شده با معادلات خطای (۱۵) و

(۱۶) را در نظر بگیرید. با انتخاب کاندیدای تابع لیاپانوف

(۱۹) که تابعی از بردار خطا و مشتقات آنها بر اساس خطای

تعریف شده در روابط (۱۱) و (۱۲) است، سیستم دارای

چرخه حدی پایداری با دامنه ها و فرکانس توصیف شده به

صورت (۹) و (۱۰) خواهد بود.

$$V(e) = \frac{1}{2} S'_1 e_1^4 + \frac{1}{2} S'_2 e_2^4 + (S_1 +$$

$$S_2) e_1^2 + S_1 e_2^2 + C_2 \dot{e}_1^2 + C_1 \dot{e}_2^2 +$$

$$\sqrt{(S_1 + S_2)C_2} e_1 \dot{e}_1 - \quad (19)$$

$$\sqrt{(S_1 + S_2)S_1} e_1 e_2 -$$

$$\sqrt{(S_1 + S_2)C_1} e_1 \dot{e}_2 +$$

$$\sqrt{S_1 C_1} \dot{e}_2 e_2 - \sqrt{C_2 C_1} \dot{e}_2 \dot{e}_1$$

بر اساس لم ۳-۵ مرجع [۳۲]. فرض کنید $e = 0$ نقطه

تعادل پایدار مجانبی یکنواخت سیستم توصیف شده

$$\dot{e} = f(e) + g(e, t) \quad \text{با} \quad \text{سیستم} \quad \text{نامی} \quad \dot{e} =$$

$f(e)$ باشد. نشان می دهیم که تابع لیاپانوف (۱۹) در

نامساوی های زیر صدق می نماید.

$$c'_1 \|e\|^2 \leq V(e) \leq c'_2 \|e\|^2 \quad (\text{الف})$$

$$2C_2\dot{e}_1\ddot{e}_1 + 2C_1\dot{e}_2\ddot{e}_2 + \sqrt{(S_1 + S_2)C_1}\dot{e}_1^2 + \sqrt{(S_1 + S_2)C_2}e_1\ddot{e}_1 - \sqrt{(S_1 + S_2)S_1}\dot{e}_1e_2 - \sqrt{(S_1 + S_2)S_1}e_1\dot{e}_2 - \sqrt{(S_1 + S_2)C_1}e_1\ddot{e}_2 - \sqrt{(S_1 + S_2)C_1}\dot{e}_1\dot{e}_2 - \sqrt{C_1C_2}\ddot{e}_2\dot{e}_1 - \sqrt{C_1C_2}\dot{e}_2\ddot{e}_1 + 2S_1'\dot{e}_1e_1^3 + 2S_2'\dot{e}_2e_2^3$$

با استفاده از روابط (۱۵) و (۱۶) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) = & \sqrt{(S_1 + S_2)C_1}\dot{e}_1^2 + 2S_1'\dot{e}_1e_1 + 2\dot{e}_1(-D_1\dot{e}_1 + D_1\dot{e}_2 - S_1e_1 + S_1e_2 + S_1'e_1^3 + 3S_1'e_2^2A_2\sin(\omega t) + 3S_1'e_2(A_2\sin(\omega t))^2 - S_1'e_1^3 - 3S_1'e_1^2A_1\sin(\omega t + \theta) - 3S_1'e_1(A_1\sin(\omega t + \theta))^2 + H_2(t)) + \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2}e_2(-\frac{T_1}{T_0}D_1\dot{e}_2 + (\frac{T_1}{T_0}D_1\dot{e}_1 - (S_1 + S_2)e_2 + S_1e_1 - (S_1' + S_2')e_2^3 - 3(S_1' + S_2')e_2^2A_2\sin(\omega t) - 3(S_1' + S_2')e_2(A_2\sin(\omega t))^2 + S_1'e_1^3 + 3S_1'e_1^2A_1\sin(\omega t + \theta) + 3S_1'e_1(A_1\sin(\omega t + \theta))^2 + H_1(t)) - \sqrt{(S_1 + S_2)S_1}\dot{e}_2e_1 - \sqrt{(S_1 + S_2)S_1}e_2\dot{e}_1 - \sqrt{\frac{(S_1+S_2)}{C_1}}e_2(-D_1\dot{e}_1 + D_1\dot{e}_2 - S_1e_1 + S_1e_2 + S_1'e_1^3 + 3S_1'e_2^2A_2\sin(\omega t) + 3S_1'e_2(A_2\sin(\omega t))^2 - S_1'e_1^3 - 3S_1'e_1^2A_1\sin(\omega t + \theta) - 3S_1'e_1(A_1\sin(\omega t + \theta))^2 + H_2(t)) - \sqrt{(S_1 + S_2)C_1}\dot{e}_2\dot{e}_1 + \sqrt{\frac{S_1}{C_1}}e_1(-D_1\dot{e}_1 + D_1\dot{e}_2 - S_1e_1 + S_1e_2 + S_1'e_1^3 + 3S_1'e_2^2A_2\sin(\omega t) + 3S_1'e_2(A_2\sin(\omega t))^2 - S_1'e_1^3 - 3S_1'e_1^2A_1\sin(\omega t + \theta) - 3S_1'e_1(A_1\sin(\omega t + \theta))^2 + H_2(t)) + \sqrt{S_1C_1}\dot{e}_1^2 - \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}\dot{e}_2(-D_1\dot{e}_1 + D_1\dot{e}_2 - S_1e_1 + S_1e_2 + S_1'e_1^3 + 3S_1'e_2^2A_2\sin(\omega t) + 3S_1'e_2(A_2\sin(\omega t))^2 - S_1'e_1^3 - 3S_1'e_1^2A_1\sin(\omega t + \theta) - 3S_1'e_1(A_1\sin(\omega t + \theta))^2 + H_2(t)) - \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}\dot{e}_1(-\frac{T_1}{T_0}D_1\dot{e}_2 + (\frac{T_1}{T_0}D_1\dot{e}_1 - (S_1 + S_2)e_2 + S_1e_1 - (S_1' + S_2')e_2^3 - 3(S_1' + S_2')e_2^2A_2\sin(\omega t) - 3(S_1' + S_2')e_2(A_2\sin(\omega t))^2 + S_1'e_1^3 + 3S_1'e_1^2A_1\sin(\omega t + \theta) + 3S_1'e_1(A_1\sin(\omega t + \theta))^2 + H_1(t)) + 2S_1'\dot{e}_2e_2^3 + 2S_2'\dot{e}_1e_1^3 + 2\dot{e}_2(-\frac{T_1}{T_0}D_1\dot{e}_2 + (\frac{T_1}{T_0}D_1\dot{e}_1 - (S_1 + S_2)e_2 + S_1e_1 - (S_1' + S_2')e_2^3 - 3(S_1' + S_2')e_2^2A_2\sin(\omega t) - 3(S_1' + S_2')e_2(A_2\sin(\omega t))^2 + S_1'e_1^3 + 3S_1'e_1^2A_1\sin(\omega t + \theta) + 3S_1'e_1(A_1\sin(\omega t + \theta))^2 + H_1(t)) + 2(S_1 + S_2)\dot{e}_2e_2 \end{aligned} \quad (۲۶)$$

می توان رابطه (۲۶) را بصورت زیر ساده نویسی نمود:

و در نتیجه قسمت الف به صورت زیر برقراری شود.

$$c_1\|e\|^2 \leq V(e) \leq c_2\|e\|^2 \quad (۲۳)$$

از طرفی بنا بر معیار سیلوستر ([۳۲])، مثبت بودن کهادهای متوالی ماتریس متقارن Z رابطه (۲۰) شرط مثبت معین بودن تابع لیاپانوف مورد نظر را تضمین می کند که در اینجا برای راحتی کار مولفه های ماتریس Z با Z_{ij} برای $i, j = 1, 2, 3, 4$ و کهادهای مرتبه ۱ تا ۴ ماتریس Z به صورت KH_{Z_i} برای $i=1, 2, 3, 4$ نامگذاری شده اند. مقدار کهادهای مرتبه ۱ تا ۴ ماتریس Z با جایگذاری در پارامترهای معرفی شده و داده های جدول ۲ به صورت زیر محاسبه شده است:

$$\begin{aligned} KH_{Z_1} &= z_{11} = 210.08 > 0 \\ KH_{Z_2} &= \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix} = 10.55 > 0 \\ KH_{Z_3} &= \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{vmatrix} = 1.47 \times 10^3 > 0 \\ KH_{Z_4} &= \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} \end{vmatrix} = 0.0739 > 0 \end{aligned} \quad (۲۴)$$

ب) در این مرحله نشان داده می شود مشتق تابع لیاپانوف (۱۹) منفی است. ابتدا مشتق تابع لیاپانوف به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\dot{V}(e) = \sqrt{S_1C_1}\ddot{e}_2e_2 + \sqrt{S_1C_1}\dot{e}_2^2 + 2(S_1 + S_2)\dot{e}_1e_1 + 2S_1\dot{e}_2e_2 \quad (۲۵)$$

تحلیل وجود چرخه حدی پایدار در یک نوسانگر حرارتی-صوتی دیافراگمی با استفاده از نظریه پایداری لیپانوف سیستم های غیرخطی دارای آشفتگی

علامت آن پرداخت. در معادله ی (۲۷) مولفه های ماتریس Q به صورت زیر هستند :

$$K_{11} = \left((S_1 + S_2) \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} + S_1 \sqrt{(S_1 + S_2)/C_1} + 3 \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} (S'_1 + S'_2) (A_2 \sin(\omega t))^2 + 3 \sqrt{(S_1 + S_2)/C_1} S'_1 (A_2 \sin(\omega t))^2 \right) \quad (27)$$

$$K_{12} = K_{21} = \sqrt{C_2/C_1} S_1 + 3 \sqrt{C_2/C_1} S'_1 (A_2 \sin(\omega t))^2 + 6 (S'_1 + S'_2) (A_2 \sin(\omega t))^2 + \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} \left(\frac{T_1}{T_0} \right) D_1 + \sqrt{(S_1 + S_2)/C_1} D_1 \quad (28)$$

$$K_{13} = K_{31} = \left(-S_1 \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} - S_1 \sqrt{(S_1 + S_2)/C_1} - \sqrt{S_1/C_1} S_1 - 3 \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} S'_1 (A_1 \sin(\omega t + \theta))^2 - \right) \quad (29)$$

$$\dot{V}(e) = \left[- \left(S'_1 \sqrt{\frac{(S_1+S_2)}{C_1}} + (S'_1 + S'_2) \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} \right) e_1^4 + \left(3 \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} S'_1 A_1 \sin(\omega t + \theta) + 3 \sqrt{\frac{(S_1+S_2)}{C_1}} S'_1 A_1 \sin(\omega t + \theta) \right) e_2 e_1^2 + 2 \dot{e}_2 H_1(t) + 2 \dot{e}_1 H_2(t) + \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} e_2 H_1(t) - \sqrt{\frac{(S_1+S_2)}{C_1}} e_2 H_2(t) + \sqrt{\frac{S'_1}{C_1}} e_1 H_2(t) - \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \dot{e}_2 H_2(t) - \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \dot{e}_1 H_1(t) + \left(S'_1 \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} + S'_1 \sqrt{\frac{(S_1+S_2)}{C_1}} \right) e_2 e_1^3 - S'_1 \sqrt{\frac{S_1}{C_1}} e_1^4 + S'_1 \sqrt{\frac{S_1}{C_1}} e_1 e_2^3 - \left(2S'_2 + S'_1 \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \right) \dot{e}_2 e_2^3 + \left(2S'_1 + S'_1 \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \right) \dot{e}_2 e_1^3 + \left(2S'_2 - 2S'_1 - \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} S'_1 \right) \dot{e}_1 e_1^3 + \left(2S'_1 + \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} (S'_1 + S'_2) \right) \dot{e}_1 e_2^3 - \left(3S'_1 \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} A_2 \sin(\omega t) + 3(S'_1 + S'_2) A_2 \sin(\omega t) \right) e_2^3 - 3 \sqrt{\frac{S_1}{C_1}} S'_1 A_1 \sin(\omega t + \theta) e_1^3 + 3 \sqrt{\frac{S_1}{C_1}} S'_1 A_2 \sin(\omega t) e_1 e_2^2 - \left(6(S'_1 + S'_2) A_2 \sin(\omega t) + 3S'_1 A_2 \sin(\omega t) \right) \dot{e}_2 e_2^2 + \left(6S'_1 A_1 \sin(\omega t + \theta) + 3 \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} S'_1 A_1 \sin(\omega t + \theta) \right) \dot{e}_2 e_1^2 - \left(6S'_1 A_1 \sin(\omega t + \theta) - 3 \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} S'_1 A_1 \sin(\omega t + \theta) \right) \dot{e}_1 e_1^2 + \left(3 \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} (S'_1 + S'_2) A_2 \sin(\omega t) + 6S'_1 A_2 \sin(\omega t) \right) \dot{e}_1 e_2^2 \right] (A) \quad (27)$$

$$- \begin{bmatrix} e_1 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} (B) \quad (28)$$

به این ترتیب $\dot{V}(e)$ را می توان بصورت $\dot{V}(e) = A + B$ نوشت که در آن $B = [e]^T Q [e]$ همانطور که

مشاهده می گردد، بخشی از جملات مشتق تابع لیپانوف به صورت یک ماتریس درآمده تا بتوان راحت تر به تعیین

$$K_{24} = K_{42} = +\sqrt{(S_1 + S_2)C_1} - \sqrt{C_1/C_2} \left(\frac{T_1}{T_0}\right) D_1 - \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} D_1 - 2\left(\frac{T_1}{T_0}\right) D_1 - 2D_1 \quad (33)$$

$$K_{34} = K_{43} = +\sqrt{S_1/C_1} D_1 + \sqrt{C_1/C_2} S_1 + 6S_1'(A_1 \sin(\omega t + \theta))^2 + 3\sqrt{C_1/C_2} S_1'(A_1 \sin(\omega t + \theta))^2 \quad (34)$$

$$K_{44} = 2D_1 + \sqrt{C_1/C_2} \left(\frac{T_1}{T_0}\right) D_1 + \sqrt{S_1 C_1} \quad (35)$$

$$K_{33} = \sqrt{S_1/C_1} S_1 + 3S_1' \sqrt{S_1/C_1} (A_1 \sin(\omega t + \theta))^2 \quad (36)$$

می توان ملاحظه کرد که برطبق رابطه (۲۷) مولفه های

ماتریس متغیر با زمان Q مثبت می باشد. پس ماتریس

متقارن Q بین دو ماتریس $k_1 I$ و $k_2 I$ با درایه های مثبت

قرار می گیرد. در رابطه (۳۸) ماتریس I معادل ماتریس

همانی است و k_1 و k_2 نیز ضرایب ثابت مثبتی هستند

$$0 < k_1 I < Q < k_2 I \quad (37)$$

با توجه به مولفه های ماتریس Q و پارامترهای آن و مقادیر

داده های جدول ۲، $k_1 = 1706.1$ محاسبه شده است.

در ادامه به تعیین علامت $\dot{V}(e)$ می پردازیم. با توجه

به رابطه (۲۷) و قسمت B آن، تعیین علامت ماتریس

$$3\sqrt{(S_1 + S_2)/C_1} S_1'(A_1 \sin(\omega t + \theta))^2 - 3\sqrt{S_1/C_1} S_1'(A_2 \sin(\omega t))^2$$

$$K_{41} = K_{14} = -\left(\frac{T_1}{T_0}\right) D_1 \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} - 3\sqrt{C_1/C_2} (S_1' + S_2')(A_2 \sin(\omega t))^2 - 2S_1 - 6S_1'(A_2 \sin(\omega t))^2 + \quad (30)$$

$$\sqrt{(S_1 + S_2)S_1} - D_1 \sqrt{\frac{(S_1 + S_2)}{C_1}} - \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} (S_1 + S_2)$$

$$K_{22} = -\sqrt{(S_1 + S_2)C_1} + \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} D_1 + 2\left(\frac{T_1}{T_0}\right) D_1 \quad (31)$$

$$K_{23} = K_{32} = -3\sqrt{C_2/C_1} S_1'(A_1 \sin(\omega t + \theta))^2 - 6S_1'(A_1 \sin(\omega t + \theta))^2 - 2S_1 + \sqrt{(S_1 + S_2)S_1} - \sqrt{S_1/C_1} D_1 - \sqrt{C_2/C_1} S_1 \quad (32)$$

تحلیل وجود چرخه حدی پایدار در یک نوسانگر حرارتی-صوتی دیافراگمی با استفاده از نظریه پایداری لیپانوف سیستم های غیرخطی دارای آشفتگی

توجه به پارامترها و داده های جدول ۲، و مقادیر فرکانس و دامنه نوسانات توصیف شده به صورت $\beta_1 = 4.12$ و $\beta_2 = 0.0263$ تخمین زده می شوند. لذا داریم:

$$|H_1(t)| \leq \beta_1, |H_2(t)| \leq \beta_2 \quad (39)$$

در نتیجه مشتق تابع لیپانوف با توجه به رابطه های (۳۸) و (۴۰) به صورت زیر بازنویسی می شود.

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) \leq & + \sqrt{\frac{S_1}{C_1}} |e_1| \beta_2 + \\ & \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} |\dot{e}_2| \beta_2 + \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} |\dot{e}_1| \beta_1 + \\ & \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} |e_2| \beta_1 + \\ & \sqrt{\frac{(S_1+S_2)}{C_1}} |e_2| \beta_2 - \left(S'_1 \sqrt{\frac{(S_1+S_2)}{C_1}} + \right. \\ & \left. (S'_1 + S'_2) \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} \right) e_2^4 + \\ & \left(S'_1 \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} + \right. \\ & \left. S'_1 \sqrt{\frac{(S_1+S_2)}{C_1}} \right) |e_2 e_1^3| - S'_1 \sqrt{\frac{S_1}{C_1}} e_1^4 + \\ & S'_1 \sqrt{\frac{S_1}{C_1}} |e_1 e_2^3| + \left(2S'_2 + \right. \\ & \left. S'_1 \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \right) |\dot{e}_2 e_2^3| + \left(2S'_1 + \right. \\ & \left. S'_1 \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \right) |\dot{e}_2 e_1^3| + \left(2S'_2 - 2S'_1 - \right. \\ & \left. \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} S'_1 \right) |\dot{e}_1 e_1^3| + \left(2S'_1 + \right. \\ & \left. \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} (S'_1 + S'_2) \right) |\dot{e}_1 e_2^3| + \end{aligned} \quad (40)$$

انجام می شود که با نگاه به علامت منفی قبل از ماتریس Q می توان فهمید که تنها در صورتی مشتق تابع منفی معین خواهد بود که ماتریس Q مثبت معین گردد بنا بر معیار سیلوستر در [۳۲] باید که کدهای اصلی ماتریس متقارن Q نیز مثبت باشند تا خود ماتریس مثبت معین گردد. به طور مشابه با رابطه (۲۴) کدهای مرتبه ۴ تا ۴ ماتریس Q به صورت زیر در رابطه (۳۹) آورده شده اند. مقدار کدهای ماتریس Q با جایگذاری پارامترها به کمک داده های جدول ۲ به صورت زیر محاسبه شده اند:

$$KH_{Q_i} > 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$KH_{Q_1} = 3.1759 \times 10^5 > 0,$$

$$KH_{Q_2} = 3.0973 \times 10^6 > 0$$

$$KH_{Q_3} = 3.5124 \times 10^3 \quad (38)$$

$$> 0, \quad KH_{Q_4} = 1.11 \times 10^3$$

$$> 0$$

در ادامه با توجه به رابطه (۲۷) و قسمت A این رابطه به تعیین علامت عبارت های قبل از ماتریس Q پرداخته و با توجه به اینکه در این قسمت از معادله (۲۷) مقادیر $H_1(t)$ و $H_2(t)$ روابط (۱۷) و (۱۸) وجود دارند برای جملات اختلال دو حد بالای β_1 و β_2 در نظر می گیریم تا به کمک این دو حد بالا به تعیین علامت قسمت A رابطه (۲۷) بپردازیم. لازم به ذکر است که دو حد بالای β_1 و β_2 را با

$$3\sqrt{\frac{C_1}{S_2}}(S'_1 + S'_2)A_2 + 6S'_1A_2) \|e\|^3 +$$

$$\left(S'_1\sqrt{(S_1 + S_2)/S_2} + S'_1\sqrt{\frac{(S_1+S_2)}{C_1}} +$$

$$S'_1\sqrt{\frac{S_1}{C_1}} + 2S'_1\sqrt{\frac{S_2}{C_1}} + 2S'_1 + 4S'_2 +$$

$$\sqrt{\frac{C_1}{S_2}}S'_2\right) \|e\|^4$$

که

$$\epsilon = (2\beta_1)^2 + (2\beta_2)^2 +$$

$$\left(\sqrt{(S_1 + S_2)/S_2}\beta_1\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{(S_1+S_2)}{C_1}}\beta_2\right)^2 +$$

$$\left(\sqrt{\frac{S_1}{C_1}}\beta_2\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{S_1}{C_1}}\beta_2\right)^2 +$$

$$\left(\sqrt{\frac{S_2}{C_1}}\beta_2\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{C_1}{S_2}}\beta_1\right)^2$$

با ساده سازی نا مساوی (۴۲) مشتق تابع لیاپانوف نوسانگر حرارتی به صورت زیر تبدیل می گردد:

$$\dot{V}(e) \leq O_1\|e\| + O_2\|e\|^3 +$$

$$O_3\|e\|^4 - \left(S'_1\sqrt{\frac{(S_1+S_2)}{C_1}} + (S'_1 +$$

$$S'_2)\sqrt{(S_1 + S_2)/C_2}\right) e_2^4 -$$

$$k_1\|e\|^2 - S'_1\sqrt{\frac{S_1}{C_1}} e_1^4$$

در نامساوی (۴۳) مقادیر O_1 تا O_3 به ترتیب برابرند با:

$$O_1 = \sqrt{\epsilon} \quad (44)$$

$$O_2 = \left(3\sqrt{\frac{S_1}{C_1}} S'_1A_1 +$$

$$3S'_1\sqrt{(S_1 + S_2)/S_2} A_2 +$$

$$3\sqrt{(S_1 + S_2)/S_2} S'_1A_1 +$$

$$\left(3S'_1\sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} A_2 + 3(S'_1 +$$

$$S'_2)A_2\right) |e_2^3| + 3\sqrt{\frac{S_1}{C_1}} S'_1A_1 |e_1^3| +$$

$$\left(3\sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} S'_1A_1 +$$

$$3\sqrt{\frac{(S_1+S_2)}{C_1}} S'_1A_1\right) |e_2e_1^2| +$$

$$3\sqrt{\frac{S_1}{C_1}} S'_1A_2 |e_1e_2^2| + (6(S'_1 +$$

$$S'_2)A_2 + 3S'_1A_2) |\dot{e}_2e_2^2| +$$

$$\left(6S'_1A_1 + 3\sqrt{\frac{C_2}{C_1}} S'_1A_1\right) |\dot{e}_2e_1^2| +$$

$$\left(6S'_1A_1 - 3\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} S'_1A_1\right) |\dot{e}_1e_1^2| +$$

$$(3\sqrt{C_1/C_2}(S'_1 + S'_2)A_2 +$$

$$6S'_1e_2^2A_2) |\dot{e}_1e_2^2| - k_1\|e\|^2 +$$

$$2|\dot{e}_2|\beta_1 + 2|\dot{e}_1|\beta_1$$

از طرفی می توان به کمک نامساوی $|e_i| \leq \|e\|$ مشتق تابع لیاپانوف را ساده تر نمود. بر همین اساس این نامساوی در معادله ی (۴۱) جایگزین شده است:

$$\dot{V}(e) \leq -\left(S'_1\sqrt{\frac{(S_1+S_2)}{C_1}} + (S'_1 +$$

$$S'_2)\sqrt{(S_1 + S_2)/S_2}\right) e_2^4 - S'_1\sqrt{\frac{S_1}{C_1}} e_1^4 +$$

$$\sqrt{\epsilon}\|e\| - k_1\|e\|^2 +$$

$$\left(3S'_1\sqrt{(S_1 + S_2)/S_2} A_2 + 3\sqrt{\frac{S_1}{C_1}} S'_1A_1 +$$

$$3\sqrt{(S_1 + S_2)/S_2} S'_1A_1 + 3\sqrt{\frac{(S_1+S_2)}{C_1}} S'_1A_1 +$$

$$3\sqrt{\frac{S_1}{C_1}} S'_1A_2 + 9(S'_1 + S'_2)A_2 + 3S'_1A_2 +$$

$$12S'_1A_1 + 3\sqrt{\frac{S_2}{C_1}} S'_1A_1 - 3\sqrt{\frac{C_1}{S_2}} S'_1A_1 +$$

تحلیل وجود چرخه حدی پایدار در یک نوسانگر حرارتی-صوتی دیافراگمی با استفاده از نظریه پایداری لیاپانوف سیستم های غیرخطی دارای آشفتگی

$$-\sigma k_1 \|e\|^2 - S'_1 \sqrt{\frac{S_1}{c_1}} e_1^4 - (1 - \sigma) k_1 \|e\|^2$$

از طرفی نشان می دهیم $\|e\|$ روابط (۱۲) و (۱۳) دارای حد پایین و بالایی هست که در ادامه می خواهیم این حد پایین و بالا را بدست بیاوریم. بر همین اساس ρ_1 را حد بالای نرم $\|e\|$ فرض کرده ($\|e\| \leq \rho_1$) و در رابطه (۴۷) به صورتی که در رابطه (۴۸) نشان داده شده است، جایگذاری می گردد.

$$\dot{V}(e) \leq - \left(S'_1 \sqrt{\frac{S_1+S_2}{c_1}} + (S'_1 + S'_2) \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} \right) e_2^4 - \sigma k_1 \|e\|^2 - S'_1 \sqrt{\frac{S_1}{c_1}} e_1^4 + O_1 \|e\| + \frac{O_3 \rho_1^2 \|e\|^2 + O_2 \rho_1 \|e\|^2 - (1 - \sigma) k_1 \|e\|^2}{\dot{E}}$$

قسمتی از رابطه (۴۸) که با \dot{E} نشان داده شده یک معادله درجه دوم به صورت $a\rho_1^2 + b\rho_1 + c = 0$ بر حسب ρ_1 هست که با حل آن مقدار ρ_1 در رابطه (۴۹) به دست می آید (با توجه به حد بالای نرم $\|e\|$ مقدار مثبت قبل از رادیکال در نظر گرفته شده است).

$$\rho_1 = \frac{-O_2 + \sqrt{O_2^2 + 4O_3(1-\sigma)k_1}}{2O_3} = 6.23 \quad (43)$$

$$3 \sqrt{\frac{(S_1+S_2)}{c_1}} S'_1 A_1 + 3 \sqrt{\frac{c_1}{S_2}} (S'_1 + S'_2) A_2 + 6 S'_1 A_2 + 3 \sqrt{\frac{S_1}{c_1}} S'_1 A_2 + 9 (S'_1 + S'_2) A_2 + 3 S'_1 A_2 + 12 S'_1 A_1 + 3 \sqrt{\frac{S_2}{c_1}} S'_1 A_1 - 3 \sqrt{\frac{c_1}{S_2}} S'_1 A_1$$

$$O_3 = 2S'_1 + 4S'_2 + \quad (46)$$

$$S'_1 \sqrt{\frac{S_1}{c_1}} S'_1 \sqrt{(S_1 + S_2)/S_2} + S'_1 \sqrt{\frac{(S_1+S_2)}{c_1}} + 2S'_1 \sqrt{\frac{S_2}{c_1}} + \sqrt{\frac{c_1}{S_2}} S'_2$$

با توجه به پارامترها و جایگذاری داده های جدول ۲ در روابط

$$O_2 = 313.08 \text{ و } O_1 = 313.08 \text{ و } O_3 = 8.60 \text{ و } 1.26 \text{ و } O_3 = 8.60 \text{ به دست می آیند.}$$

با تقسیم عبارت $k_1 \|e\|^2$ به دو بخش $\sigma k_1 \|e\|^2$ و $(1 - \sigma) k_1 \|e\|^2$ (مشتق تابع لیاپانوف به صورت زیر خواهد شد:

$$\dot{V}(e) \leq O_1 \|e\| + O_2 \|e\|^3 + O_3 \|e\|^4 - \left(S'_1 \sqrt{\frac{S_1+S_2}{c_1}} + (S'_1 + S'_2) \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} \right) e_2^4 \quad (42)$$

$$\dot{V}(e) \leq - \left(S'_1 \sqrt{\frac{(S_1+S_2)}{C_1}} + (S'_1 + S'_2) \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} \right) e_2^4 - \sigma(1 - \varphi) k_1 \|e\|^2 - S'_1 \sqrt{\frac{S_1}{C_1}} e_1^4 \quad (46)$$

اگر

$$\|e\| \geq \mu = \frac{O_1}{\varphi \sigma k_1} = 0.2867 \quad (47)$$

انتخاب شود که مقدار μ با توجه به مقادیر O_1 و k_1 و φ و σ محاسبه شده است. با نگاه به نامساوی (۴۷) می‌توان دریافت که شرط (ب) نظریه پایداری نیز برآورده شده است. روند پیاده سازی نظریه پایداری بر روی دینامیک خطای نوسانگر حرارتی مورد نظر نشان داد که تمام شروط این نظریه برآورده شده است. همچنین، با توجه به مقدار حد بالا و پایین برای نرم $\|e\|$ حد نهایی برای دینامیک خطای نوسانگر بدست آمده است.

۴- شبیه‌سازی نتایج

در این بخش به شبیه‌سازی و ارائه نتایج می‌پردازیم. به منظور شبیه‌سازی و بررسی تاثیر تغییر پارامترهای نوسانگر حرارتی بر مقدار حد نهایی، از بخش SIMULINK برنامه MATLAB ۲۰۲۳ و از روش حل ODE 45 استفاده شده است. دربخش قبل ما به بررسی سه شرط برای برقراری نوسانات پایدار در دینامیک این نوسانگر پرداختیم. برای بررسی شرط اول و دوم به محاسبه کدهای ماتریس Q, Z پرداخته شد که با توجه به روابط (۲۴) و (۳۹) مشاهده می‌شود که مقادیر محاسبه شده KH_{Z_i}, KH_{Q_i} برای

با توجه به مقادیر k_1 و O_2 و O_3 و σ برابر با 0.8 (عدد 0.8 به عنوان عدد فرضی بین 1,0 در نظر گرفته شده) (جدول ۲) مقدار ρ_1 بدست می‌آید.

حال می‌توان نامساوی (۴۸) را به شکل زیر نوشت:

$$\dot{V}(e) \leq - \left(S'_1 \sqrt{\frac{(S_1+S_2)}{C_1}} + (S'_1 + S'_2) \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} \right) e_2^4 - \sigma k_1 \|e\|^2 - S'_1 \sqrt{\frac{S_1}{C_1}} e_1^4 + O_1 \|e\| \quad (48)$$

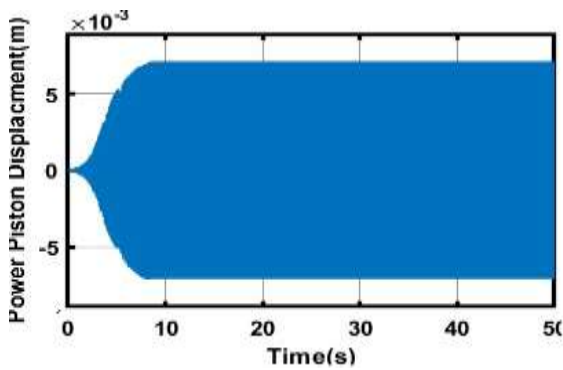
در ادامه کران پایین خطا محاسبه می‌گردد تا بتوان محدوده ای را که رفتار دینامیک خطای نوسانگر حرارتی در نزدیکی نقطه تعادل در آن نوسان می‌کند را به دست آورد. بر این اساس نیاز است که عبارت $\sigma k_1 \|e\|^2$ به دو بخش $\sigma \varphi k_1 \|e\|^2$ و $\sigma(1 - \varphi) k_1 \|e\|^2$ تقسیم گردد ($0 < \varphi < 1$) همانطور که در رابطه‌ی (۴۹) نشان داده شده است:

$$\dot{V}(e) \leq - \left(S'_1 \sqrt{\frac{(S_1+S_2)}{C_1}} + (S'_1 + S'_2) \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} \right) e_2^4 - \sigma(1 - \varphi) k_1 \|e\|^2 - \sigma \varphi k_1 \|e\|^2 - S'_1 \sqrt{\frac{S_1}{C_1}} e_1^4 + O_1 \|e\| \quad (49)$$

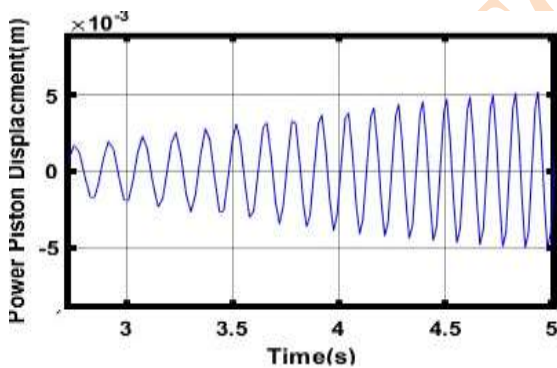
تحلیل وجود چرخه حدی پایدار در یک نوسانگر حرارتی-صوتی دیافراگمی با استفاده از نظریه پایداری لیاپانوف سیستم های غیرخطی دارای آشفتگی

فرکانس نوسان را به دست آورد. شکل (۴-ب) نیز حالت گذرای (۴-الف) را نشان می دهد.

شکل ۵ چرخه حدی ایجاد شده در سیستم نوسانگر را نشان می دهد. نمودار عمودی سرعت و نمودار افقی جابجایی را نشان می دهد و این یک چرخه حدی پایدار است.

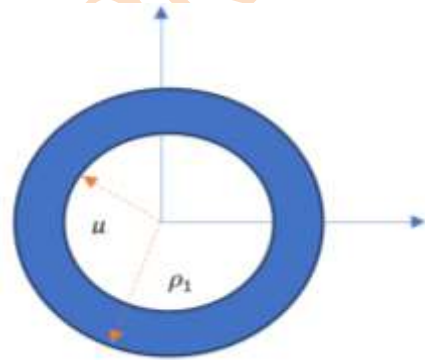


شکل ۳-الف) نوسانات حرکت پیستون قدرت



ب) قسمت بزرگ شده از نوسانات

$i = 1, 2, 3, 4$ مثبت هستند. لذا دو شرط اولیه برای بررسی نوسانات پایدار در این نوسانگر برآورده شده است. برای بررسی شرط سوم با بررسی حداقل و حداکثر مقدار $\|e\|$ از رابطه های (۴۹) و (۵۳) نیز مشخص است، مقدار حداقل نرم از مقدار ماکزیمم نرم کمتر است و این یعنی شرط سوم پیاده شده برای نوسانگر حرارتی مورد نظر برآورده شده است. طرحواره حداقل و حداکثر مقدار نرم $\|e\|$ در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲- طرحواره طوق ایجاد شده در نزدیکی مبدا برای نشان دادن حداقل و حداکثر خطا برای نوسانگر حرارتی شکل ۳ جابجایی پیستون قدرت بر حسب زمان را نشان می دهد. از روی این شکل می توان دامنه و فرکانس نوسان را به دست آورد. شکل (۳-ب) در فاصله زمانی 0 تا 5 ثانیه حالت گذرای (۳-الف) را نشان می دهد. با توجه به اینکه سیستم مکانیکی و دارای دینامیک است این حالت گذرا تا رسیدن به نوسان پایدار طبیعی است.

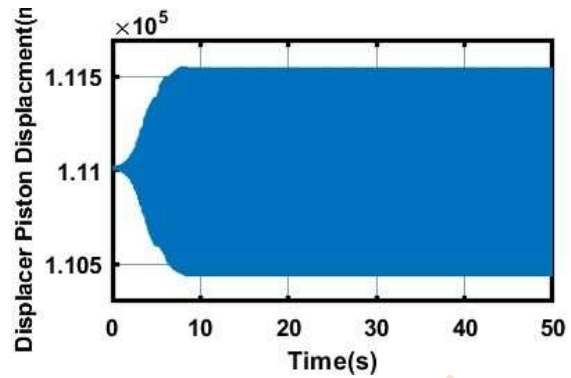
شکل ۴ نیز جابجایی پیستون جابجاگر بر حسب زمان را نشان می دهد. از روی این شکل نیز می توان دامنه و

با کمک شاخص حد نهایی ارزیابی کرد. با توجه به معادله (۲۳) و آخرین شرط نظریه پایداری، مقدار شاخص را می-توان محاسبه نمود. قابل بیان است که برای محاسبه مقدار حد نهایی در شرط آخر نظریه پایداری (رسیدن به کمترین مقدار باند نهایی) مقدار دو ثابت C_1' و C_2' را می-توان با هم برابر در نظر گرفته شوند. بر این اساس مقدار حد نهایی برای نوسانگر حرارتی مورد مطالعه برابر خواهد بود با:

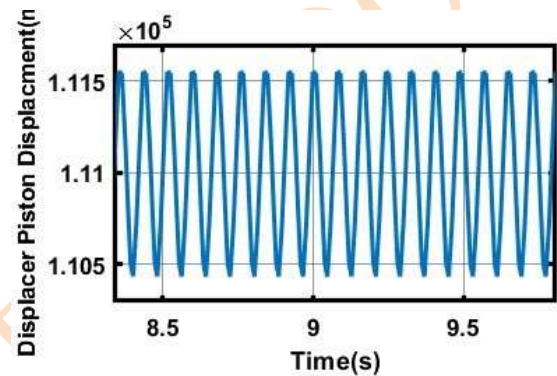
$$b = \mu \sqrt{\frac{c_2' c_1 = c_2'}{c_1'}} \Rightarrow \mu = 0.2867 \quad (54)$$

با توجه به عبارت مربوط به نرم $\|e\| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + \dot{e}_1^2 + \dot{e}_2^2}$ مقدار حد نهایی برای نوسانگر حرارتی مورد نظر کاملاً منطقی به نظر می-آید. در نتیجه می-توان گفت که دینامیک خطای غیرخطی نوسانگر حرارتی بخوبی با کمک روش پایداری توانسته است به مبدا نزدیک شود. اما واضح است که هرچه بتوان مقدار حد نهایی را کاهش داد، اهداف مساله که همان پایداری هرچه بیشتر دینامیک خطای غیر خطی نوسانگر است (یا نوسانات پایدار دینامیک غیر خطی)، بیشتر محقق خواهد شد. بر همین اساس می-توان به بررسی تغییر مقدار برخی از پارامترهای موثر بر این موضع پرداخت که در ادامه به آن پرداخته خواهد شد. ذکر دوباره این نکته مهم است که مقدار حد نهایی برای دینامیک خطای غیرخطی نوسانگر به دلیل وجود جملات اغتشاش هیچگاه صفر نخواهد شد و تنها مقدار آن به صفر نزدیکتر خواهد گشت.

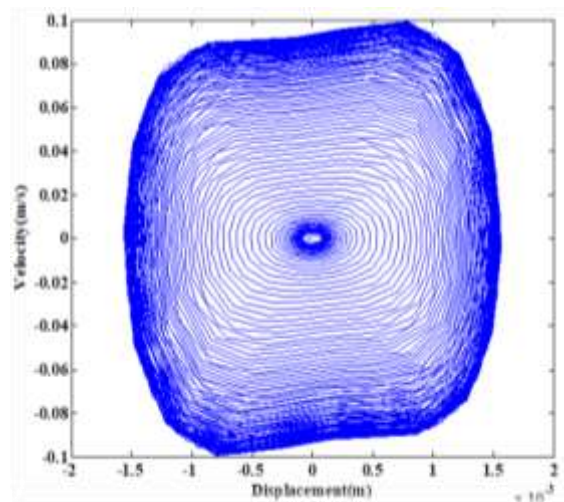
۴-۱ تحلیل تاثیر تغییر پارامترها



شکل ۴-الف) نوسانات حرکت پیستون جابجاگر



ب) قسمت بزرگ شده نوسانات



شکل ۵-چرخه حدی ایجاد شده برای پیستون قدرت و پیستون جابجاگر

بعد از ارزیابی ۳ شرط ارائه شده، اکنون می-توان بررسی کرد که تا چه میزان یکی از اهداف مساله (مقدار هرچه کمتر حد نهایی) برآورده شده است. این موضوع را می-توان

تحلیل وجود چرخه حدی پایدار در یک نوسانگر حرارتی-صوتی دیافراگمی با استفاده از نظریه پایداری لیپانوف سیستم های غیر خطی دارای آشفتگی

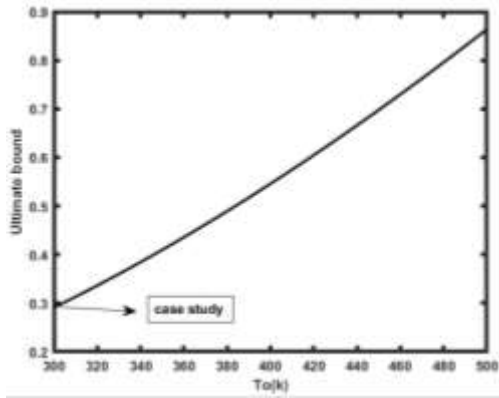
محفظه نوسانگر حرارتی بر مقدار حد نهایی نشان داده شده است. با توجه به شکل ۸، افزایش مقدار دمای ورودی منجر به افزایش مقدار حد نهایی شده است. همچنین در شکل ۹ نیز تاثیر تغییرات دمای خروجی از نوسانگر حرارتی نشان داده شده است. با توجه به شکل ۹، این افزایش منجر به افزوده شدن مقدار حد نهایی گردیده است. به بیان بهتر، افزایش مقدار دمای ورودی از ۳۰۰ کلوین تا ۵۰۰ کلوین باعث افزایش مقدار باند نهایی از 0.2867 تا 0.87 شده است.

حجم فضا در بخش سرد یکی دیگر از پارامترهایی است که می توان تاثیر آن را بر مقدار حد نهایی مورد مطالعه قرار داد. به طور کلی مقدار حجم فضای در این نوع نوسانگرها در یک بازه مشخص منجر به بهبود عملکرد سیستم خواهد شد، اما افزایش بیش از حد یا کاهش بیش از حد آن خود منجر به پایدار شدن دینامیک نوسانگر میگردد. با توجه به این موضوع، افزایش مقدار حجم فضای سرد در بازه انتخابی در این مقاله اثر مثبت بر حد نهایی داشته و کاهش مستمر آن را در پی داشته است (شکل ۱۰). همچنین، تغییر مقدار حد نهایی در اثر تغییر مقدار حجم فضای گرم نوسانگر حرارتی کاهشی بوده است (البته ممکن است با افزایش بیشتر یا کاهش بیشتر مقدار حجم فضای گرم، مقدار حد نهایی افزایشی شود) (شکل ۱۱).

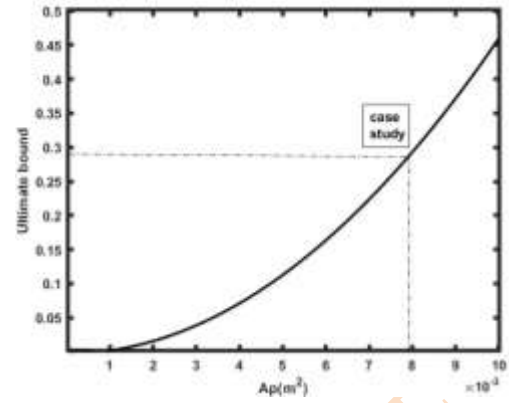
اولین پارامتری که می توان مورد بررسی قرار داد، سطح مقطع پیستون قدرت در مدل دینامیکی ارائه شده برای نوسانگر حرارتی است. در شکل ۶ تاثیر تغییر این پارامتر بر مقدار حد نهایی (رابطه (۵۴)) نشان داده شده است. همانطور که از شکل ۶ مشخص است، با افزایش مقدار سطح مقطع پیستون قدرت، مقدار حد نهایی افزایش پیدا کرده است که بر اساس تعریفی از حد نهایی ارائه شده، افزایش مقدار این پارامتر اثر مخرب بر عملکرد نوسانگر حرارتی مورد نظر خواهد داشت. شایان ذکر است که بازه انتخاب شده برای تغییرات این پارامتر بر اساس فیزیک مساله بوده است و امکان این که با تغییر بازه انتخابی روند تغییرات مقدار حد نهایی نیز تغییر کند وجود دارد.

سختی فنر متصل به پیستون قدرت در مدل دینامیکی تعیین شده برای نوسانگر حرارتی اکوستیکی دومین پارامتری است که می توان اثر تغییر مقدار آن بر مقدار حد نهایی را مورد بررسی و ارزیابی قرار داد. با توجه به شکل ۷ تغییر مقدار این پارامتر از ۳۰ نیوتن بر متر مربع تا ۱۰۰۰ نیوتن بر متر مربع منجر به کاهش مستمر مقدار حد نهایی شده است. قابل ذکر است که ممکن است با افزایش بیش از حد این مقدار، روند تغییرات مقدار حد نهایی تغییر کند (بازه تغییرات بر اساس فیزیک مساله تعیین شده است).

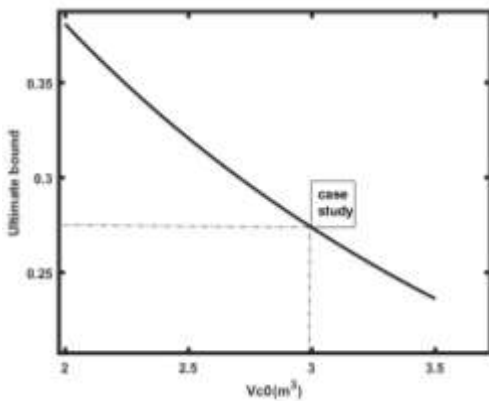
دمای ورودی به نوسانگر حرارتی دیگر پارامتری است که می توان تغییر مقدار آن بر حد نهایی را مورد بررسی و ارزیابی قرار داد. در شکل ۸ اثر تغییر مقدار دمای ورودی به



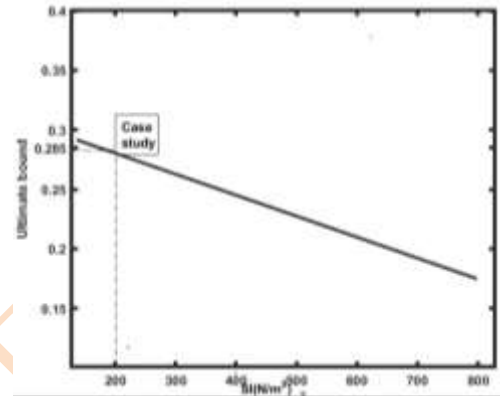
شکل ۹. تاثیر مقدار دمای خروجی T_0 بر باند نهایی



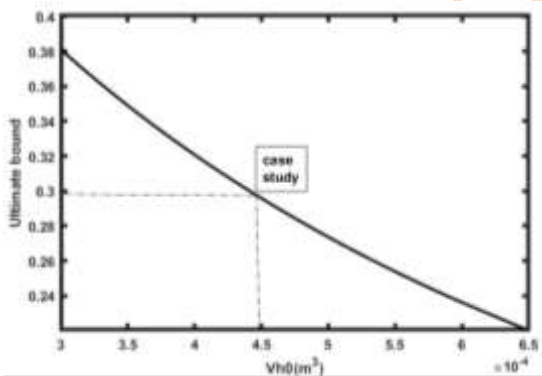
شکل ۶. تاثیر سطح مقطع پیستون قدرت بر باند نهایی



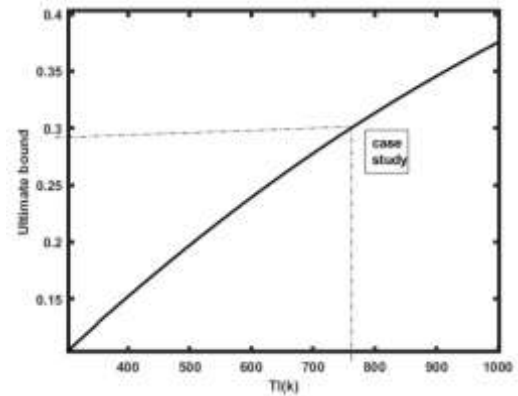
شکل ۱۰. تاثیر مقدار حجم فضای سرد V_{c0} بر باند نهایی



شکل ۷. تاثیر سختی فنر مربوط به پیستون قدرت بر باند نهایی



شکل ۱۱. تاثیر مقدار حجم فضای گرم V_{h0} بر باند نهایی



شکل ۸. تاثیر مقدار دمای ورودی T_1 بر باند نهایی

۵- نتیجه گیری

در این مقاله به کمک نظریه پایداری دینامیک یک نوسانگر حرارتی-صوتی دیافراگمی مورد تحلیل قرار گرفت و وجود چرخه حدی در آن با برقراری شرایطی اثبات شد. در واقع

تحلیل وجود چرخه حدی پایدار در یک نوسانگر حرارتی-صوتی دیافراگمی با استفاده از نظریه پایداری لیپانوف سیستم های غیرخطی دارای آشفتگی

z_1	حرکت پیستون قدرت	\dot{S}_1 و S_1	ثابت های سختی فنرمتصل به جرم پیستون قدرت
F	نیرو	T_1	دمای ورودی
Q_{ij}	مولفه ij ام ماتریس Q	T_0	دمای خروجی
$[e]^T Z [e]$	تابع لیپانوف به فرم ماتریسی	D_1	ضریب میرایی
β_1	حد بالا $ H_1(t) $	φ, σ	مقدار فرضی بین صفر و یک
β_2	حد بالا $ H_2(t) $	$v(e)$	تابع لیپانوف
ρ_1	حد بالای $ e $	ρ	چگالی
A_p	سطح مقطع پیستون قدرت	R	ثابت گاز
t	زمان	KH_{Q_i}	کهاد مرتبه i ام ماتریس Q
c'_1, c'_2, k_2	اعداد ثابت	A_1 و A_2	دامنه نوسانات

هدف این مقاله ارائه یک روش به منظور بررسی نوسانات پایدار این نوع نوسانگرها ست. در این راستا ابتدا به معرفی نوسانگر حرارتی-صوتی دیافراگمی پرداخته شد. سپس روش پایداری بر روی دینامیک غیرخطی این نوسانگر پیاده سازی و با استفاده از داده های یک نوسانگر حرارتی دیافراگمی ساخته شده، روش ارائه شده مورد ارزیابی قرار گرفت. در پایان نیز نتایج مورد تحلیل قرار گرفتند. نتیجه این تحقیق ارائه ۳ شرط پارامتریک است که در صورت برقرار شدن این ۳ شرط، نوسانات پایدار نوسانگر حرارتی مورد مطالعه تضمین خواهد شد و در نتیجه مهمترین چالش طراحان در این زمینه برطرف می گردد.

جدول ۱- فهرست نشانه های اختصاری

نشانه	توصیف	نشانه	توصیف
v_{Co}	حجم اولیه فضای سرد	C_1	جرم پیستون قدرت
v_{ho}	حجم اولیه فضای گرم	C_2	جرم پیستون جابجا گر
μ	حد پایین $ e $	p	فشار
z_2	حرکت پیستون جابجاگر	\dot{S}_2 و S_2	ثابت های سختی فنر جرم پیستون جابجاگر

استناد به این مقاله: عقیده حیدری، اعظم تیموری و محمدرضا رضائی آل " تحلیل وجود چرخه حدی پایدار در یک نوسانگر حرارتی-صوتی دیافراگمی با استفاده از نظریه پایداری لیپانوف سیستم های غیرخطی دارای آشفتگی " مدل سازی در مهندسی ،.....

[۶].Adler, R. (1973). A study of locking phenomena in oscillators. Proceedings of the IEEE, 61(10), 1380-1385.

[۷].Jenkins, A. (2013). Self-oscillation. Physics Reports, 525(2), 167-222..

[۸].Strogatz, S. H., & Stewart, I. (1993). Coupled oscillators and biological synchronization. Scientific american, 269(6), 102-109.

[۹].Maleki, L. (2011). The optoelectronic oscillator. Nature Photonics, 5(12), 728-730..

[۱۰].Gammaitoni, L., Neri, I., & Vocca, H. (2009). Nonlinear oscillators for vibration energy harvesting. Applied Physics Letters, 94(16).

[۱۱].Csaba, G., & Porod, W. (2020). Coupled oscillators for computing: A review and perspective. Applied physics reviews, 7(1).

[۱۲].Javad Faghihi, M., Haddad, M., Mazaheri, Z., & Reza Baghshahi, H. (2020). Nonlinear thermal coherent states. Journal of the Optical Society of America B, 37(8), 2299-2307.

[۱۳].Pan, Y., Riedijk, F. R., & Huijsing, J. H. (1990). A new class of integrated thermal oscillators with duty-cycle output for application in thermal sensors. Sensors and Actuators A: Physical, 22(1-3), 655-659..

[۱۴].Xuereb, A., Imperato, A., & Dantan, A. (2015). Heat transport in harmonic oscillator systems with thermal baths: application to optomechanical arrays. New Journal of Physics, 17(5), 055013.

[۱۵].Backhaus, S., & Swift, G. W. (1999). A thermoacoustic Stirling heat engine. Nature, 399(6734), 335-338.

[۱۶]. Backhaus, S., & Swift, G. W. (2000). A thermoacoustic-Stirling heat engine: Detailed study. The Journal of the Acoustical Society of America, 107(6), 3148-3166.

فرکانس	ω	اختلاف فاز	θ
--------	----------	------------	----------

جدول ۲- ویژگی های نوسانگر مورد مطالعه [۳۳]

پارا متر	مقدار	پارامتر	مقدار
C_1	0.067(kg)	C_2	0.001(kg)
S_1	210(N/m ²)	S_2	0.08(N/m ²)
ω	40(rad/s)	T_0	300(K)
ρ	4.81 (kg/m ³)	T_1	825(K)
R	287 (N × m/kg	A_1, A_2	0.005 ,0.0225 (m)
β_1	4.12	β_2	0.0263
σ_1	313.08	σ_2	1.26
σ_3	8.60	k_1	1706.1
θ	50°	φ, σ	0.8
\hat{S}_1	1(N/m ²)	\hat{S}_2	42(N/m ²)

مراجع

[۱]. Hajimiri, A., & Lee, T. H. (2007). The design of low noise oscillators. Springer Science & Business Media.

- thermoacoustic Stirling engines. *Journal of Sound and Vibration*, 325(4-5), 974-988.
- [۲۲]. Zare, S., & Tavakolpour-Saleh, A. (2019). Design of a traveling wave thermo-acoustic engine based on genetic algorithm. *International Journal of Energy Research*, 43(14), 8790-8801.
- [۲۳]. Zare, S., & Tavakol Poursaleh, A. R. (2015). Nonlinear dynamic analysis of solar free piston hot-air engine. *Modares Mechanical Engineering*, 15(9), 223-234.
- [۲۴]. Formosa, F. (2011). Coupled thermodynamic-dynamic semi-analytical model of free piston Stirling engines. *Energy Conversion and Management*, 52(5), 2098-2109.
- [۲۵]. Zare, S., & Tavakolpour-Saleh, A. R. (2021). Modeling, construction, and testing of a diaphragm thermoacoustic Stirling engine. *Energy Conversion and Management*, 243, 114394.
- [۲۶]. Bi, T., Wu, Z., Zhang, L., Yu, G., Lou, E., Dai, W., Development of a 5 kW traveling-wave thermoacoustic electric generator. *Applied energy*, 2017. 185: p. 1355-1361.
- [۲۷]. Wang, K. Qiu, L. Numerical analysis on a four-stage looped thermoacoustic Stirling power generator for low temperature waste heat. *Energy Conversion and Management*, 2017. **150**: p. 830-837.
- [۲۸]. Yang, R., Wang, Y., Feng, Y., Jin, T., Tang, K., Performance of a looped thermoacoustic engine with multiple loads capable of utilizing heat source below 200° C. *Applied Thermal Engineering*, 2019. 148: p. 516-523.
- [۲۹]. Yang, R., Wang, Y., Luo, J., Tan, J., Jin, T., Performance comparison of looped thermoacoustic [۳۰]. Zare, S. H., & Tavakolpour-Saleh, A. R. (2016). Frequency-based design of a free piston Stirling engine using genetic algorithm. *Energy*, 109, 466-480.
- [۳۱]. De Waele, A. T. A. M. (2009). Basic treatment of onset conditions and transient effects in [۳۲]. Biwa, T., Hasegawa, D., & Yazaki, T. (2010). Low temperature differential thermoacoustic Stirling engine. *Applied physics letters*, 97(3).
- [۳۳]. Zare, S., Tavakolpour-Saleh, A. R., Aghahosseini, A., & Mirshekari, R. (2023). Thermoacoustic Stirling engines: A review. *International Journal of Green Energy*, 20(1), 89-111.
- [۳۴]. Tijani, M. E. H., & Spoelstra, S. (2013). A hot air driven thermoacoustic-Stirling engine. *Applied thermal engineering*, 61(2), 866-870.
- [۳۵]. Dashti, E., Tabari, N. G., Zare, S., & Shabanpour, H. (2024). An Analytical Investigation of a Thermoacoustic Stirling Engine. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 1-18.
- [۳۶]. Hofacker, M. E., Tucker, J. M., & Barth, E. J. (2011, January). Modeling and validation of free-piston Stirling engines using impedance controlled hardware-in-the-loop. In *Dynamic systems and control conference (Vol. 54754, pp. 153-160)*.
- [۳۷]. Bégot, S., Layes, G., Lanzetta, F., & Nika, P. (2013). Stability analysis of free piston Stirling engines. *The European Physical Journal-Applied Physics*, 61(3), 30901.
- [۳۸]. Riofrio, J. A., Al-Dakkan, K., Hofacker, M. E., & Barth, E. J. (2008, June). Control-based design of free-piston Stirling engines. In *2008 American Control Conference (pp. 1533-1538)*. IEEE.
- [۳۹]. Zare, S. H., & Tavakolpour-Saleh, A. R. (2016). Frequency-based design of a free piston Stirling engine using genetic algorithm. *Energy*, 109, 466-480.
- [۴۰]. De Waele, A. T. A. M. (2009). Basic treatment of onset conditions and transient effects in

electric generators with various thermoacoustic stages. *International Journal of Energy Research*, 2019.

[۳۰]. Tavakolpour-Saleh, A. R., & Zare, S. (2021). Justifying performance of thermo-acoustic Stirling engines based on a novel lumped mechanical model. *Energy*, 227, 120466.

[۳۱]. Zare, S., Pourfayaz, F., Tavakolpour-Saleh, A. R., & Lashaki, R. A. (2024). A design method based on neural network to predict thermoacoustic Stirling engine parameters: Experimental and theoretical assessment. *Energy*, 309, 133113.

[۳۲]. Hassan, K. K. (2002). *Nonlinear systems. Departement of Electrical and computer Engineering, Michigan State University.*

[۳۳]. زارع ش.، مهرماه ۱۴۰۰، بررسی ناپایداری یک نوسانگر استرلینگ ترمواکوستیک با استفاده از تئوری لیپانوف توسعه یافته: مطالعه ی تحلیلی و تجربی، رساله دکتری.