Journal of Econometric Modelling 2026, 11(1): 39-63
DOI: https://doi.org/10.22075/jem.2025.38603.2030

Semnan University

Journal of Econometric Modelling

Journal homepage: https://jem.semnan.ac.ir/?lang=en

Research Article

A New Income Inequality Index Based on the Ratio of Medians

Shahryar Mirzaei
Assistant Professor, Department of Statistics, Faculty of Basic Sciences, Payam Noor University, Tehran, Iran
sh_mirzaee@pnu.ac.ir

PAPER INFO

Paper history:
Received: 06. 09. 2025
Revised: 21. 09. 2025
Accepted: 13. 10. 2025

JEL Classification:
C46, C55, D31, D63.

Keywords:
Income inequality,
median inequality index,
Gini coefficient,
Lorenz curve.

ABSTRACT

This study presents a new index for measuring income inequality based on the ratio of the median income of low-income to high-income groups. Given the common challenges in income data, including the presence of outliers and asymmetric distributions, conventional mean-based indices often do not provide appropriate estimates. In contrast, the proposed index, by utilizing the median—a measure robust to outliers—mitigates this challenge. By precisely defining the new index and introducing the related "inequality curve," the present study examines the basic features of a valid inequality measure and provides a consistent estimator for it. The performance of the index has been evaluated through simulation studies and application to Iranian household income data. The findings indicate that the proposed index is not only a valid measure for measuring inequality, but also provides a more expressive and practical understanding of the Lorenz curve through the related curve.

How to Cite: Mirzaei, S. (2026). A New Income Inequality Index Based on the Ratio of Medians. *Journal of Econometric Modelling*, 11(1), 39-63.

1. Introduction

Inequality indices are frequently constructed by comparing the mean or total income of low-income groups with the total income of the entire population (Kleiber and Kotz, 2003). Lorenz (1905) defined the Lorenz curve as the ratio of the total income earned by individuals below a given threshold to the total income of the entire population. Bonferroni (1930) introduced a measure based on the ratio of the mean income of those below a threshold to the overall mean. Zenga (2007) proposed a curve that compares the mean income of those below a point to that of those above it, thereby capturing the income gap between the two groups. However, when working with income data, which often exhibit outliers and skewed distributions, reliance on a mean-based concentration index can be misleading. To address this issue, researchers advocate using the median, as it provides a more robust measure less affected by extreme values. Gastwirth (2014) suggested replacing the mean with the median to modify the Gini index, though this adjustment may yield a measure that no longer lies within the conventional normalized range of [0,1]. Building on Zenga's (2007) framework and the advantages of the median, this study introduces a novel inequality index by comparing the median income of the lower segment of society with that of the upper segment. The paper defines the proposed index and its associated curve, establishes its axiomatic properties, provides a consistent estimator, and evaluates its performance relative to the Gini coefficient using both simulated data and real-world household data from Iran.

2. Methodology

2.1 The Proposed Inequality Index

Let X be a non-negative random variable with cumulative distribution function F_X. Its quantile function is defined as:

$$Q_X(p) = \inf\{x \,;\, F_X(x) \ge p\}, \qquad 0 \le p \le 1.$$

Here, the median income of those below the quantile $Q_X(p)$ needs to be compared with the median income of those above the quantile $Q_X(p)$ .This point of view has led the author to the definition of the new index based on the ratio of the two quantiles:

$$I_X(p) = \frac{Q_X(\frac{p}{2})}{Q_X(\frac{1}{2} + \frac{p}{2})}, \qquad 0 \le p \le 1.$$

In addition, $I_X(p)$ is a ratio between the lower and the upper partial medians, the meaning of $I_X(p)$ is very simple. Furthermore, when all income values are equal, the value of the inequality index should be zero. Therefore, the point value of the index should be defined as follows:

$$\mathrm{M}_X(p) = 1 - \frac{Q_X(\frac{p}{2})}{Q_X(\frac{1}{2}+\frac{p}{2})}, \qquad 0 \le p \le 1.$$

This index takes the value of zero in the case of complete equality and the value of one in the case of complete inequality. By averaging $\mathrm{M}_X(p)$, the new synthetic inequality index M is obtained. The new index is linked to the new inequality curve which is obtained by plotting the points $(p, \mathrm{M}_X(p))$. *It follows that:*

$$\mathrm{M} = \int_0^1 \mathrm{M}_X(p)dp.$$

2.2 Axioms of Inequality Indices

This study has proven that the proposed index adheres to the key axioms of a valid inequality measure: the normalization axiom (the index value lies between zero and one), the scale invariance axiom (multiplying all incomes by a constant does not change the index), sensitivity to uniform transfers (adding the same positive constant to all incomes reduces the inequality index), and the Pigou-Dalton transfer principle (transferring income from a richer to a poorer individual reduces the index value).

2.3 Stochastic order

Inequality curves are fundamental to analyzing income inequality. An important consequence of income inequality curves relates to stochastic orders based on these curves. Stochastic orders based on inequality curves enable the comparison of statistical distributions in terms of income inequality. Comparison based on income inequality curves explains the role of distribution parameters in income inequality in society. In this study, we examine stochastic orders based on the new inequality curve and demonstrate that this curve, like other inequality curves, can be used in the context of stochastic orders of income distribution.

2.4 Sampling estimator of the new index

Consider a random sample $X_1,\ldots,X_n$ of size n drawn from a cumulative distribution function F. The corresponding order statistics from this sample are denoted as $X_{1:n} \le \ldots \le X_{i:n} \le \ldots \le X_{n:n}$. We can define the new index as follows:

$$\mathrm{M}_n = 1 - \frac{1}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{X_{k:n}}{X_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + k:n}},$$

where, for every real $\lfloor X \rfloor$ is the largest integer that not exceeding X, and $\lceil X \rceil$ is the smallest integer that not less than X.

This study proves the consistency of the proposed estimator—that is, its convergence in probability to the true population parameter as the sample size increases—and discusses its asymptotic distribution, thereby addressing the normality requirement for inference. Since both consistency and asymptotic normality are key features of a reliable estimator, establishing these properties in this research confirms the index's suitability for empirical application.

2.5 Simulation study

A Monte Carlo simulation with 10,000 repetitions and various sample sizes was conducted to compare the performance of the new index with the Gini coefficient. The Generalized Beta distribution of the second kind (GB2), a flexible distribution for income modeling, was fitted to real Iranian household data from 2015. The simulation results showed that for different sample sizes, the new index had lower bias and mean squared error than the Gini coefficient. Moreover, the sampling distribution of the new index showed less skewness and kurtosis than that of the Gini estimator, and its bootstrap confidence intervals performed better.

3. Discussion and Conclusion

In this study, a new income inequality index and its corresponding curve were defined based on the ratio of the medians of low-income groups to high-income groups in society. This index, with its ease of understanding and intuitive interpretation, adheres to the axioms governing inequality indices, including normalization, the Pigou-Dalton transfer principle, scale invariance, and sensitivity to income transfers. In addition to providing a suitable estimator for this index, the concept of stochastic orders based on the new inequality curve was also defined. In the simulation study, by fitting an appropriate income distribution to real income data, the desirable performance of this measure compared to the conventional Gini index was demonstrated. Finally, by applying Iranian household income data from the Statistical Center of Iran and using the Gini coefficient, the new index, and their corresponding curves, income inequality was examined separately for urban and rural areas over the period 2005 to 2015. Overall, it can be said that during the period under review, the relative intensity of inequality in the country first decreased and then increased. Furthermore, income inequality in urban areas was lower than in rural areas, and the distribution of cash subsidies reduced income inequality during the years 2009 to 2011. It is worth noting that the new index, like the Gini coefficient, reflected these events. Moreover, the analysis of income data shows that the new index effectively reflects income inequality between low-income and high-income individuals in society. It also has a simple geometric interpretation and provides valid statistical analyses. The curve corresponding to this new index, in addition to its intuitive geometric interpretation, offers greater flexibility and clarity in representing inequality compared to the well-known Lorenz inequality curve.

شاخص نابرابری درآمد جدید بر اساس نسبت میانه درآمدها

شهریار میرزائی

استادیار گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

sh_mirzaee@pnu.ac.ir

نوع مقاله: علمی- پژوهشی تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۶/۱۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۷/۲۱

چکیده:

این پژوهش یک شاخص نوین برای سنجش نابرابری درآمد ارائه می‌دهد که بر پایه نسبت میانه درآمد گروه‌های کم‌درآمد به پردرآمد استوار است. با توجه به چالش‌های متداول در داده‌های درآمدی، از جمله وجود مقادیر فرین و توزیع‌های نامتقارن، شاخص‌های مرسوم مبتنی بر میانگین اغلب برآوردهای مناسبی ارائه نمی‌دهند. در مقابل، شاخص پیشنهادی با بهره‌گیری از میانه، که معیاری مقاوم در برابر داده‌های پرت است، این چالش را کاهش می‌دهد. مطالعه حاضر با تعریف دقیق شاخص جدید و معرفی «منحنی نابرابری» مرتبط، ویژگی‌های اساسی یک سنجه نابرابری معتبر را بررسی کرده و برآوردگری سازگار برای آن ارائه می‌دهد. عملکرد شاخص از طریق مطالعات شبیه‌سازی و کاربرد روی داده‌های درآمدی خانوارهای ایرانی مورد ارزیابی قرار گرفته است. یافته‌ها حاکی از آن است که شاخص پیشنهادی نه تنها معیاری معتبر برای سنجش نابرابری محسوب می‌شود، بلکه از طریق منحنی مرتبط، درکی گویاتر و عملی‌تر نسبت به منحنی لورنتس ارائه می‌دهد.

طبقه‌بندی *JEL*: C46، C55، D31، D63

کلید واژه‌ها: نابرابری درآمد، شاخص نابرابری بر اساس میانه، ضریب جینی، منحنی لورنتس.

۱. مقدمه

وجود نابرابری گسترده در توزیع درآمد، منجر به تشدید فقر و تعمیق شکاف طبقاتی در جامعه می‌شود. از این رو، حساسیت به نابرابری درآمدی در عرصه‌های سیاست‌گذاری و اقتصادی، ضرورت توجه دقیق به این موضوع را افزایش داده است. شاخص‌ها و معیارهای متعددی برای سنجش نابرابری درآمد معرفی شده‌اند که برخی از آنها بر اساس نسبت میانگین درآمد گروه‌های کم‌درآمد به پردرآمد تعریف می‌شوند. با این حال، در مواجهه با داده‌های درآمدی که اغلب دارای مقادیر فرین و توزیع‌های چوله هستند، تکیه‌ی صرف بر شاخص‌های مبتنی بر میانگین می‌تواند نامناسب باشد. برای مقابله با این چالش، پیشنهاد می‌شود که در طراحی شاخص‌های نابرابری، به جای میانگین از معیار میانه استفاده شود، چرا که میانه به عنوان معیاری قوی‌تر، کمتر تحت تأثیر داده‌های پرت قرار گرفته و درک واقع‌بینانه‌تری از نابرابری درآمدی ارائه می‌دهد. این ویژگی به‌ویژه در توزیع‌های نامتقارن و چوله، که در داده‌های درآمدی رایج هستند، مزیت قابل‌توجهی محسوب می‌شود.

درک نابرابری درآمدی به‌طور اساسی بر مفهوم چندک‌ها متکی است. چندک‌ها در واقع نقاط برش در یک مجموعه‌داده هستند که جامعه را بر اساس موقعیت افراد در توزیع درآمد به گروه‌های مجزا تقسیم می‌کنند. مقدار p-چندک یک مجموعه داده یک مقدار x_p است که نقطه‌ای را مشخص می‌کند که در آن $p \times 100\%$ از داده‌ها کمتر یا مساوی آن مقدار قرار می‌گیرند. بسیاری از معیارهای نابرابری درآمد از این چندک‌ها برای مقایسه سطوح درآمد گروه های مختلف در یک جمعیت استفاده می کنند (وارکی و هاریداس[۱]، ۲۰۲۳ و نایر[۲] و همکاران، ۲۰۱۳). این شاخص‌ها به دلیل قابلیت تفسیر آسان و مقاومت در برابر مقادیر پرت، به‌طور گسترده در مطالعات نابرابری مورد استفاده قرار می‌گیرند. با تحلیل نسبت‌های بین مقادیر چندکی مختلف (مانند دهکی یا صدکی) در توزیع درآمد، می‌توان چگونگی توزیع درآمد را

[1]. Varkey and Haridas
[2]. Nair

ارزیابی کرد (کوبهام[1] و همکاران، ۲۰۱۶). هرچه این نسـبت بزرگ‌تر باشـد، نشـان‌دهنده اختلاف بیشتر بین گروه‌های پردرآمد و کم‌درآمد بوده و بیانگر سطح بالاتری از نابرابری درآمد است.
اغلب شـــاخص‌های نابرابری مبتنی بر مقایســـه میانگین یا مجموع درآمد گروه‌های کم درآمد نسبت به کل درآمد افراد جامعه بنا نهاده شده‌اند (کلیبر و کاتز[2]، ۲۰۰۳). این بینشی را در مورد این‌که چه مقدار از ثروت جامعه در اختیار افرادی با درآمد کمتر متمرکز شـده اسـت، ارائه می دهد. لورنتس[3] (۱۹۰۵)، تابع لورنتس را بر اساس نسبت کل درآمد کسب شده توسط افراد زیر سـطح درآمد معین x_p را به کل درآمد افراد جامعه تعریف نمود. بنفرونی[4] (۱۹۳۲) به طور خاص معیاری مبتنی بر نسـبت متوسـط درآمد افراد زیر آسـتانه درآمد x_p به متوسـط درآمد کل جمعیت معرفی نمود. زنگا[5] (۲۰۰۷) در پژوهش خود، جامعه را بر اســاس ســطح درآمدی خاص x_p به دو گروه طبقه بندی کرد. سپس تابع زنگا را معرفی نمود که نابرابری را با مقایسه میانگین درآمد افرادی که کمتر از x_p درآمد دارند با میانگین درآمد افرادی که بیش از x_p درآمد دارند، اندازه گیری می کند. این تابع اســاســاً منعکس کننده شـکاف درآمدی بین این دو گروه است.
با این حال، هنگام برخورد با داده‌های درآمدی که اغلب مقادیر فرین و توزیع‌های چوله را نشان می‌دهند، تنها تکیه بر شـــاخص تمرکز میانگین می‌تواند گمراه‌کننده باشـــد. برای مقابله با این چالش، پژوهشـــگران پیشـــنهاد می‌کنند که به جای آن از معیار گرایش به مرکز میانه اســـتفاده شـــود، زیرا معیار قوی‌تری ارائه می‌کند که کمتر تحت تأثیر داده‌های پرت قرار می‌گیرد. میانه، که یک شـــاخص پایدارتر از معیارهای گرایش به مرکز در توزیع های کج و چوله اســـت، درک عمیق تری از اختلاف درآمد ارائه می دهد. در حوزه ســـنجش نابرابری درآمد، گاســـتویرث[6] در ســـال ۲۰۱۴ رویکردی نوآورانه را با پیشـــنهاد جایگزینی میانگین با میانه برای تعدیل شـــاخص تفاوت میانگین جینی مطرح کرد. این تعدیل، اگرچه به طور بالقوه مفید اســـت، اما منجر به

[1]. Cobham
[2]. Kleiber and Kotz
[3]. Lorenz
[4]. Bonferroni
[5]. Zenga
[6]. Gastwirth

معیاری می‌شود که با تعریف استاندارد یک شاخص بهنجار با مقادیری بین صفر و یک، مطابقت ندارد. این موضوع به این دلیل به وجود می آید که این شاخص میانگین درآمد فقرا را با معیار میانه درآمد کل افراد جامعه مقایسه می کند.

بر اساس پژوهش زنگا (۲۰۰۷) و مزایای استفاده از میانه، یک شاخص نابرابری درآمد جدید را می توان با مقایســـه میانه درآمد بخش پایین تر جامعه با میانه درآمد بخش بالاتر آن جامعه تعریف نمود. این رویکرد نمایش دقیق‌تری از نابرابری درآمد ارائه می‌دهد، به‌ویژه در شـــرایطی که معیارهای سنتی مبتنی بر میانگین ممکن است تصویر دقیقی از نابرابری جامعه ارائه ندهند (میرزائی و همکاران، ۲۰۱۸).

این پژوهش یک معیار جدید نابرابری درآمد را معرفی می‌کند که از نســـبت میانه‌های پایین و بالای درآمد افراد جامعه استفاده می‌کند. پژوهش حاضر با تشریح تعریف کلاسیک این شاخص و منحنی مرتبط با آن آغاز می‌شود. سپس به ویژگی‌های اساسی می‌پردازد که یک شاخص نابرابری باید داشته باشد. یک برآوردگر سازگار برای این شاخص پیشنهاد شده و رفتار مجانبی آن تحلیل می‌شود. همچنین مفهوم ترتیب‌های تصادفی بر اساس این منحنی جدید معرفی می شـــود. در نهایت، پژوهش عملکرد این شـــاخص و منحنی متناظر با آن را در مقایســـه با ســـایر شـاخص‌ها و منحنی‌های نابرابری رایج، با شـــبیه ســازی و ســـپس در مواجهه با داده‌های درآمد واقعی ارزیابی می‌کند.

۲. مبانی نظری پژوهش

در این بخش ضمن تعریف شاخص نابرابری جدید و منحنی متناظر با آن، اصول حاکم بر شاخص نابرابری، ترتیب تصادفی، توزیع تجربی شاخص و رفتار مجانبی آن بررسی می‌شود.

۲-۱. تعریف شاخص نابرابری جدید

فرض کنید متغیر تصادفی X با تابع توزیع تجمعی F باشد. تابع چندک آن به صورت

$$F_X^{-1}(p) = inf\{ x; F_X(x) \geq p\}, 0 \leq p \leq 1. \quad (۱)$$

تعریف می شود. در این پژوهش، میانه درآمد افراد زیر چندک $F_X^{-1}(p)$ با میانه درآمد افراد بالاتر از چندک $F_X^{-1}(p)$ مقایسه می‌شود. با این دیدگاه می‌توان شاخص جدید را بر اساس نسبت دو چندک به صورت ذیل

$$I_X(p) = \frac{F_X^{-1}(0.5p)}{F_X^{-1}(0.5(1+p))}, 0 \le p \le 1. \qquad (۲)$$

تعریف نمود. معیار $I_X(p)$ نسبتی بین میانه های جزئی پایین و بالایی درآمد است، مفهوم شهودی $I_X(p)$ بسیار ساده است. علاوه بر این، زمانی که همه مقادیر درآمد برابر هستند، مقدار شاخص نابرابری درآمد باید صفر باشد. بنابراین، مقدار اندازه شاخص باید به صورت ذیل تعریف شود:

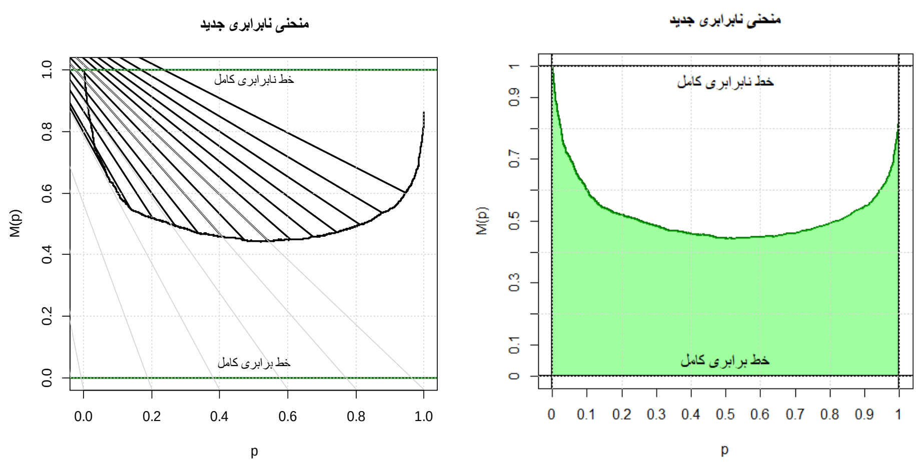
$$\begin{aligned} M_X(p) &= 1 - I_X(p), \qquad 0 \le p \le 1 \\ &= 1 - \frac{F_X^{-1}(0.5p)}{F_X^{-1}(0.5(1+p))}. \end{aligned} \qquad (۳)$$

این شاخص در حالت برابری کامل مقدار صفر و در حالت نابرابری کامل مقدار یک را می‌گیرد. با میانگین گرفتن از نقاط $M_X(p)$ شاخص نابرابری جدید M به دست می‌آید. شاخص جدید به منحنی نابرابری جدید مرتبط است که با ترسیم نقاط $(p, M_X(p))$ به دست می‌آید. الگویی از این منحنی در شکل ۱ نشان داده شده است. علاوه بر این، در حالتی که متغیر تصادفی درآمد پیوسته باشد به راحتی می توان گفت:

$$M = \int_0^1 M_X(p) dp, \qquad (۴)$$

اگر همه اعضای جامعه درآمد یکسانی داشته باشند، منحنی نابرابری با خط کامل برابری منطبق است. در این حالت، منحنی نقاط (۱,۰)، (۰,۰) و (۰,۱) را در محور مختصات به هم متصل می کند. علاوه بر این، همچنین می توان گفت که مقدار شاخص نابرابری جدید برابر است با مساحت بین منحنی نابرابری و خط برابری کامل (همانطور که در سمت راست شکل ۱ نشان داده شده است).

شکل(۱): الگویی از منحنی نابرابری جدید مبتنی بر میانه



منبع: یافته پژوهش با نرم افزار R

۲-۲. اصول حاکم بر شاخص‌های نابرابری

هنگام ارزیابی شاخص‌های نابرابری درآمد، ارزیابی ویژگی‌های آن‌ها برای تعیین مناسب بودن این معیارها برای اندازه‌گیری نابرابری درآمد بسیار مهم است. این ویژگی‌ها که به عنوان اصول حاکم بر شاخص‌های نابرابری شناخته می شوند، به عنوان راهنمای یک شاخص نابرابری خوب عمل می کنند. هر چه یک شاخص اصول بیشتری را رعایت کند، قابل اعتمادتر است. در اینجا خلاصه ای از اصول حاکم بر شاخص‌های نابرابری آورده شده است:

- **بهنجارسازی**

شاخص نابرابری باید مقادیر بین صفر و یک را اختیار کند و امکان مقایسه و تفسیر آسان را فراهم نماید که در آن صفر حالت برابری کامل و یک حالت نابرابری کامل را نشان می‌دهد.

- **قابلیت تفسیر و شهودی بودن**

معیار نابرابری درآمد باید دارای یک معنای مفهومی روشن و قابل فهم باشد، به طوری که نه تنها پژوهشگران، بلکه سیاست‌گذاران و عموم مردم نیز بتوانند آن را درک کنند.

- **عدم حساسیت به تکثیر جامعه**

اگر جامعه‌ای با همان توزیع درآمدی دقیقاً تکثیر شود، شاخص نابرابری باید بدون تغییر باقی بماند.

- **تقارن**

مقدار شاخص نابرابری باید تنها به مقادیر درآمدها وابسته باشد و نه به هویت افراد. به عبارت دیگر، اگر جایگاه درآمدی دو فرد در توزیع درآمد جامعه عوض شود، شاخص نابرابری نباید تغییر کند، چرا که این شاخص‌ها باید نسبت به جایگشت افراد بی‌تفاوت باشند.

- **پایایی مقیاس**

اگر درآمد همه افراد جامعه در ضریب ثابت ضرب شود، مقدار شاخص نابرابری باید بدون تغییر باقی بماند.

- **تجزیه‌پذیری**

اگر جامعه به گروه‌هایی تقسیم شود، نابرابری کلی باید ترکیبی از نابرابری‌های درون هر گروه باشد و امکان تحلیل در سطوح مختلف را فراهم کند.

- **خاصیت پیگو-دالتون**

انتقال درآمد از یک فرد ثروتمندتر به یک فرد فقیرتر (بدون تغییر موقعیت نسبی آن‌ها) باید میزان شاخص نابرابری را کاهش دهد که نشان دهنده کاهش نابرابری است.

این بخش بر اصول کلیدی که بر اثربخشی شاخص‌های نابرابری درآمدی حاکم است، تمرکز دارد. ما ویژگی‌های خاصی مانند بهنجاری‌سازی، پایایی مقیاس، حساسیت به انتقال یکنواخت و خاصیت پیگو-دالتون را بررسی خواهیم کرد. با رعایت این اصول، شاخص‌های نابرابری درآمدی قابل اعتمادتر می‌شوند و تصویر واضح‌تری از تفاوت‌های درآمدی در یک جامعه ارائه می‌دهند.

گزاره ۱: فرض کنید X متغیر تصادفی نابرابری درآمد با امید ریاضی متناهی و مثبت و نیز شاخص نابرابری M باشد. در اینصورت M دارای خاصیت بهنجارسازی است.

اثبات: با توجه به خاصیت چندک‌ها داریم:

$$0 \leq F_X^{-1}(0.5p) \leq F_X^{-1}(0.5(1+p)) \tag{۵}$$

$$0 \leq \frac{F_X^{-1}(0.5p)}{F_X^{-1}(0.5(1+p))} \leq 1, \tag{۶}$$

$$0 \leq 1 - \frac{F_X^{-1}(0.5p)}{F_X^{-1}(0.5(1+p))} \leq 1. \tag{۷}$$

مشاهده می‌شود که مقدار منحنی نابرابری جدید همیشه بین صفر و یک قرار دارد و مقدار شاخص نیز که از انتگرال منحنی بر بازه صفر و یک حاصل می‌شود نیز دارای این ویژگی است. بنابراین شاخص نابرابری جدید و منحنی متناظرش دارای ویژگی مهم اصل بهنجارسازی است.□

گزاره ۲: فرض کنید X متغیر تصادفی نابرابری درآمد با امید ریاضی متناهی و مثبت و نیز منحنی نابرابری $M_X(p)$ باشد. در اینصورت شاخص نابرابری و منحنی متناظرش دارای خاصیت پایایی مقیاس است.

اثبات: فرض کنید متغیر درآمد X در ضریب ثابت a ضرب شود یعنی $Y = aX$ برای هر $a > 0$ باشد در این‌صورت منحنی نابرابری Y عبارت است از:

$$
\begin{aligned}
M_Y(p) &= 1 - \frac{F_Y^{-1}(0.5p)}{F_Y^{-1}(0.5(1+p))} \\
&= 1 - \frac{aF_X^{-1}(0.5p)}{aF_X^{-1}(0.5(1+p))} \\
&= M_X(p).
\end{aligned}
\tag{۸}
$$

که نشان می‌دهد شاخص نابرابری و منحنی متناظرش دارای خاصیت پایایی مقیاس است.□

گزاره ۳: فرض کنید X متغیر تصادفی نابرابری درآمد با امید ریاضی متناهی و مثبت و نیز منحنی نابرابری جدید $M_X(p)$ باشد. در اینصورت شاخص نابرابری و منحنی متناظر با آن دارای خاصیت حساسیت به انتقال یکنواخت است.

اثبات: : فرض کنید عدد ثابت b به متغیر درآمد X افزوده شود یعنی $Y = X + \mathrm{b}$ برای هر $b > 0$ باشد و $M_X(p)$ و $M_Y(p)$ شاخص‌های نابرابری به ترتیب برای X و Y باشند نابراین داریم:

$$
\begin{aligned}
M_Y(p) &= 1 - \frac{F_Y^{-1}(0.5p)}{F_Y^{-1}(0.5(1+p))} \\
&= 1 - \frac{b + F_X^{-1}(0.5p)}{b + F_X^{-1}(0.5(1+p))} \\
&< M_X(p).
\end{aligned}
\tag{۹}
$$

بنابراین شاخص نابرابری و منحنی متناظر با آن دارای خاصیت حساسیت به انتقال یکنواخت است.□

خاصیت پیگو-دالتون بیان می کند که اگر مقداری از درآمد فرد ثروتمند به فرد فقیرتر منتقل شود، مشروط بر اینکه موقعیت فرد فقیر و ثروتمند تغییر نکند، شاخص نابرابری کاهش می یابد.

گزاره ۴: فرض کنید X متغیر تصادفی نابرابری درآمد با امید ریاضی متناهی و مثبت و نیز منحنی نابرابری جدید $M_X(p)$ باشد. در اینصورت شاخص نابرابری و منحنی متناظر با آن دارای خاصیت پیگو-دالتون است.

اثبات: فرض کنید M_X و M_Y به ترتیب شاخص های نابرابری قبل و بعد از انتقال درآمد هستند و δ مقدار درآمد منتقل شده است. کافی است نشان دهیم که:

$$M_Y(p) < M_X(p),$$

برای اثبات از روش برهان خلف استفاده می‌کنیم که در آن با فرض خلاف گزاره به تضاد منطقی رسیده و درستی ادعای اصلی نتیجه گیری می‌شود. یعنی فرض می‌کنیم

$$M_Y(p) \geq M_X(p),$$
$$1 - \frac{F_Y^{-1}(0.5p)}{F_Y^{-1}(0.5(p+1))} \geq 1 - \frac{F_X^{-1}(0.5p)}{F_X^{-1}(0.5(1+p))} \qquad (۱۰)$$

که این معادل است با:

$$F_X^{-1}(0.5p)F_Y^{-1}\big(0.5(1+p)\big) > F_Y^{-1}(0.5p)F_X^{-1}\big(0.5(1+p)\big) \qquad (۱۱)$$

اما چون همواره

$$F_X^{-1}(0.5p) \leq F_Y^{-1}(0.5p) \quad \text{و} \quad F_Y^{-1}(0.5(1+p)) \leq F_X^{-1}(0.5(1+p))$$

بنابراین به تناقض می‌رسیم پس باید $M_Y(p) < M_X(p)$ باشد و نتیجه حاصل می‌شود.

۲-۳. ترتیب‌های تصادفی بر اساس منحنی نابرابری جدید

منحنی‌های نابرابری نقش تعیین‌کننده‌ای در بحث نابرابری درآمد ایفا می‌کنند. یک نتیجه مهم و اساسی از منحنی‌های نابرابری درآمد مربوط به ترتیب‌های تصادفی براساس این منحنی‌ها

می‌باشد. ترتیب‌های تصادفی با منحنی‌های نابرابری این امکان را فراهم می‌کند که به مقایسه توزیع‌های آماری برحسب نابرابری درآمد بپردازیم. مقایسه براساس منحنی‌های نابرابری درآمد، نقش پارامترهای توزیع بر نابرابری درآمد در جامعه را بیان می‌کند. در این‌جا به مطالعه ترتیب‌های تصادفی براساس منحنی نابرابری جدید می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که این منحنی مانند سایر منحنی‌های نابرابری می‌تواند در بحث ترتیب‌های تصادفی توزیع‌های درآمد بکار گرفته شود.

در همین راستا، ابتدا مفهوم ترتیب تصادفی بر اساس منحنی نابرابری لورنتس تشریح می‌گردد که نقش پایه‌ای و کلیدی در معرفی ترتیب‌های تصادفی سایر منحنی‌های نابرابری دارد.

تعریف۱: فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی نامنفی با توابع توزیع احتمال، به ترتیب F_1 و F_2 و میانگین‌های مثبت و متناهی باشند. در این صورت گوییم X_1 در ترتیب لورنتس از X_1 کوچکتر است و آن را با $X_1 \leq_L X_2$ نشان می‌دهیم، اگر و تنها اگر

$$L_{X_1}(p) \geq L_{X_2}(p), \quad \forall p \in [0,1], \tag{۱۲}$$

که در آن $L_{X_1}(p)$ و $L_{X_2}(p)$ به ترتیب منحنی‌های لورنتس X_1 و X_2 هستند. این بدین مفهوم است که منحنی لورنتس متغیر تصادفی X_1 همواره بالای منحنی لورنتس متغیر تصادفی X_2 قرار دارد. به‌عبارت دیگر، اگر X_1 و X_2 متغیرهای درآمد در دو جامعه باشند، نابرابری در جامعه اول کمتر از نابرابری در جامعه دوم است.

اکنون به تعریف مفهوم ترتیب تصادفی براساس منحنی نابرابری جدید می‌پردازیم.

تعریف۲: فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی نامنفی با توابع توزیع احتمال، به ترتیب F_1 و F_2 و میانگین‌های مثبت و متناهی باشند. ترتیب تصادفی بر حسب منحنی جدید $(\leq_M)$ به‌صورت

$$X_1 \leq_M X_2 \Leftrightarrow M_{X_1}(p) \leq M_{X_2}(p), \quad \forall p \in (0,1], \tag{۱۳}$$

تعریف می‌شود. عبارت $X_1 \leq_M X_2$ بدین مفهوم است که منحنی نابرابری جدید متغیر تصادفی X_1 همواره پایین منحنی نابرابری جدید متغیر تصادفی X_2 قرار دارد. به‌عبارت دیگر، اگر X_1 و X_2 متغیرهای درآمد در دو جامعه به ترتیب اول و دوم باشند، آن‌گاه نابرابری در جامعه اول کمتر از نابرابری در جامعه دوم است.

۲-۴. توزیع نمونه‌ای شاخص جدید

در این بخش، به معرفی برآوردگری برای شاخص جدید می‌پردازیم. یکی از ویژگی‌های یک شاخص خوب، این است که برآوردگر مناسبی داشته باشد. پیدا کردن برآوردگر مناسب برای پارامتر توزیع جامعه همواره در استنباط آماری با چالش مواجه بوده است. یکی از ساده‌ترین روش‌ها برای یافتن برآوردگر مناسب برای شاخص نابرابری، قاعده جایگذاری است. فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی به حجم n از تابع توزیع احتمال F و $X_{1:n} \le \cdots \le X_{j:n} \le \cdots \le X_{n:n}$ آماره‌های مرتب متناظرش باشند. با استفاده از قاعده جایگذاری تابع توزیع تجربی به جای تابع توزیع احتمال می‌توان برآوردگر متناظر با شاخص جدید را به صورت

$$M_n = 1 - \frac{1}{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\frac{X_{k:n}}{X_{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+k:n}}, \qquad (۱۴)$$

تعریف نمود که در آن $\lfloor X \rfloor$ بزرگترین عدد صحیحی است که بیشتر از X نیست و $\lceil X \rceil$ کوچکترین عدد صحیحی است که کمتر از X نیست.

سازگاری برآوردگر یک مفهوم کلیدی در آمار و اقتصادسنجی است که به رفتار برآوردگر با بزرگ شدن اندازه نمونه می‌پردازد. به طور ساده، یک برآوردگر سازگار، برآوردگری است که با افزایش حجم نمونه به سمت مقدار واقعی پارامتر جامعه مورد نظر میل می‌کند.

قضیه ۱: فرض کنید متغیر تصادفی درآمد X با شاخص نابرابری درآمد M باشد در اینصورت برآورد گر آن (M_n) یک برآوردگر سازگار برای شاخص نابرابری M است.

اثبات: با استفاده از تابع توزیع تجربی $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{(X_i \le x)}$، می‌توان برآوردگرشاخص جدید و منحنی متناظر با آن را به صورت

$$M_n(p) = 1 - \frac{F_n^{-1}(0.5p)}{F_n^{-1}(0.5(1+p))}, \qquad (۱۵)$$

و

$$M = \int_0^1 1 - \frac{F_n^{-1}(0.5p)}{F_n^{-1}(0.5(1+p))} dp \qquad (۱۶)$$

بازنویسی نمود. برای هر $p \in [0, 1]$، تابع توزیع تجربی $F_n^{-1}(0.5p)$ به طور یکنواخت با احتمال یک به تابع توزیع $F_X^{-1}(0.5p)$ همگراست و نیز تابع توزیع تجربی $F_n^{-1}(0.5(1+p))$ به طور یکنواخت با احتمال یک به تابع توزیع $F_X^{-1}(0.5(1+p))$ همگراست (دیوید و ناگاراجا[1]، ۲۰۰۴ و سرفلینگ[2]، ۲۰۰۹) و چون $F_X^{-1}(0.5p) \le F_X^{-1}(0.5(1+p))$، بنا بر قضیه همگرایی مغلوب لبگ نتیجه مطلوب سازگاری برآوردگر حاصل می‌شود.□

نرمال مجانبی بودن توزیع یک برآوردگر در آمار و اقتصادسنجی حائز اهمیت است. چون اغلب استنباط‌های آماری بر اساس فرض نرمال بودن برآوردگرها استوار است، از این رو در این بخش به مطالعه توزیع مجانبی برآوردگر اندازه نابرابری مورد بحث می‌پردازیم.

قضیه ۲: فرض کنید متغیر تصادفی درآمد X با $E|X|^{2+\delta}$ متناهی به ازای مقدار $\delta > 0$ و شاخص نابرابری درآمد M باشد در این‌صورت

$$\sqrt{n}(M_n - M) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} h(x_i) + o_p(1) \qquad (۱۷)$$

که در آن $o_p(1)$ یک متغیر تصادفی است که وقتی $n \to \infty$، در احتمال به سمت صفر همگرا است و

$$h(X_i) = \int_0^{\infty} [I(X_i) - F(x)] w(F(x)) dx. \qquad (۱۸)$$

قضیه۳: فرض کنید متغیر تصادفی درآمد X با $E|X|^{2+\delta}$ متناهی به ازای مقدار $\delta > 0$ و شاخص نابرابری درآمد M باشد در این‌صورت برآوردگر به طور مجانبی نرمال است. به‌عبارتی

$$\sqrt{n}(M_n - M) \to N(0, \sigma_F^2) \qquad (۱۹)$$

که در آن

$$\sigma_F^2 = \int_0^{\infty} [\int_0^{y} F(x) w(F(x)) dx] (1 - F(y) w(F(y)) dy. \qquad (۲۰)$$

در این پژوهش، با توجه به پیچیدگی‌های تحلیلی اثبات دقیق نرمال مجانبی برآوردگر، به ارائه صورت قضیه اکتفا شده است. با این حال، با در نظر گرفتن تمرکز اصلی مطالعه بر جنبه‌های

[1]. David and Nagaraja
[2]. Serfling

کاربردی موضوع، خاصیت نرمال مجانبی به عنوان یک مفروضه پایه در نظر گرفته شده است. اثبات دقیق این ویژگی می‌تواند به عنوان زمینه‌ای برای تحقیقات آتی در حوزه تخصصی آمار استنباطی مورد بررسی قرار گیرد. با در نظر گرفتن پیچیدگی‌های تحلیلی اثبات ویژگی‌های نظری برآوردگر، در بخش بعدی از شبیه‌سازی به عنوان ابزاری ضروری برای سنجش عملکرد این برآوردگر استفاده می‌گردد. اگرچه این رویکرد جایگزین کاملی برای اثبات‌های تحلیلی محسوب نمی‌شود، اما بینش ارزشمندی در مورد قابلیت اعتماد برآوردگر ارائه می‌دهد.

۳. شبیه‌سازی و تحلیل داده‌های درآمد

کاربرد شبیه‌سازی و تحلیل داده‌های واقعی درآمد در پژوهش، نه تنها یک مزیت، بلکه یک ضرورت انکارناپذیر است. این رویکرد، چارچوبی علمی و مبتنی بر شواهد عینی فراهم می‌آورد که در آن فرضیه‌ها و مدل‌های نظری در معرض آزمونی دقیق و در شرایط نزدیک به دنیای واقعی قرار می‌گیرند. استفاده از داده‌های واقعی، پژوهش را از قلمرو انتزاع به عرصه عمل می‌آورد و اعتبار و قابلیت تعمیم یافته‌ها را به شکل چشمگیری افزایش می‌دهد. از سوی دیگر، شبیه‌سازی این امکان را به محقق می‌دهد تا سناریوهای غیرممکن یا پرهزینه را در محیطی کنترل‌شده بازآفرینی کند.

۳-۱. ارزیابی عملکرد با شبیه‌سازی

در این پژوهش، به منظور ارزیابی عملکرد عملی و مقایسه ویژگی‌های آماری شاخص نابرابری پیشنهادی با شاخص جینی متداول، یک مطالعه شبیه‌سازی مونت‌کارلو طراحی شده است. این رویکرد شبیه‌سازی، امکان بررسی رفتار برآوردگرها را در نمونه‌های با اندازه‌های مختلف فراهم می‌کند و مقایسه نظام‌مند بین برآوردگرهای جدید و کلاسیک را از طریق معیارهای کمّی نظیر اریبی(Bias)، میانگین مربع خطا (MSE)،، احتمال پوشش و ارزیابی انحراف از مفروضات نظری ممکن می‌سازد. داده‌های مورد بررسی مربوط به درآمد خانوارهای ایرانی است که در سال ۱۳۹۴ جمع آوری شده است. این داده‌ها در سایت مرکز آمار ایران قابل دستیابی است. در شبیه‌سازی آماری، برای مطالعه و بررسی بیشتر، توزیع درآمد بتای تعمیم یافته نوع ۲ (GB2) با تابع چگالی

$$f_{GB2}(x|a,b,p,q) = \frac{ax^{ap-1}}{b^{ap}B(p,q)[1+(x/b)^a]^{p+q}}, \quad x,a,b,p,q > 0, \qquad (۲۱)$$

که در آن $B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$، را به داده‌ها برازش می‌دهیم.

توزیع GB2 یک توزیع انعطاف پذیر است که بسیاری از توزیع‌های درآمد با جایگذاری مقدار خاص روی پارامترها یا حالت‌های حدی این توزیع هستند (برای مطالعه بیشتر این توزیع مک‌دونالد[1]، ۱۹۸۴ و مک‌دونالد و زو[2]، ۱۹۹۵ را ببینید). این توزیع، با برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها $\hat{a}=2.74, \hat{b}=7170.32, \hat{p}=2.52, \hat{q}=1.34$ برازش مناسبی را به داده‌های واقعی ارایه می‌دهد.

در اینجا به منظور ارزیابی و مقایسه عملکرد شاخص جدید (M) با شاخص متداول ضریب جینی (G) (برای مطالعه ضریب جینی ابونوری و اسناوندی، ۱۳۸۴ و نیز دیویدسون، ۲۰۰۹ را ببنید)، اطلاعات شبیه سازی حاصل از ۱۰۰۰۰ بار تکرار برای اندازه نمونه‌های متفاوت از توزیع GB2 برازش داده شده به داده‌ها ارائه شده است.

اطلاعات مربوط به مقایسه مقدار Bias و MSE در برآورد شاخص‌های مذکور در جدول ۱ آمده است. یافته‌های جدول نشان می‌دهند که شاخص جدید عملکرد بهتری نسبت به شاخص جینی دارد.

جدول (۱): مقایسه میزان اریبی و میانگین مربعات خطا برای ضریب جینی و شاخص جدید

	Bias		MSE	
اندازه نمونه	G	M	G	M
۱۰	۰/۰۴۰۱	۰/۰۳۷۹	۰/۰۱۰۳	۰/۰۱۰۱
۲۰	۰/۰۳۱۱	۰/۰۲۷۸	۰/۰۰۷۵	۰/۰۰۷۳
۳۰	۰/۰۲۲۷	۰/۰۱۹۵	۰/۰۰۵۳	۰/۰۰۴۸
۵۰	۰/۰۱۵۸	۰/۰۱۵۳	۰/۰۰۳۵	۰/۰۰۳۵
۱۰۰	۰/۰۰۹۸	۰/۰۰۹۱	۰/۰۰۱۹	۰/۰۰۱۷
۵۰۰	۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۱۹	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۰

منبع: یافته‌های پژوهش

همچنین در شبیه سازی ۱۰۰۰۰ بار تکرار از نمونه‌های متفاوت از توزیع برازشی در برآورد دو شاخص یاد دشده، میزان چولگی و برجستگی آنها در جدول ۲ گزارش شده است. یافته‌ها گویای

1. McDonald
2. Xu

این مطلب است که شاخص جدید از لحاظ میزان چولگی و برجستگی عملکرد بهتری نسبت به ضریب جینی دارد.

جدول (۲). مقایسه میزان چولگی و برجستگی ضریب جینی و شاخص جدید

	چولگی		برجستگی	
اندازه نمونه	G	M	G	M
۱۰	۰/۳۰۵	۰/۲۶۳	۰/۳۴۸	۰/۳۳۵
۲۰	۰/۲۷۸	۰/۱۸۵	۰/۲۶۵	۰/۲۵۸
۳۰	۰/۱۶۳	۰/۱۶۱	۰/۱۸۳	۰/۱۷۲
۵۰	۰/۱۴۲	۰/۱۲۳	۰/۱۴۱	۰/۱۳۰
۱۰۰	۰/۰۹۱	۰/۰۸۲	۰/۰۹۱	۰/۰۸۱
۵۰۰	۰/۰۶۳	۰/۰۵۹	۰/۰۶۲	۰/۰۵۸

منبع: یافته‌های پژوهش

مطالعه انواع فواصل اطمینان بوت استرپ و ارزیابی عملکرد آن‌ها در مطالعه برآوردگرهای آماری همواره مورد توجه پژوهشگران بوده است (برای مطالعه این فواصل اطمینان میلز و زند وکیلی[1]، ۱۹۹۷ را ببینید). در این جا، فواصل اطمینان نرمال-بوت استرپ و نیز تی– بوت استرپ برای برآورد شاخص‌های پژوهش حاضر براساس توزیع برازش یافته به داده‌های درآمد خانوارهای ایرانی در سال۱۳۹۴را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

میزان احتمال پوشش شاخص‌های نابرابری (فراوانی نسبی فواصل اطمینانی شامل مقدار واقعی شاخص نابرابری توزیع) در جدول ۳ با ضریب اطمینان ۹۵ درصد در ۱۰۰۰۰ بار تکرار شبیه سازی به ازای اندازه نمونه‌های متفاوت گزارش شده است.

یافته‌های جدول ۳ نشان می‌دهند که برآوردگر شاخص جدید برحسب احتمال پوشش نسبت به برآوردگر شاخص جینی عملکرد بهتری دارد.

جدول (۳): مقایسه میزان احتمال پوشش برای ضریب جینی و شاخص جدید

	نرمال- بوت استرپ		تی- بوت استرپ	
اندازه نمونه	G	M	G	M
۱۰	۰/۸۵۲	۰/۸۸۱	۰/۸۳۵	۰/۸۴۱

[1]. Mills and Zandvakili

۰/۸۸۵	۰/۸۸۳	۰/۹۲۱	۰/۹۰۹	۲۰
۰/۸۹۱	۰/۸۸۸	۰/۹۲۸	۰/۹۱۵	۳۰
۰/۹۰۳	۰/۹۰۲	۰/۹۳۵	۰/۹۲۳	۵۰
۰/۹۲۱	۰/۹۱۸	۰/۹۴۱	۰/۹۳۳	۱۰۰
۰/۹۲۶	۰/۹۲۳	۰/۹۴۵	۰/۹۳۹	۵۰۰

منبع: یافته‌های پژوهش

۳-۲. تحلیل داده‌های درآمد

هرساله در کشور نزدیک به ۴۰ هزار خانوار از جامعه شهری و روستایی به صورت نمونه تصادفی انتخاب شده و داده‌های هزینه و درآمد آن توسط ماموران مرکز آمار ایران جمع آوری می‌شود. اطلاعات خام در قالب فرمت اکسل در درگاه مرکز آمار ایران[1]، در بخش داده‌های هزینه و درآمد قابل دریافت هستند. منبع اطلاعاتی در این بخش، داده‌های هزینه و درآمد خانوار در بازه زمانی سال‌های ۱۳۹۴-۱۳۸۴ در دو بخش شهری و روستایی است. در این بخش شاخص جدید با شاخص متداول ضریب جینی برای داده‌های درآمد خانوار به تفکیک مناطق شهری و روستایی در سال‌های ۱۳۹۴-۱۳۸۴ مقایسه شده‌اند. یافته‌ها در جدول ۴ روند تغییر ضریب جینی و شاخص جدید را در محدوده زمانی یاد شده نشان می‌دهد.

جدول (۴) : تغییرات ضرائب جینی و شاخص جدید بین سال‌های ۱۳۸۴ تا ۱۳۹۴به تفکیک مناطق شهری و روستایی

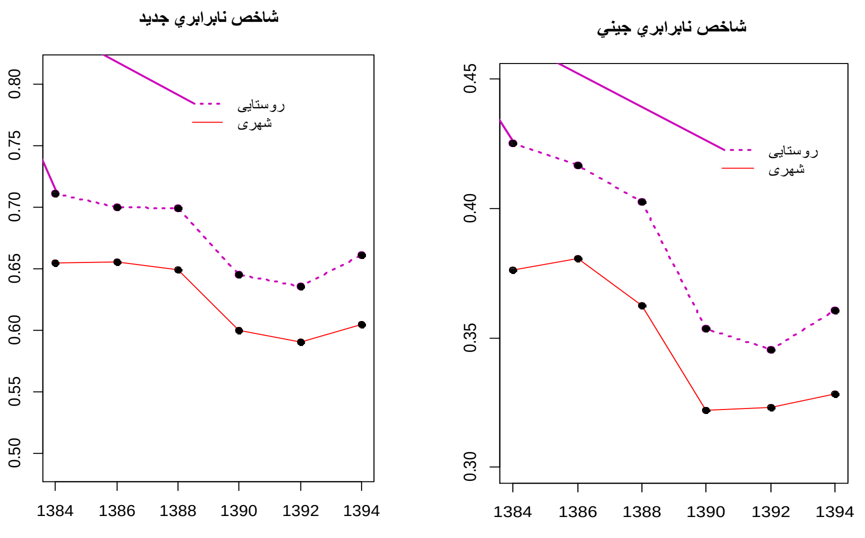
	ضریب جینی		شاخص جدید	
سال	**شهری**	**روستایی**	**شهری**	**روستایی**
۱۳۸۴	۰/۳۷۶۳	۰/۴۲۵۲	۰/۶۵۵۲	۰/۷۱۱۱
۱۳۸۶	۰/۳۸۰۶	۰/۴۱۶۷	۰/۶۵۵۴	۰/۷۰۰۵
۱۳۸۸	۰/۳۶۵۲	۰/۴۰۲۶	۰/۶۴۹۷	۰/۶۹۹۲
۱۳۹۰	۰/۳۲۲۰	۰/۳۵۳۴	۰/۶۰۰۱	۰/۶۴۵۸
۱۳۹۲	۰/۳۲۲۹	۰/۳۴۵۴	۰/۵۹۰۴	۰/۶۳۵۷
۱۳۹۴	۰/۳۲۸۴	۰/۳۶۰۵	۰/۶۰۴۷	۰/۶۶۱۵

منبع: یافته‌های پژوهش

[1]. www.sci.org

اگرچه جدول مقادیر کمّی دقیق شاخص‌ها را گزارش می‌دهد، اما نمودارها به عنوان ابزار تکمیلی، درک مفهومی و بصری داده‌ها، روند کلی و رابطه بین شاخص‌ها را تسهیل می‌نمایند. بر این اساس، اطلاعات مربوطه در قالب نمودارهای مربوطه در شکل ۲ ارائه شده‌اند.

شکل (۲): روند تغییرات ضرائب جینی و شاخص جدید بین سال‌های ۱۳۸۴ تا ۱۳۹۴



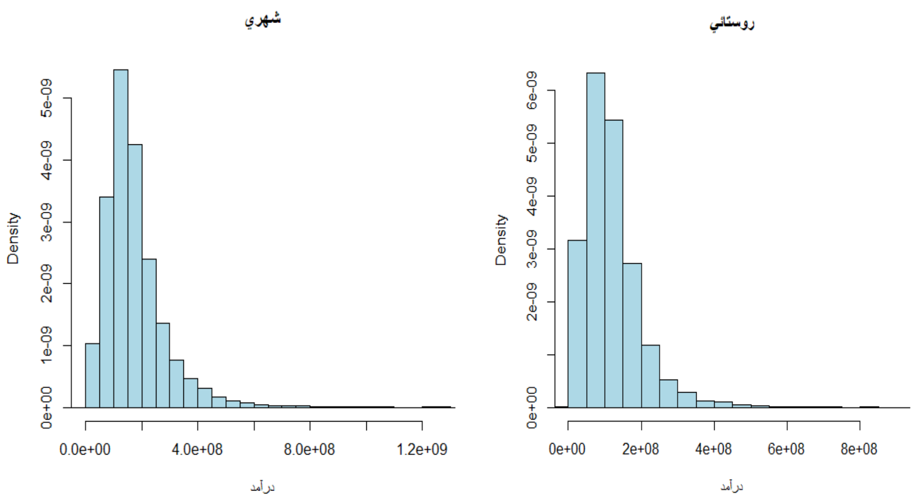
منبع: یافته‌های پژوهش

برای تحلیل بر اساس منحنی‌های نابرابری، درآمد خانوارهای شهری و روستایی را در سال ۱۳۹۲ مورد بررسی قرار می‌دهیم. نخست هیستوگرام داده‌های درآمد خانوار را به تفکیک در دو بخش شهری و روستائی مطابق شکل ۳ ترسیم می‌کنیم.

ملاحظه می‌شود که داده‌های هر دو مجموعه به شدت چوله به راست می‌باشند. برای مطالعه دقیق‌تر، اطلاعات حاصل از داده‌ها شامل مقادیر شاخص‌های نابرابری جینی و شاخص جدید و نیز مقادیر چولگی و برجستگی داده‌ها در جدول ۵ خلاصه شده‌اند.

یافته‌های جدول ۵ نیز نشان می‌دهند که میزان اختلاف بسیار زیاد ضریب چولگی و برجستگی با صفر بیانگر نامتقارن بودن و در نتیجه نرمال نبودن توزیع داده‌ها است. مقادیر این معیارها، چولگی شدید به سمت راست را تائید می‌کند.

شکل (۳): هیستوگرام داده‌های درآمد در سال ۱۳۹۲ به تفکیک مناطق شهری و روستایی



منبع: یافته‌های پژوهش

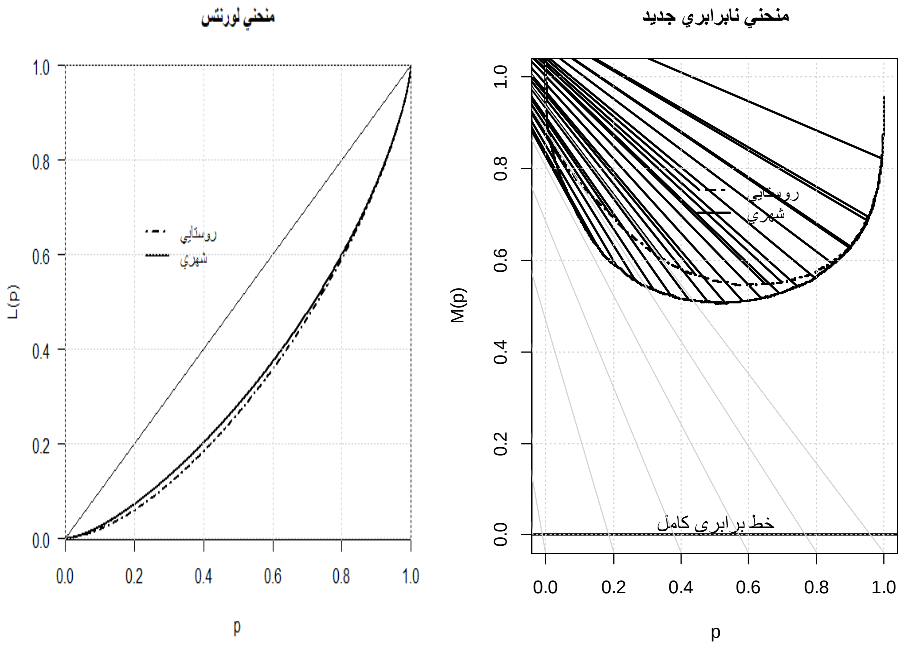
جدول (۵): مشخصه‌هائی از توزیع درآمد در سال ۱۳۹۲
به تفکیک مناطق شهری و روستایی

	ضریب جینی	شاخص جدید	چولگی	برجستگی
شهری	۰/۳۲۲۳	۰/۵۹۰۴	۵/۴۶۱۶	۸۸/۱۴۵
روستائی	۰/۳۴۵۵	۰/۶۳۵۷	۵/۷۵۰۹	۹۹/۵۸۸

منبع: یافته‌های پژوهش

برای بررسی کارائی منحنی نابرابری جدید به مقایسه آن با منحنی نابرابری لورنتس در تبیین نابرابری درآمد خانوار می‌پردازیم. برای دقت بیشتر بر مطالعه نابرابری در دو بخش شهری و روستایی منحنی‌های نابرابری لورنتس و منحنی نابرابری جدید مبتنی بر میانه را در سال ۱۳۹۲ ترسیم می‌کنیم.

شکل(۴): مقایسه نابرابری درآمد شهری و روستایی با منحنی لورنتس و منحنی نابرابری جدید در سال ۱۳۹۲



منبع: یافته‌های پژوهش

همان‌گونه که از شکل۴ مشاهده می‌شود، منحنی لورنتس نمی تواند اختلاف توزیع درآمد جامعه شهری و روستایی را در این سال به خوبی بیان کند. اما منحنی جدید نشان می‌دهد که نابرابری درآمد در مناطق روستایی به‌خصوص برای اقشار کم درآمد جامعه بیشتر از مناطق شهری است.

۴. بحث و نتیجه‌گیری

در این پژوهش یک شاخص نابرابری درآمد جدید و منحنی متناظر با آن بر اساس نسبت میانه‌های گروه‌های کم درآمد به پردرآمدتر جامعه تعریف شد. این شاخص با فهم آسان و تفسیر شهودی از اصول حاکم بر شاخص‌های نابرابری از جمله بهنجارسازی، خاصیت پیگو-دالتون، پایایی مقیاس و حساسیت به انتقال درآمد تبعیت می‌کند. ضمن ارائه یک برآوردگر

مناسب برای این شاخص، همچنین مفهوم ترتیب‌های تصادفی بر اساس منحنی نابرابری جدید تعریف شد. در مطالعه شبیه سازی، با برازش توزیع درآمد مناسب بر داده‌های واقعی درآمد، عملکرد مطلوب این معیار در مقایسه با شاخص متداول جینی تبیین گردید. در نهایت، با به‌کارگیری داده‌های درآمد خانوار مرکز آمار ایران و بکارگیری اندازه‌های نابرابری جینی و شاخص جدید و منحنی‌های متناظر با آن‌ها، نابرابری درآمد به تفکیک مناطق شهری و روستایی در بازه زمانی سال‌های ۱۳۸۴ تا ۱۳۹۴ بررسی شد. در یک نتیجه‌گیری کلی می‌توان گفت که در دوره مورد بررسی شدت نسبی نابرابری درکشور ابتدا کاهشی و سپس افزایشی بوده است. در ضمن نابرابری درآمد در مناطق شهری نسبت به مناطق روستایی کمتر بوده و توزیع یارانه نقدی موجب کاهش نابرابری درآمد درسال‌های ۱۳۸۸ تا ۱۳۹۰ شده است. قابل ذکر است که شاخص جدید همچون ضریب جینی این رویدادها را منعکس کرده است. علاوه براین، تحلیل داده‌های درآمد نشان می‌دهد که شاخص جدید به خوبی نابرابری درآمد بین افراد کم درآمد و پردرآمد را در جامعه منعکس می‌کند. همچنین تفسیرهندسی ساده‌ای داشته و تحلیل‌های آماری معتبری را به دست می دهد. منحنی متناظر با این شاخص جدید علاوه بر تفسیر هندسی شهودی دارای انعطاف و وضوح بیشتری در نمایاندن نابرابری نسبت به منحنی معروف نابرابری لورنتس می‌باشد.

تعارض منافع

تعارض منافع وجود ندارد.

References

Abounoori, E., & Asnavandi, E. (2004). Estimation and assessment of the consistency of economic inequality indicators using microdata in Iran. *Economic Research*, *71*, 171-210. (In Persian)

Bonferroni, C. (1930). Elementi di Statistica Generale .Seeber - Firenze.

Cobham, A., Schlögl, L., & Sumner, A. (2016). Inequality and the tails: the Palma proposition and ratio. *Global Policy*, *7*(1), 25-36.

David, H.A., & Nagaraja, H.N. (2004). *Order statistics*. John Wiley & Sons.

Davidson, R. (2009). Reliable inference for the Gini index. *Journal of Econometrics*, *150*, 30-40.

Gastwirth, J. L. (2014). Median-based measures of inequality: Reassessing the increase in income inequality in the US and Sweden. *Statistical Journal of the IAOS*, *30*(4), 311-320

Kämpke, T. (2010). The use of mean values vs. medians in inequality analysis. *Journal of economic and social measurement*, *35,* 43-62.

Kleiber, C., & Kotz, S. (2003). *Statistical size distributions in economics and actuarial sciences*. John Wiley & Sons.

Lorenz, M. O. (1905). Methods of measuring the concentration of wealth. *Journal of the American Statistical Association*, *9,* 209-219.

McDonald, J. B. (1984). Some generalized functions for the size distribution of income. *Econometrica*, *52*, 647–663.

McDonald, J. B. & Xu, Y. J. (1995). A generalization of the beta distribution with applications. *Journal of Econometrics*, *52*, 133-152.

Mills J. A., & Zandvakili S. (1997). Statistical inference via bootstrapping for measures of inequality. *Journal of Applied econometrics*, *12*, 133-50.

Mirzaei, S., Mohtashami, B.G. & Amini, M. (2018). The Zanga index in measuring income inequality. *Journal of Economic Modeling*, *3*(4), 113-133. (In Persian)

Nair, N. U., Sankaran, P. G., & Balakrishnan, N. (2013). *Quantile-based reliability analysis*. Springer.

Serfling, Robert J. (2009). *Approximation theorems of mathematical statistics*. John Wiley and Sons.

Varkey A., & Haridas H. N. (2023). A review on Quantile functions, Income distributions, and Income inequality measures, Reliability: *Theory & Applications*, *18*, 50-62.

Zenga, M. (2007). Inequality curve and inequality index based on the ratios between lower and upper arithmetic means, *Statistica and Applicazioni*, *5*, 3-28.