



Semnan University



Research Article

## Investigating Mathematical Modeling for Determining Concrete Pavement's Composite Foundation Reaction Modulus ( $K_{\infty}$ ) Using Regression Optimization Concretes

Mehdi Jokar<sup>a</sup>, Mohammad Mehdi Khabiri<sup>b\*</sup>, Sara Sarfaraz<sup>a</sup>, Masood Temory<sup>a</sup>

<sup>a</sup> PhD Candidate of Highway and Transportation, Faculty of Civil Engineering, Yazd University, Yazd, I. R. Iran.

<sup>b</sup> Associate Professor, Highway and Transportation, Faculty of Civil Engineering, Yazd University, Yazd, I. R. Iran.

### PAPER INFO

#### *Paper history:*

Received: 2025-08-07  
Revised: 2025-12-19  
Accepted: 2025-12-19

#### *Keywords:*

Chart-to-equation conversion,  
Nonlinear k modeling,  
Subbase thickness-modulus synergy,  
Threshold Thickness criterion,  
Slab thickness optimization.

### ABSTRACT

The composite foundation reaction modulus ( $K_{\infty}$ ) is a vital parameter in concrete pavement design, characterizing pavement-subgrade interaction behavior and directly influencing stress distribution and deformation in concrete slabs. Traditional determination methods relying on code-based design charts (Code 731 and AASHTO 1993) face data extraction challenges that limit modeling accuracy. This study develops an innovative numerical model for  $K_{\infty}$  using data extracted from these charts, assuming a semi-infinite subgrade. Primary objectives include precise chart data extraction, fitting regression models (linear, polynomial, exponential, power, logarithmic), and selecting the optimal mathematical relationship using rigorous statistical criteria. Model performance was evaluated via coefficient of determination ( $R^2$ ), adjusted  $R^2$ , standard error of estimate (SEE), and residual analysis. Results indicate that power model achieves superior statistical performance with  $R^2 = 97.41\%$  and low  $SEE = 0.1308$ , alongside optimal residual behavior, explaining  $K_{\infty}$ 's nonlinear dependence on subbase thickness, subbase elastic modulus, and subgrade soil modulus. Analysis revealed that  $K_{\infty}$  is critically influenced by: synergy between subbase thickness and elastic modulus; subbase's protective effect on subgrade, and a subbase thickness threshold condition. These mechanical interactions govern pavement-subgrade system stiffness. The research provides an efficient methodology to convert design charts into analytical equations, enhancing accuracy, reducing human error, and enabling integration into sensitivity analyses and concrete slab thickness optimization under variable subbases.

\* Corresponding author.

E-mail address: [mkhabiri@yazd.ac.ir](mailto:mkhabiri@yazd.ac.ir)

**How to cite this article:** Jokar, M., Khabiri, M. M., Sarfaraz, S. and temory, M. (2026). Mathematical Modeling for Determining Concrete Pavement's Composite Foundation Reaction Modulus ( $K_{\infty}$ ) Using Regression Optimization. *Journal of Transportation Infrastructure Engineering*, 11(4), 27-47 <https://doi.org/10.22075/jtie.2025.38579.1730>

This is an open access article under the CC-BY 4.0 license. (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)



مقاله پژوهشی

ارائه مدل ریاضی برای تعیین ضریب عکس‌العمل مرکب بستر روسازی بتنی  $K_{\infty}$  با بهینه‌یابی رگرسیونی

مهدی جوکار<sup>۱</sup>، محمدمهدی خبیری<sup>۲\*</sup>، سارا سرفراز<sup>۱</sup>، مسعود تیموری<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری راه و ترابری، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه یزد، یزد، ایران.

<sup>۲</sup> دانشیار، گروه ژئوتکنیک و راه، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه یزد، یزد، ایران.

چکیده

اطلاعات مقاله

در این پژوهش، یک روش نوآورانه برای مدل‌سازی عددی ضریب عکس‌العمل مرکب بستر  $K_{\infty}$  در روسازی‌های بتنی، با استفاده از داده‌های نمودارهای نشریه ۷۳۱ و AASHTO (1993) و با فرض نیمه‌بی‌نهایت بودن لایه بستر، ارائه شده است. هدف اصلی، استخراج دقیق داده‌ها، برازش مدل‌های رگرسیونی مختلف (خطی، چندجمله‌ای، نمایی، توانی، لگاریتمی) و انتخاب بهینه‌ترین رابطه ریاضی بر اساس معیارهای آماری بود. عملکرد مدل‌ها با ضریب تعیین ( $R^2$ )، ضریب تعیین تعدیل‌شده، خطای استاندارد برآورد (SEE) و تحلیل باقیمانده‌ها ارزیابی شد. نتایج نشان داد که مدل توانی با  $R^2$  مساوی ۹۷/۴۱ درصد و SEE مساوی ۰/۱۳۰۸ بهترین عملکرد آماری و رفتار باقیمانده‌ها را دارد. این مدل وابستگی غیرخطی  $k$  را به ضخامت زیراساس  $H_{sp}$ ، مدول زیراساس  $E_{sp}$  و مدول خاک بستر  $E_s$  تبیین می‌کند. تحلیل‌ها نشان‌دهنده تأثیر چشمگیر هم‌افزایی بین  $H_{sp}$  و  $E_{sp}$ ، اثر محافظتی لایه زیراساس بر خاک بستر و وجود شرط آستانه‌ای برای  $H_{sp}$  بر رفتار  $k$  بود. این تعاملات به‌عنوان عوامل کلیدی کنترل‌کننده سختی سیستم روسازی-بستر شناسایی شدند. این رویکرد، راهکاری کارآمد برای تبدیل نمودارهای طراحی به معادلات تحلیلی دقیق ارائه می‌دهد که دقت طراحی را افزایش داده، خطای انسانی را کاهش می‌دهد و امکان یکپارچه‌سازی در تحلیل‌های حساسیت و بهینه‌سازی ضخامت دال‌های بتنی تحت شرایط متغیر خاک‌های زیراساس را فراهم می‌کند. تحلیل شیب سطوح سه‌بعدی نشان داد که مدول خاک بستر با توان ۰/۷۳۷ بیشترین تأثیر بر ضریب  $K$  را دارد. ضخامت زیراساس (۰/۴۸۷) و مدول آن (۰/۲۳۴) به ترتیب تأثیر کمتری نشان دادند. کاربرد مدل، خطای تخمین چشمی از نمودارها را به کمتر از ۲/۵٪ کاهش داد. ماهیت برنامه‌پذیر این روش، امکان ادغام در سامانه‌های تحلیلی و ارزیابی‌های حساسیت را فراهم می‌کند.

دریافت مقاله: ۱۴۰۴/۰۵/۱۶

بازنگری مقاله: ۱۴۰۴/۰۹/۲۸

پذیرش مقاله: ۱۴۰۴/۰۹/۲۸

واژه‌های کلیدی:

تبدیل نمودار-معادله،

مدل‌سازی غیرخطی  $k$ .

هم‌افزایی ضخامت-مدول

زیراساس،

معیار آستانه‌ی ضخامت،

بهینه‌سازی ضخامت دال بتنی.

\* پست الکترونیک نویسنده مسئول: [mkhabiri@yazd.ac.ir](mailto:mkhabiri@yazd.ac.ir)

استناد به این مقاله: جوکار، مهدی، خبیری، محمدمهدی، سرفراز، سارا و تیموری، مسعود. (۱۴۰۴). ارائه مدل ریاضی برای تعیین ضریب عکس‌العمل

مرکب بستر روسازی بتنی  $K_{\infty}$  با بهینه‌یابی رگرسیونی. مهندسی زیر ساخت‌های حمل و نقل، ۱۱(۴)، ۲۷-۴۷.

## ۱. مقدمه

پارامترهای طراحی و انجام تحلیل‌های حساسیت را فراهم می‌آورند. این پژوهش، با هدف پر کردن این شکاف روش‌شناختی و با تمرکز بر داده‌های استاندارد آیین‌نامه AASHTO (۱۹۹۳)، به استخراج داده‌های کمی از نمودارهای طراحی، برازش مدل‌های رگرسیونی مختلف و در نهایت ارائه یک مدل ریاضی بهینه، دقیق و دارای توجیه فیزیکی برای ضریب عکس‌العمل مرکب بستر (K<sup>∞</sup>) می‌پردازد. مدل نهایی با هدف افزایش اتوماسیون و پایه‌گذاری یک چارچوب تحلیلی قوی برای طراحی روسازی‌های بتنی ارائه می‌شود. علاوه بر این، در راستای توسعه مدل‌های پیش‌بینی‌کننده برای پارامترهای طراحی، مطالعات متعددی صورت گرفته است. برای نمونه، پژوهش‌هایی دو مدل برای پیش‌بینی مقاومت فشاری تک محوری بستر رسی تثبیت شده با سیمان و آهک با استفاده از روش GMDH توسعه داده شد که امکان بهره‌گیری از این روش پیش‌بینی را در نرم‌افزارهای مرتبط فراهم می‌سازد (غنی‌زاده و همکاران، ۱۳۹۸). این تحقیق نیز در همین چارچوب، به ارائه روابط ریاضی برای پیش‌بینی درصد بهینه مواد تثبیت‌کننده می‌پردازد. پژوهشگران متعددی در ده سال اخیر به تبدیل نمودارهای استانداردها و آیین‌نامه‌ها به روابط ریاضی پرداخته‌اند تا استفاده از آن‌ها را در مدل‌سازی و تحلیل‌های مهندسی تسهیل کنند (دا سیلوا و همکاران، ۲۰۲۴). این تلاش‌ها به‌ویژه در حوزه‌هایی که نیازمند محاسبات دقیق و خودکار هستند، اهمیت زیادی یافته‌اند و نشان‌دهنده تغییر پارادایم از روش‌های دستی به رویکردهای محاسباتی هستند (احمد و همکاران، ۲۰۲۵). به‌عنوان مثال، در حوزه مهندسی سازه، محققان روابط ریاضی برای منحنی‌های تنش- کرنش مواد ساختمانی ارائه کرده‌اند (مندر و همکاران، ۱۹۸۸) که معمولاً در آیین‌نامه‌های مختلف به صورت نموداری ارائه می‌شوند (سلجداک و همکاران، ۲۰۲۳). این روابط به مهندسان امکان می‌دهند رفتار غیرخطی مواد را در

روسازی‌های بتنی به دلیل دوام بالا و عملکرد سازه‌ای مطلوب در پروژه‌های حیاتی کاربرد گسترده‌ای دارند (کوستا و هورتا، ۲۰۱۵). طراحی بهینه این سازه‌ها مستلزم درک دقیق رفتار دال بتنی و تعامل آن با لایه‌های زیرین است (هوانگ، ۲۰۰۴). در این میان، ضریب عکس‌العمل مرکب بستر (kc) به عنوان پارامتری کلیدی، سختی سیستم بستر را مشخص کرده و تأثیر مستقیمی بر توزیع تنش و ضخامت طراحی دال دارد (راد و وایتفیلد، ۱۹۹۰). انتخاب نادرست این ضریب می‌تواند به طرحی غیراقتصادی یا ناامن منجر شود (AASHTO، ۱۹۹۳). روش‌های متداول تعیین این ضریب، از آزمون بارگذاری صفحه‌ای (ASTM D1196) تا روش‌های غیرمخرب مانند دستگاه بارگذاری دینامیکی (FWD) و مدل‌سازی عددی اجزای محدود (FEM) را شامل می‌شوند. اگرچه هر کدام مزایایی دارند، اما با چالش‌هایی مانند هزینه بالا، وابستگی نتایج به شرایط آزمون و پیچیدگی محاسباتی مواجه هستند (AASHTO، ۲۰۰۸؛ دانکن و همکاران، ۱۹۶۸). در رویکردهای طراحی سنتی و آیین‌نامه‌ای نیز اغلب از نمودارها یا جداول برای تخمین این ضریب استفاده می‌شود. این روش‌های گرافیکی با محدودیت‌های ذاتی از جمله دقت محدود در استخراج داده، ماهیت گسسته و عدم قابلیت ادغام در فرآیندهای طراحی خودکار و محاسبات تکراری همراه هستند (بیتس، ۲۰۱۱؛ الحسینی و الراوا، ۲۰۱۸). از این رو، تبدیل اطلاعات گرافیکی به روابط ریاضی تحلیلی، گامی ضروری برای افزایش دقت، قابلیت اطمینان و کارایی طراحی محسوب می‌شود. مدل‌سازی رگرسیونی به عنوان یک روش قدرتمند آماری، این امکان را فراهم می‌آورد تا با برازش یک تابع ریاضی بر داده‌های استخراج‌شده از نمودارهای معتبر، یک معادله پیوسته و قابل برنامه‌نویسی استخراج گردد. چنین مدل‌هایی نه تنها خطای انسانی در خواندن نمودارها را حذف می‌کنند، بلکه امکان بهینه‌سازی سیستماتیک

حاصل از این روش مقایسه گردید که هم‌خوانی قابل توجهی را در روند تغییرات نشان می‌دهد و صحت نتایج تجربی را تأیید می‌کند. این مقایسه گامی در جهت اعتبارسنجی داده‌ها و کاربردی‌تر کردن یافته‌های پژوهش در طراحی مهندسی محسوب می‌شود. در نهایت، این تلاش‌ها در جهت تسهیل استفاده از استانداردها و آیین‌نامه‌ها در دنیای مدرن مهندسی و افزایش دقت و کارایی در طراحی و تحلیل سیستم‌های پیچیده مهندسی اهمیت بسزایی دارند. این رویکرد نه تنها منجر به کاهش خطاهای انسانی می‌شود، بلکه امکان تحلیل‌های پیچیده‌تر، بهینه‌سازی طراحی و پیش‌بینی‌های دقیق‌تر را فراهم می‌آورد و بدین ترتیب به نوآوری در صنعت مهندسی کمک شایانی می‌کند (تامارگوسکو و همکاران، ۲۰۲۴).

در سال‌های اخیر، با گسترش فناوری‌های محاسباتی و هوش مصنوعی، رویکردهای نوینی برای مدل‌سازی پارامترهای ژئوتکنیکی و تحلیل رفتار روسازی‌ها پدیدار شده است. به‌طور خاص، تکنیک‌های یادگیری ماشین و توسعه مدل‌های هوشمند توانسته‌اند با شناسایی الگوهای پیچیده موجود در داده‌ها، دقت پیش‌بینی‌ها را به‌طور چشمگیری افزایش دهند. برای نمونه، علی و میلاد (۲۰۲۳) در مطالعه‌ای جامع نشان دادند که مدل‌های مبتنی بر جنگل تصادفی و شبکه‌های عصبی مصنوعی می‌توانند با دقتی فراتر از روش‌های رگرسیونی سنتی، به پیش‌بینی رفتار روسازی بپردازند. در حوزه خاص تعیین ضریب عکس‌العمل بستر نیز پژوهش‌های به‌روز از پتانسیل بالای این روش‌ها حکایت دارند (مین و همکاران، ۲۰۲۳). هدف اصلی این پژوهش، توسعه یک رویکرد نظام‌مند برای مدل‌سازی عددی ضریب عکس‌العمل مرکب بستر (kc) بر اساس داده‌های استخراج شده از یک نمودار آیین‌نامه‌ای خاص است. این نمودار، که ضریب عکس‌العمل مرکب بستر را با فرض نیمه‌بی‌نهایت بودن لایه بستر تعیین می‌کند، یک منبع اطلاعاتی حیاتی در

تحلیل‌های خود در نظر بگیرند و دقت طراحی را افزایش دهند (محمد و العمودی، ۲۰۲۲). در زمینه مهندسی خاک و پی، پژوهش‌ها بر تبدیل نمودارهای مربوط به مشخصات خاک و پارامترهای مقاومتی به فرمول‌های ریاضی متمرکز شده‌اند که در طراحی پی‌ها، تحلیل پایداری شیب‌ها و مدل‌سازی رفتار روسازی کاربرد دارند (کیان و همکاران، ۲۰۱۱). همچنین، در حوزه مهندسی حمل و نقل، تلاش‌هایی برای تبدیل نمودارهای مربوط به رفتار ترافیکی و منحنی‌های عملکرد روسازی به روابط ریاضی صورت گرفته است که در برنامه‌ریزی و مدیریت سیستم‌های حمل و نقل، به‌ویژه در مدل‌های مکانیستی-تجربی، مورد استفاده قرار می‌گیرند (فون کیتوس و مولتروپ، ۲۰۰۷). روش‌های مختلفی برای این تبدیل‌ها از جمله رگرسیون خطی و غیرخطی، توابع اسپلاین و شبکه‌های عصبی مصنوعی به کار گرفته شده‌اند (کنگ و کیم، ۲۰۲۴).

هر کدام از این روش‌ها مزایا و معایب خاص خود را دارند و بسته به پیچیدگی نمودار، ماهیت داده‌ها و دقت مورد نیاز انتخاب می‌شوند (هو و سولانکی، ۲۰۲۱). به‌علاوه، برخی از پژوهش‌ها به توسعه نرم‌افزارهای تخصصی برای خودکارسازی فرآیند استخراج داده‌ها و تبدیل نمودارها به روابط ریاضی پرداخته‌اند. این ابزارها به‌طور قابل توجهی به افزایش کارایی و کاهش خطاهای انسانی در این فرآیند کمک می‌کنند و پل ارتباطی حیاتی بین داده‌های گرافیکی و محیط‌های تحلیل محاسباتی را فراهم می‌آورند (خیاط‌علی و رضایی، ۲۰۲۴). بر پایه روش ارائه شده در راهنمای فنی جنبه‌های ژئوتکنیکی روسازی‌ها (FHWA، ۲۰۰۶) مدول مرکب خاک بستر را می‌توان از رابطه‌ای مبتنی بر مقاومت فشاری تک‌محوری و سایر ویژگی‌های خاک برآورد نمود. در این رابطه، مدول مرکب تابعی از مقاومت فشاری تک‌محوری و دو ضریب تجربی است که این ضرایب به نوع خاک بستگی دارند. در این پژوهش، نتایج آزمایش‌های مقاومت فشاری تک‌محوری نمونه‌های تثبیت‌شده با مقادیر برآوردی

نشان‌دهنده سختی بستر زیرین دال بتنی است و به عنوان نسبت فشار وارده به تغییر شکل ناشی از آن تعریف می‌کند. در واقع مدل وینکلر، ضریب عکس‌العمل بستر، رفتار بستر را به صورت فنرهای الاستیک کوچک و مستقل شبیه‌سازی می‌کند. انتخاب دقیق مقدار ضریب عکس‌العمل بستر برای تحلیل صحیح تنش‌ها و تغییر شکل‌ها در دال‌های بتنی تحت بارهای ترافیکی، حیاتی است (یونیدس و همکاران، ۱۹۹۰). مقادیر ضریب عکس‌العمل بستر نه تنها به خواص خاک بستر نهایی، بلکه به مشخصات لایه‌های روسازی (مانند اساس و زیراساس دانه‌ای یا تثبیت شده) بستگی دارد و از این رو اغلب از اصطلاح "ضریب عکس‌العمل مرکب بستر" استفاده می‌شود (هوانگ، ۲۰۰۴). در آیین‌نامه‌های طراحی روسازی، مانند راهنمای طراحی روسازی AASHTO، اهمیت ضریب عکس‌العمل بستر به وضوح بیان شده است و روش‌هایی برای تعیین آن از طریق آزمون‌های میدانی (مانند آزمون صفحه بارگذاری) یا استفاده از روابط تجربی و نمودارهای طراحی ارائه شده است (AASHTO، ۱۹۹۳). عدم دقت در تعیین ضریب عکس‌العمل بستر می‌تواند منجر به خطاهای قابل توجهی در ضخامت طراحی دال بتنی شده و در نهایت بر عملکرد و عمر مفید روسازی تأثیر منفی بگذارد (گولپاس و تیتوس-گلور، ۲۰۰۷).

در بسیاری از رشته‌های مهندسی، از جمله مهندسی عمران، داده‌های ارزشمند حاصل از آزمایش‌ها، مشاهدات یا شبیه‌سازی‌ها اغلب به صورت نمودارهای گرافیکی در مقالات علمی، گزارش‌های فنی یا استانداردهای طراحی منتشر می‌شوند (جین، ۱۹۸۸). در مواردی که داده‌های خام عددی در دسترس نیستند، استخراج این داده‌ها از نمودارها به یک گام ضروری برای انجام تحلیل‌های کمی عمیق‌تر تبدیل می‌شود (پرس و همکاران، ۱۹۹۲). روش‌های مختلفی برای استخراج داده از نمودارها از تخمین بصری و دستی تا استفاده از نرم‌افزارهای تخصصی

طراحی روسازی‌های بتنی است. برای دستیابی به این هدف، پژوهش حاضر شامل مراحل کلیدی زیر است:

۱. استخراج دقیق داده‌های عددی: تبدیل اطلاعات بصری نمودار به یک مجموعه داده کمی با استفاده از روش‌های مناسب.
۲. انتخاب و برازش مدل‌های رگرسیونی کاندیدا: شناسایی چندین تابع ریاضی (مدل‌های خطی و غیرخطی) که پتانسیل توصیف رابطه بین متغیرهای نمودار را دارند.
۳. ارزیابی و انتخاب بهینه‌ترین مدل: مقایسه عملکرد مدل‌های برازش شده با استفاده از معیارهای آماری دقیق نظیر ضریب تعیین، خطای استاندارد برآورد و تحلیل باقیمانده‌ها.

نتایج این پژوهش، منجر به ارائه یک معادله ریاضی معتبر و قابل اعتماد شد که می‌تواند جایگزین نمودار آیین‌نامه‌ای شود. این امر نه تنها دقت طراحی روسازی‌های بتنی را افزایش می‌دهد و خطای انسانی در استخراج داده را کاهش می‌دهد، بلکه امکان خودکارسازی فرآیندهای طراحی و تحلیل‌های حساسیت را در نرم‌افزارهای مهندسی فراهم می‌آورد. این رویکرد، گامی مهم در جهت مدرنیزاسیون روش‌های طراحی روسازی و افزایش کارایی مهندسان عمران محسوب می‌شود.

## ۲. روش تحقیق مدل‌سازی ضریب عکس‌العمل بستر

مدل‌سازی روابط پیچیده در مهندسی عمران، به‌ویژه در حوزه روسازی‌ها، از اهمیت بسزایی برخوردار است. این روابط اغلب به صورت نمودارها یا جداول تجربی در آیین‌نامه‌ها و نشریات فنی ارائه می‌شوند که نیاز به تبدیل آن‌ها به فرمول‌های ریاضی برای کاربردهای عددی و اتوماسیون طراحی وجود دارد. طبق بیان وسترگارد ضریب عکس‌العمل بستر ( $k$ ) به عنوان یک پارامتر بنیادی در تئوری و طراحی روسازی‌های بتنی، توسط وسترگارد در اوایل قرن بیستم معرفی شد. ترازقی این پارامتر،

(مانند ناهمگنی واریانس یا عدم خطی بودن رابطه) هستند. یک مدل خوب باید باقیمانده‌هایی داشته باشد که به صورت تصادفی و بدون هیچ الگوی مشخصی در اطراف خط صفر پراکنده شده‌اند. نرمال بودن باقیمانده‌ها نیز با نمودارهای احتمال نرمال بررسی می‌شود (کوهن، ۱۹۸۸). فرآیند مدل‌سازی به صورت گام‌به‌گام و نظام‌مند به شرح زیر انجام پذیرفت:

استخراج و پالایش داده‌ها: داده‌های عددی مربوط به ضریب عکس‌العمل مرکب بستر و متغیرهای مؤثر شامل ضخامت زیراساس، مدول الاستیسیته زیراساس و مدول خاک بستر به دقت از نمودار طراحی مرجع استخراج و پالایش گردید.

انتخاب مدل‌های کاندیدا: بر اساس مشاهدات اولیه و مبانی تئوریک، هفت ساختار رگرسیونی مختلف شامل مدل‌های خطی، چندجمله‌ای (درجه ۲ و ۳)، توانی، نمایی و لگاریتمی به عنوان گزینه‌های بالقوه انتخاب شدند.

برازش مدل و تخمین پارامترها: کلیه مدل‌های منتخب روی مجموعه داده‌ها برازش و پارامترهای آنها با استفاده از روش حداقل مربعات برآورد گردید.

ارزیابی آماری و انتخاب مدل بهینه: عملکرد هر مدل با معیارهای آماری چندگانه شامل ضریب تعیین ( $R^2$ )، ضریب تعیین تعدیل شده، خطای استاندارد برآورد ( $SEE$ ) و تحلیل باقیمانده‌ها مورد سنجش قرار گرفت.

اعتبارسنجی و تحلیل حساسیت: تحلیل نمودارهای تشخیصی و شیب سطوح پاسخ، صحت و تأثیر متغیرها بر معادله ضریب عکس‌العمل مرکب بستر را کمی‌سازی کرد. شکل ۱، فلوجارت روش‌شناسی تحقیق را جهت ارائه مدل ریاضی برای تعیین  $K_{\infty}$  با بهینه‌یابی رگرسیونی نشان می‌دهد.

وجود دارد. نرم‌افزارهای رقوم‌سازی با واسنجی محورها (تعیین نقاط مرجع و مقیاس آن‌ها، شامل مقیاس‌های خطی و لگاریتمی)، امکان استخراج دقیق مختصات پیکسلی و تبدیل آن‌ها به مقادیر واقعی را فراهم می‌کنند. کیفیت تصویر ورودی (رزولوشن و نویز) و دقت در واسنجی محورها، عوامل کلیدی در صحت داده‌های استخراج شده هستند (بیتس، ۲۰۱۱). پس از استخراج داده‌های عددی، گام بعدی مدل‌سازی روابط بین متغیرها از طریق برازش منحنی یا رگرسیون است (رایس، ۲۰۰۶). هدف، یافتن یک تابع ریاضی است که بهترین نمایش را از رابطه بین متغیر مستقل (ورودی) و متغیر وابسته (خروجی) ارائه دهد. انتخاب نوع مدل (خطی، چندجمله‌ای، نمایی، لگاریتمی، توانی و غیره) معمولاً با مشاهده بصری نمودار پراکنده‌گی داده‌ها و با اتکا به دانش نظری پدیده مورد مطالعه آغاز می‌شود.

کیفیت برازش مدل‌های رگرسیونی با معیارهای آماری متعددی ارزیابی می‌شود:

ضریب تعیین ( $R^2$ ): نشان‌دهنده درصدی از واریانس متغیر وابسته است که توسط مدل توضیح داده می‌شود. مقادیر نزدیک به ۱ نشان‌دهنده برازش بهتر است (جلمن و کارلین، ۲۰۱۴).

ضریب تعیین تعدیل شده ( $R^2_{Adjusted}$ ): این معیار ضریب تعیین را بر اساس تعداد پارامترهای مدل و حجم نمونه جریمه می‌کند و برای مقایسه مدل‌هایی با تعداد پارامترهای متفاوت مفیدتر است (مونتگمری و همکاران، ۲۰۱۲). ریشه میانگین مربع خطا ( $RMSE$ ): نشان‌دهنده میانگین فاصله بین مقادیر پیش‌بینی شده توسط مدل و مقادیر واقعی مشاهده شده است. مقادیر کمتر  $RMSE$  نشان‌دهنده دقت بالاتر مدل است (مونتگمری و همکاران، ۲۰۱۲).

تحلیل باقیمانده‌ها: نمودارهای باقیمانده‌ها در برابر مقادیر پیش‌بینی شده یا متغیر مستقل، ابزارهای بصری قدرتمندی برای تشخیص نقض فرض‌های رگرسیون

## ۱-۲. استخراج و پالایش داده‌های ضریب عکس‌العمل مرکب بستر

نمودار مرجع برای تعیین ضریب عکس‌العمل مرکب بستر  $k_c$  با فرض نیمه‌بی‌نهایت بودن لایه بستر، از راهنمای طرح روسازی‌های صلب (۱۹۹۳) آشتو مطابق شکل ۲ استخراج شد. این نمودار، متغیرهای ورودی (مانند ضخامت زیراساس، مدول برجهندگی زیراساس، و مدول برجهندگی خاک بستر را به ضریب  $k_c$  در واحدهای مربوطه مرتبط می‌کند. در این مرحله لازم است که اطمینان حاصل شود تصویر از کیفیت کافی برخوردار است. وضوح پایین یا وجود نویز در تصویر می‌تواند منجر به خطا در تشخیص نقاط و تعیین دقیق مقیاس گردد. پس از رقوم‌سازی و واسنجی نمودار مرجع AASHTO (۱۹۹۳)، یک مجموعه داده متشکل از ۲۱۶ نقطه داده معتبر استخراج گردید. این داده‌ها مقادیر ضریب عکس‌العمل مرکب بستر ( $K_{\infty}$ ) را در ترکیب‌های مختلف سه پارامتر

مستقل شامل ضخامت زیراساس  $D$  در بازه ۴ تا ۱۶ اینچ، مدول الاستیسیته زیراساس در بازه ۱۰,۰۰۰ psi تا ۱,۰۰۰,۰۰۰ psi و مدول الاستیسیته خاک بستر در بازه ۱,۰۰۰ تا ۳۰,۰۰۰ پوشش می‌دهند. فرآیند پالایش و حذف نقاط پرت منجر به حذف ۱۲ داده (معادل ۵/۳ درصد از کل داده‌ها) شد و نهایتاً ۲۰۴ داده برای مدل‌سازی نهایی مورد استفاده قرار گرفت. این مجموعه داده پایه و اساس برازش تمامی مدل‌های رگرسیونی ارائه شده در این پژوهش، از جمله مدل توانی بهینه با ضریب تعیین ۰/۹۷۴۱ بوده است. فرآیند استخراج داده از نمودار شامل شناسایی دقیق نقاط مرجع کلیدی، خواندن بصری مختصات با دقت بالا و تصحیح خطای انسانی از طریق روش‌های تکرارپذیر بود.

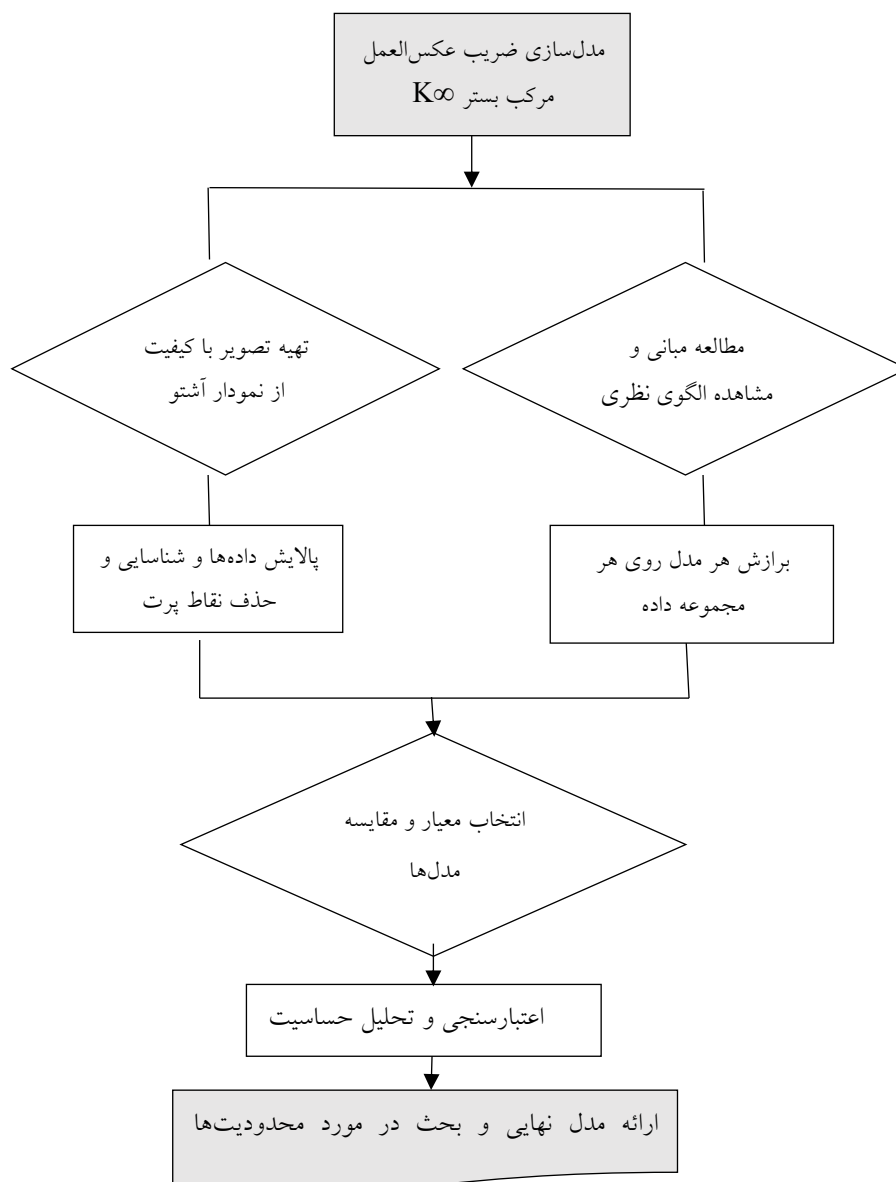
با توجه به داده‌های استخراج‌شده از نمودارها، تعداد کل نقاط داده برای توسعه مدل‌ها ۱۳۷۷ نقطه می‌باشد. مشخصات آماری این داده‌ها در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱. خلاصه‌ای از آمارهای توصیفی هر پارامتر مورد استفاده در توسعه مدل‌ها

پارامتر	انحراف معیار	میانگین	حداکثر	حداقل
$D_{sg}$ (in)	۴/۹	۱۲	۲۰	۴
$E_{SB}$ (psi)	۳۱۶,۲۲۷,۸	۲۷۴,۴۴۴,۴	۱,۰۰۰,۰۰۰	۱۵,۰۰۰
$M_{rsg}$ (psi)	۶,۸۳۱,۳	۸,۴۴۴,۴	۲۰,۰۰۰	۱,۰۰۰
$k_{\infty}$ (pci)	۴۳۰	۵۹۲	۲,۰۰۰	۶۰

مدول واکنش مرکب بستر خواهد داشت. در چنین حالتی، لایه زیراساس نقش بارزتری در جذب و انتقال بار و کاهش تنش‌های وارده به لایه‌های پایین‌دست ایفا می‌کند. با افزایش مدول ارتجاعی این لایه، تأثیر ضخامت کاهش یافته و نقش خواص مکانیکی مصالح در کنترل رفتار سازه‌ای غالب می‌شود.

پس از حذف نقاط پرت و تأیید صحت، داده‌های نهایی برای تحلیل پارامترهای مؤثر، شامل ضخامت و مدول ارتجاعی لایه زیراساس و مدول خاک بستر بر ضریب عکس‌العمل مرکب ( $K_{\infty}$ ) مورد استفاده قرار گرفت. در شرایطی که مدول ارتجاعی لایه زیراساس کم باشد، افزایش ضخامت این لایه تأثیر چشمگیرتری بر

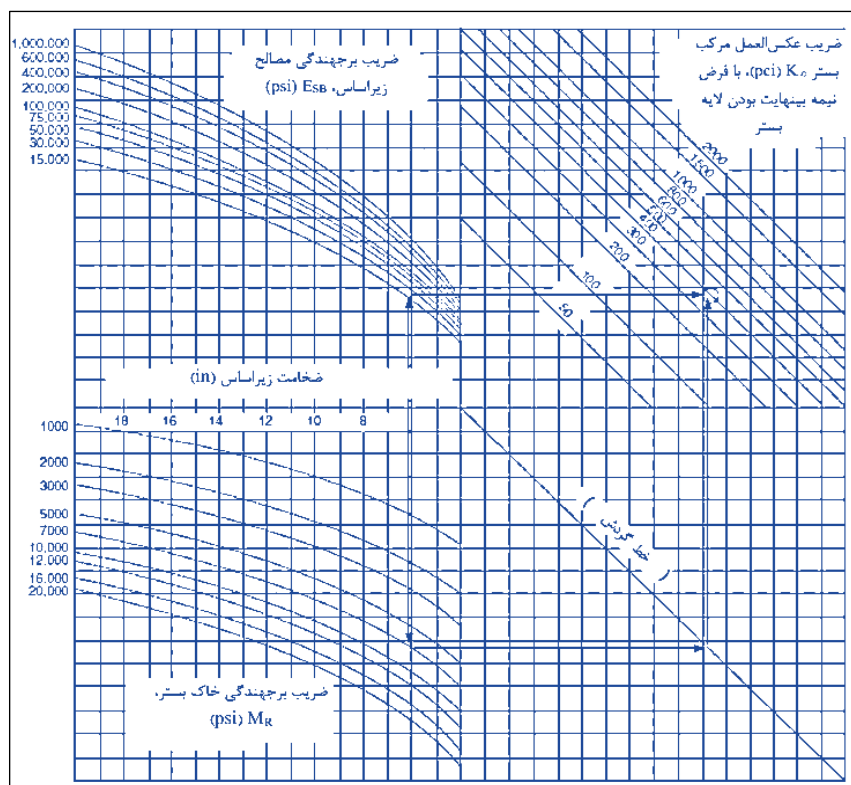


شکل ۱. فلوجارت روش تحقیق برای بهینه‌یابی رگرسیونی مدل ریاضی ضریب عکس‌العمل مرکب بستر

است و روابط متقابل آن‌ها نقش تعیین‌کننده‌ای در پاسخ نهایی سازه روسازی ایفا می‌کند. برای نمونه، تأثیر مدول ارتجاعی خاک بستر در ضخامت‌های پایین لایه زیراساس محسوس‌تر بوده و با افزایش ضخامت، حساسیت مدول واکنش بستر نسبت به این پارامتر کاهش می‌یابد. این رفتار غیرخطی و وابستگی متقابل بین متغیرها، ضرورت تحلیل هم‌زمان و چندعاملی در فرآیند طراحی و ارزیابی عملکرد روسازی‌های صلب را به‌روشنی نشان می‌دهد.

مدول ارتجاعی خاک بستر و لایه زیراساس، پارامترهای کلیدی تعیین‌کننده ضریب عکس‌العمل مرکب  $K_{\infty}$  هستند. افزایش مدول خاک بستر، سختی و ظرفیت باربری مؤثر بستر را افزایش می‌دهد. افزایش مدول زیراساس نیز  $K_{\infty}$  را بهبود می‌بخشد، اما تأثیر آن مشروط به ضخامت کافی این لایه است، زیرا در ضخامت‌های ناکافی، پتانسیل مکانیکی مصالح به‌طور کامل محقق نمی‌شود. در مجموع، اثرگذاری هر یک از این پارامترها بر مدول واکنش مرکب بستر تابعی از مقادیر سایر متغیرها





شکل ۲. نمودار تخمین ضریب عکس‌العمل مرکب بستر با فرض عمق نیمه‌بی‌نهایت زیراساس (AASHTO 1993)

## ۲-۲. مدل‌سازی ریاضی روابط بین متغیرها

پس از آماده‌سازی داده‌های عددی، گام بعدی متمرکز بر شناسایی و انتخاب توابع ریاضی مناسب برای توصیف رابطه بین متغیرهای استخراج شده بود. اولین و مهمترین گام، ترسیم نمودار پراکنندگی از داده‌های استخراج شده بود. این نمودار، الگوی بصری رابطه بین متغیرهای مستقل (ضخامت زیراساس، مدول برجهندگی زیراساس و مدول برجهندگی خاک بستر) و متغیر وابسته (ضریب  $K_c$ ) را نشان داد. مشاهده دقیق این الگوها بینش‌های اولیه‌ای را برای انتخاب مدل‌های مناسب فراهم آورد. با الهام از شکل بصری منحنی‌ها در نمودار و با توجه به دانش اولیه از ماهیت فیزیکی پدیده، مجموعه‌ای از مدل‌های ریاضی شناخته شده به عنوان گزینه‌های محتمل برای برازش انتخاب شدند. این مدل‌ها به طور عمومی شامل مدل‌های خطی، مدل‌های چندجمله‌ای (درجه ۲ و

۳)، مدل‌های نمایی، مدل‌های لگاریتمی و مدل‌های توانی بود. این انتخاب متنوع، انعطاف‌پذیری لازم را برای پوشش شکل‌های مختلف رابطه فراهم آورد، ضمن اینکه اصل سادگی و قابلیت تفسیر مدل‌ها نیز در انتخاب اولیه مد نظر قرار گرفت. برای انجام فرآیند برازش مدل‌ها و تحلیل‌های آماری، نرم‌افزار Design Expert انتخاب شد. این نرم‌افزار به دلیل قابلیت‌های قدرتمند در برازش انواع مدل‌های خطی و غیرخطی، رابط کاربری گرافیکی مناسب، و ابزارهای تحلیل آماری جامع، برای این پروژه مناسب بود.

## ۲-۳. فرایند چندمعیاره بهینه‌سازی برگزینی مدل آماری

در این مرحله، هر یک از معادلات کاندیدا به صورت کمی روی داده‌های استخراج شده برازش داده شدند.

بیش‌برازش و سهولت در تفسیر، برگزیده شد. در این پژوهش، ارزیابی عملکرد مدل‌های رگرسیونی توسعه‌یافته با به‌کارگیری مجموعه‌ای از معیارهای آماری کلیدی شامل ضریب تعیین ( $R^2$ )، ضریب تعیین تعدیل‌شده، خطای استاندارد برآورد (SEE) و تحلیل بصری باقیمانده‌ها صورت پذیرفت. این شاخص‌ها به‌طور سنتی و بر اساس استانداردهای رایج در مطالعات مشابه مهندسی (مونتگمری و همکاران، ۲۰۱۲) انتخاب شدند. مدل توانی منتخب با دارا بودن بالاترین ضریب تعیین (۹۷/۴۱ درصد) و کمترین خطای استاندارد ۰/۱۳۰۸ همراه با توزیع تصادفی و نرمال باقیمانده‌ها حول صفر (مطابق نمودارهای ۲، ۳ و ۴)، از دقت و قابلیت اطمینان بالایی در پیش‌بینی ضریب عکس‌العمل مرکب بستر برخوردار بود. همچنین، ضریب تغییرات (C.V.) بسیار پایین این مدل (۲/۰۴٪) در مقایسه با سایر مدل‌ها، به عنوان مثال، مدل درجه سه با ۱۰/۷۴ و مدل لگاریتمی با ۲۴/۵۷، همگنی واریانس و پایداری پیش‌بینی‌ها را به‌خوبی نشان می‌دهد. اگرچه معیارهای دیگری مانند میانگین مربعات خطا (MSE) می‌توانند اطلاعات تکمیلی ارائه دهند، اما مجموعه جامع شاخص‌های به‌کاررفته در این تحقیق، همراه با تحلیل‌های گرافیکی، به‌صورت کافی بر برتری آماری مدل نهایی صحنه می‌گذارند. با این وجود، در مطالعات آتی و با در دسترس بودن داده‌های آزمایشگاهی گسترده‌تر، به‌کارگیری طیف وسیع‌تری از معیارهای ارزیابی خطا برای تحلیل‌های حساسیت دقیق‌تر توصیه می‌شود.

### ۳-۱. نتایج برازش مدل‌های رگرسیونی

در پی استخراج داده‌های مورد نظر از نمودار مرجع، فرآیند برازش منحنی با بهره‌گیری از مدل‌های منتخب ریاضی به کمک نرم‌افزار به‌منظور تبیین رابطه میان متغیرهای مؤثر انجام شد. نتایج حاصل از این فرآیند در جدول ۲ ارائه گردیده است.

فرآیند برازش با استفاده از روش حداقل مربعات اجرا شد. این روش، مقادیری از پارامترها را پیدا می‌کند که مجموع مربعات باقیمانده‌ها (اختلاف بین مقادیر واقعی و پیش‌بینی شده توسط مدل) را به حداقل می‌رساند. پس از برازش هر مدل، پارامترهای بهینه شده به دست آمده مورد تحلیل قرار گرفتند. این تحلیل شامل بررسی مقادیر یک برازش خوب باید باقیمانده‌هایی را نشان دهد که به صورت تصادفی و بدون هیچ الگوی مشخصی (مانند شکل‌های S, U یا مخروطی) در اطراف خط صفر پراکنده شده‌اند. این نمودار ابزاری قدرتمند برای تشخیص نقض فرض‌های اساسی رگرسیون (مانند همگنی واریانس و خطی بودن رابطه) است. نرمال بودن باقیمانده‌ها نیز با نمودارهای احتمال نرمال بررسی شد.

### ۳. نتایج و برگزینی بهینه مدل آماری

انتخاب نهایی مدل بهینه با رویکردی چندمعیاره و با محوریت ضرایب تعیین و تعیین تعدیل‌شده انجام شد تا علاوه بر برازش مناسب، قابلیت اطمینان پیش‌بینی‌های آینده و تعادل بهینه بین دقت و پیچیدگی ساختاری تضمین گردد. علاوه بر این، خطای استاندارد برآورد (RMSE) نیز به عنوان شاخصی برای ارزیابی حداقل میانگین خطای پیش‌بینی مدل مورد توجه قرار گرفت و طبیعتاً کمترین مقدار آن مطلوب تلقی می‌شود. تحلیل باقیمانده‌ها، از منظری دیگر، اهمیت حیاتی در این فرآیند داشت؛ چرا که وجود هرگونه الگوی سیستماتیک یا ناهمگنی واریانس در نمودارهای باقیمانده‌ها، به عنوان مهم‌ترین دلیل برای رد یک مدل نامناسب در نظر گرفته می‌شود. بر همین اساس، همواره مدلی که باقیمانده‌های تصادفی و همگن‌تری داشت، انتخاب شد. در نهایت، اصل سادگی مدل نیز عاملی تعیین‌کننده است بدین معنا که در صورت تساوی یا شباهت قابل توجه در عملکرد آماری مدل‌های مختلف، آن مدلی که ساختار ساده‌تر و تعداد پارامترهای کمتری داشت، به دلیل کاهش ریسک

جدول ۲. معادلات برازش شده بر داده‌های برداشت شده از نمودار مرجع

معادله تابع	تابع برازش شده
$K=-360.14+31.66 \times D+6.93 \times 10^{-4} \times E+7.14 \times 10^{-2} \times M$	خطی
$K=-38.63+12.04 \times D-1.41 \times 10^{-4} \times E+5.02 \times 10^{-2} \times M+4.3 \times 10^{-5} \times D \times E+9.13 \times 10^{-4} \times D \times M+3.72 \times 10^{-8} \times E \times M$	2FI
$K=-305.62+25.58 \times D+8.29 \times 10^{-4} \times E+8.76 \times 10^{-2} \times M+4.3 \times 10^{-5} \times D \times E+9.13 \times 10^{-4} \times D \times M+3.72 \times 10^{-8} \times E \times M-0.564 \times D^2-1.02 \times 10^{-9} \times E^2-1.85 \times 10^{-6} \times M^2$	درجه دو
$K=-305.62+25.58 \times D+8.29 \times 10^{-4} \times E+8.76 \times 10^{-2} \times M-0.564 \times D^2-1.02 \times 10^{-9} \times E^2-1.85 \times 10^{-6} \times M^2$	درجه دو ساده شده
$K=282.19-43.74 \times D-1.06 \times 10^{-4} \times E-2.22 \times 10^{-2} \times M+1.85 \times 10^{-4} \times D \times E+9.34 \times 10^{-3} \times D \times M+2.53 \times 10^{-7} \times E \times M+1.45 \times D^2-3.47 \times 10^{-9} \times E^2+1.66 \times 10^{-6} \times M^2-1.52 \times 10^{-9} \times D \times E \times M-2.3 \times 10^{-6} \times D^2 \times E-1.28 \times 10^{-4} \times D^2 \times M-7.76 \times 10^{-11} \times D \times E^2-2.45 \times 10^{-7} \times D \times M^2-9.86 \times 10^{-14} \times E^2 \times M-5.17 \times 10^{-12} \times E \times M^2-8.4 \times 10^{-3} \times D^3+2.82 \times 10^{-15} \times E^3+2.73 \times 10^{-11} \times M^3$	درجه سه
$K=282.19-43.74 \times D-1.06 \times 10^{-4} \times E-2.22 \times 10^{-2} \times M+1.85 \times 10^{-4} \times D \times E+9.34 \times 10^{-3} \times D \times M+2.53 \times 10^{-7} \times E \times M+1.45 \times D^2-3.47 \times 10^{-9} \times E^2+1.66 \times 10^{-6} \times M^2-8.4 \times 10^{-3} \times D^3+2.82 \times 10^{-15} \times E^3+2.73 \times 10^{-11} \times M^3$	درجه سه ساده شده
$K=0.0203 \times D^{0.487} \times E^{0.234} \times M^{0.737}$	توانی
$K=115.123 \times e^{(0.0456 \times D+8.54 \times E-7 \times M+1.04 \times E \times M)}$	نمایی
$K=-6054.79+751.23 \times \text{LOG}(D)+418.063 \times \text{LOG}(E)+1050.37 \times \text{LOG}(M)$	لگاریتمی

مدول ارتجاعی خاک بستر، از پایداری عددی مطلوبی در شرایط حاشیه‌ای برخوردار نبود و در پیش‌بینی‌های برون‌نمونه با بی‌ثباتی همراه شد.

### ۳-۲. رویکرد سطح پاسخ RSM در مدل‌سازی

به منظور توسعه مدل‌های رگرسیونی چندمتغیره و تحلیل اثرات متقابل بین پارامترهای ورودی، از رویکرد سطح پاس استفاده شد. این روش، یک مجموعه تکنیک آماری-ریاضی است که برای مدل‌سازی و بهینه‌سازی فرایندها به کار می‌رود و در آن رابطه بین چندین متغیر مستقل و یک یا چند پاسخ، با یک مدل ریاضی (معمولاً یک چندجمله‌ای درجه دو) برازش می‌شود. در این پژوهش، از طراحی مرکب مرکزی به عنوان طرح آزمایشی ضمنی برای داده‌های استخراج شده از نمودار بهره گرفته شد. مدل‌های درجه دو و سه ارائه شده در جدول ۲، بر مبنای این چارچوب توسعه یافته‌اند. استفاده از RSM این امکان را فراهم آورد تا نه تنها اثرات اصلی هر متغیر، بلکه اثرات متقابل و مربعی آن‌ها بر پاسخ (ضریب  $k_c$ ) به طور همزمان مورد بررسی قرار گیرد و مدل‌هایی با قابلیت پیش‌بینی بالا در فضای پارامترهای طراحی حاصل شود.

که در آن:

$K$ : ضریب عکس‌العمل مرکب بستر (pci)

$D$ : ضخامت زیراساس

$E$ : مدول برجهندگی زیراساس

$M$ : مدول برجهندگی خاک بستر

بررسی تطبیقی مدل‌ها بر اساس اصول ژئوتکنیکی نشان داد مدل توانی به لطف ساختار ضریبی، مقیاس‌پذیری و تأکید بر نقش کلیدی مدول خاک بستر، تفسیر فیزیکی بهینه‌ای ارائه می‌دهد. در مقابل، مدل درجه‌سه با وجود تطبیق آماری بالا، به دلیل پیچیدگی ساختاری و ضعف تفسیرپذیری، برای کاربرد عملی کمتر مناسب است. در مقابل، مدل‌های ساده‌تری مانند مدل خطی و تعامل دوعاملی (2FI)، با وجود سهولت در پیاده‌سازی، به دلیل ضرایب بسیار ناچیز در عبارات تعاملی، توان بازتاب رفتارهای غیرخطی میان متغیرها را نداشتند. تحلیل مدل‌نمایی نیز نشان داد که وجود توان منفی برای پارامتر مدول ارتجاعی لایه زیراساس با منطق فیزیکی سازگار نیست، چراکه انتظار می‌رود افزایش این پارامتر منجر به افزایش ضریب عکس‌العمل شود، نه کاهش آن. همچنین، مدل لگاریتمی به واسطه ضرایب بسیار بزرگ، به‌ویژه برای

متغیرهای مستقل بر متغیر وابسته را نشان می‌دهند. در جدول ۳، جزئیات این پارامترها از جمله ضرایب تعیین، خطای استاندارد، مقادیر  $p$  و ضریب تغییرات آن‌ها برای هر مدل ارائه شده است.

در ادامه، پارامترهای برآورد شده برای هر یک از مدل‌های رگرسیونی کاندیدا که روی داده‌های استخراج شده برازش شدند، ارائه شده است. این پارامترها، اجزای کلیدی معادلات نهایی را تشکیل می‌دهند و چگونگی تأثیر

جدول ۳. پارامترهای برآورد شده مدل‌های رگرسیونی برازش شده

مدل برازش شده	R <sup>2</sup>	R <sup>2</sup> Adjusted	R <sup>2</sup> Predicted	Std. Dev	C.V. %	F-value	p-value
خطی	۰/۸۶۶۶	۰/۸۶۶۳	۰/۸۶۵۶	۲۰۳/۵۲	۲۵/۰۴	۲۹۷۲/۴۷	<۰/۰۰۰۱
2FI	۰/۹۰۰۹	۰/۹۰۰۴	۰/۸۹۸۹	۱۷۵/۶۱	۲۱/۶۰	۲۰۷۵/۰۴	<۰/۰۰۰۱
درجه دو کامل	۰/۹۳۸۶	۰/۹۳۸۲	۰/۹۲۷۲	۱۳۸/۳۲	۱۷/۰۲	۲۳۲۳/۴۸	<۰/۰۰۰۱
درجه دو ساده شده	۰/۹۰۴۳	۰/۹۰۳۹	۰/۹۰۳۲	۱۷۲/۵۱	۲۱/۲۲	۲۱۵۸/۷۲	<۰/۰۰۰۱
درجه سه	۰/۹۷۵۷	۰/۹۷۵۴	۰/۹۷۴۶	۸۷/۳۴	۱۰/۷۴	۲۹۶۸/۶۱	<۰/۰۰۰۱
درجه سه ساده شده	۰/۹۱۱۸	۰/۹۱۱۲	۰/۹۱۰۳	۱۶۵/۸۳	۲۰/۴۰	۱۵۷۰/۲۷	<۰/۰۰۰۱
توانی	۰/۹۷۴۱	۰/۹۷۴۰	۰/۹۷۳۹	۰/۱۳۰۸	۲/۰۴	۱۷۱۹۵/۰۶	<۰/۰۰۰۱
نمایی	۰/۸۲۶۴	۰/۸۲۶۰	۰/۸۲۵۲	۰/۳۳۸۴	۶/۴۲	۲۱۷۸/۰۲	<۰/۰۰۰۱
لگاریتمی	۰/۸۷۱۵	۰/۸۷۱۲	۰/۸۷۰۶	۱۹۹/۷۲	۲۴/۵۷	۳۱۰۴/۳۱	<۰/۰۰۰۱

ضریب تعیین و ضریب تعیین پیش‌بینی شده (۰/۰۰۱۱) و همچنین انحراف معیار خطای بالاتر (۸۷/۳۴)، از نظر قابلیت تعمیم‌پذیری و دقت پیش‌بینی در جایگاه پایین‌تری نسبت به مدل توانی قرار می‌گیرد. سایر مدل‌ها مانند مدل درجه دو و مدل تعامل دوعاملی (2FI)، با ضریب تعیین تعدیل‌شده کمتر از ۰/۹۴ و انحراف معیارهای خطای بالا نشان‌دهنده محدودیت قابل توجه در پیش‌بینی پارامتر مورد بررسی هستند. مدل نمایی نیز با ضریب تعیین برابر با ۰/۸۲۶۶ و ضریب تغییرات ۶/۴۲ درصد و مدل لگاریتمی با ضریب تغییرات ۲۴/۵۷ درصد، فاقد دقت و پایداری لازم برای استفاده در پیش‌بینی ضریب عکس‌العمل مرکب بستر محسوب می‌شوند.

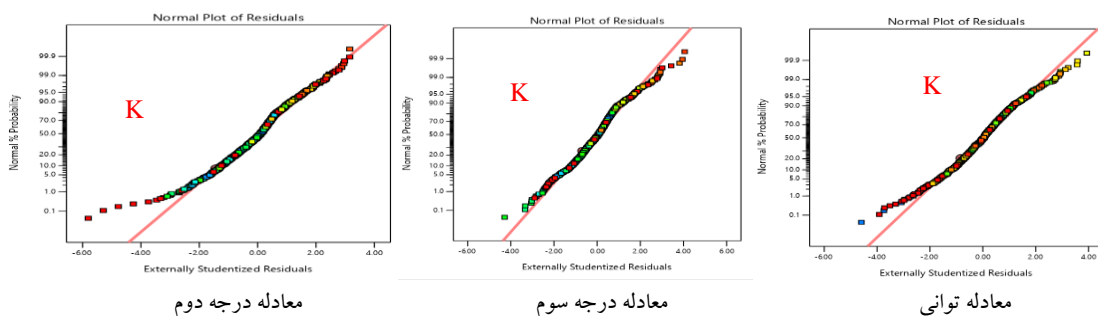
بنابراین، بر اساس ارزیابی معیارهای آماری مدل‌های رگرسیونی مدل‌های درجه سه، توانی و درجه دو کامل به‌عنوان بهترین مدل‌ها برای برازش داده‌های مورد مطالعه شناسایی شدند. این انتخاب بر اساس معیارهای کلیدی آماری شامل ضریب تعیین، ضریب تعیین تعدیل‌شده، ضریب تعیین پیش‌بینی شده، انحراف معیار باقیمانده‌ها،

شاخص‌های آماری ارائه شده در جدول ۲ نیز نشان دادند که مدل توانی نسبت به سایر مدل‌ها عملکرد به‌مراتب برتری دارد. مقدار ضریب تعیین که نشان‌دهنده نسبت واریانس داده‌های تبیین‌شده توسط مدل است، معادل ۰/۹۷۴۱ بوده و ضریب تعیین تعدیل‌شده که اثر پارامترهای اضافی را تصحیح می‌کند، برابر با ۰/۹۷۴۰ می‌باشد. این مقادیر حاکی از آن است که مدل مذکور توانسته است نزدیک به ۹۷/۴ درصد از تغییرپذیری داده‌ها را بدون اتکا به پارامترهای غیرضروری تبیین نماید. همچنین، انحراف معیار خطا بسیار پایین (۰/۱۳۰۸) و ضریب تغییرات اندک (۲/۰۴ درصد) بیانگر دقت بالای مدل در پیش‌بینی نتایج می‌باشد. اختلاف بسیار ناچیز میان ضریب تعیین و ضریب تعیین پیش‌بینی شده، که برابر با ۰/۰۰۰۲ است، نشان‌دهنده مقاومت این مدل در برابر بیش‌برازش و توان تعمیم آن به داده‌های خارج از نمونه برداشت شده است. در مقابل، مدل چندجمله‌ای درجه سوم با وجود داشتن ضریب تعیین بالاتر (۰/۹۷۵۷)، به دلیل افزایش فاصله میان

نمود. این تحلیل‌ها مبانی آماری لازم برای اعتبارسنجی و مقایسه نهایی مدل‌ها را فراهم آورد. در این نمودار، پراکندگی نزدیک و یکنواخت نقاط حول خط ۴۵ درجه نشان‌دهنده توانایی بالای مدل در پیش‌بینی دقیق داده‌هاست، در حالی که پراکندگی نامنظم یا انحراف از این خط می‌تواند به ضعف مدل در برازش داده‌ها اشاره کند. این نمودارهای تشخیصی، به‌عنوان ابزارهای کلیدی در تحلیل رگرسیون، امکان شناسایی نقض‌های احتمالی فرض‌های اساسی (نرمال بودن، همگنی واریانس و خطی بودن رابطه) و ارزیابی کیفیت کلی برازش مدل‌های درجه سه، توانی و درجه دو کامل را فراهم می‌کنند. تحلیل دقیق این نمودارها مکمل معیارهای آماری بوده و به بهبود تصمیم‌گیری در انتخاب مدل مناسب از میان این سه مدل برتر کمک می‌کند.

#### ۴-۱-۱. نمودار احتمال نرمال باقیمانده‌ها

نمودار احتمال نرمال باقیمانده‌ها ابزاری تشخیصی برای ارزیابی فرض نرمال بودن توزیع باقیمانده‌ها در مدل‌های رگرسیونی است. در این نمودار، باقیمانده‌های استاندارد شده در برابر مقادیر مورد انتظار توزیع نرمال ترسیم می‌شوند. در حالت ایده‌آل، نقاط باید به صورت تقریبی روی خط مستقیم با زاویه ۴۵ درجه قرار گیرند، که نشان‌دهنده انطباق با توزیع نرمال است. انحرافات قابل توجه از این خط، مانند الگوهای S شکل یا انحراف در دم‌ها، می‌تواند نقض فرض نرمال بودن را نشان دهد. نمودار احتمال نرمال باقیمانده‌ها برای معادلات منتخب در شکل ۳ قابل مشاهده است.



شکل ۳. نمودار احتمال نرمال باقیمانده‌ها برای معادلات منتخب

ضریب تغییرات، مقدار  $F$  و مقدار  $p$  انجام شد. مدل درجه سه بالاترین قدرت تبیین واریانس داده‌ها را نشان داد که حاکی از برازش بسیار قوی و تعمیم‌پذیری عالی است. انحراف معیار و ضریب تغییرات این مدل نیز در مقایسه با سایر مدل‌های چندجمله‌ای، دقت قابل توجهی را نشان می‌دهد. مدل توانی عملکردی بسیار نزدیک به مدل درجه سه ارائه کرد، اما با انحراف معیار بسیار پایین و ضریب تغییرات، دقت بی‌نظیری در پیش‌بینی و یکنواختی خطاها از خود نشان داد. مقدار آماره  $F$  بسیار بالای این مدل نیز تأییدکننده قدرت رابطه بین متغیرهای مستقل و پاسخ است. مدل درجه دو کامل نیز اگرچه نسبت به دو مدل دیگر ضعیف‌تر بود، اما همچنان عملکرد بهتری نسبت به سایر داشت. انحراف معیار و ضریب تغییرات این مدل نیز نشان‌دهنده دقت قابل قبول است. تمامی این مدل‌ها دارای مقدار  $p$  کمتر از  $0.001$  بودند که معناداری آماری قوی آن‌ها را تأیید می‌کند.

#### ۴. بحث در ارزیابی مدل‌ها

##### ۴-۱. کاربرد و تفسیر نمودارهای تشخیصی در مدل‌های رگرسیونی

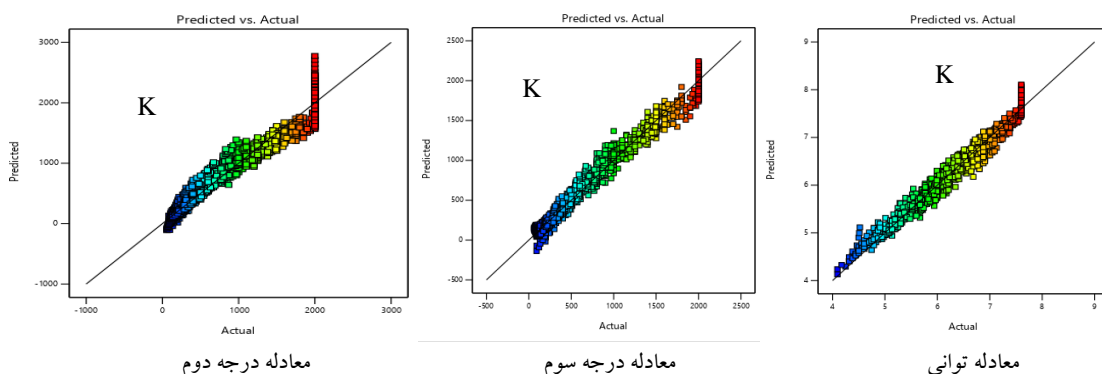
انتخاب بهینه‌ترین مدل از بین سه مدل برتر با تحلیل نمودارهای تشخیصی انجام شد. نمودار احتمال نرمال، انطباق توزیع باقیمانده‌ها با نرمال بودن را سنجید. نمودار باقیمانده‌ها در برابر مقادیر پیش‌بینی‌شده، همگنی واریانس و نبود الگوی سیستماتیک را بررسی کرد. نمودار پیش‌بینی در برابر واقعی، دقت و کارایی مدل را ارزیابی

ویژگی، نشان‌دهنده برازش برتر این مدل است. مدل درجه سه، با انطباق مناسب در بخش مرکزی نمودار، در رتبه دوم قرار می‌گیرد. انحرافات جزئی در انتهاها (الگوی S شکل خفیف) بیانگر انطباقی اندکی ضعیف‌تر نسبت به مدل توانی است. مدل درجه دو، با انحرافات برجسته‌تر در دم‌ها، ضعیف‌ترین عملکرد را در میان این سه مدل دارد و انطباق کمتری با توزیع نرمال نشان می‌دهد. بر این اساس، از منظر نمودار احتمال نرمال باقیمانده‌ها، مدل توانی به دلیل انطباق بهینه با توزیع نرمال و حداقل انحرافات، به‌عنوان مناسب‌ترین مدل برای برازش داده‌ها تأیید می‌شود.

#### ۴-۱-۲. نمودار مقادیر واقعی و پیش‌بینی شده

نمودار شکل ۴، مقادیر پیش‌بینی شده در برابر مقادیر واقعی ابزاری تشخیصی برای ارزیابی دقت پیش‌بینی مدل‌های رگرسیونی است. در این نمودار، مقادیر پیش‌بینی شده توسط مدل در برابر مقادیر واقعی داده‌ها ترسیم می‌شوند. در حالت ایده‌آل، نقاط باید به‌صورت فشرده و یکنواخت حول خط ۴۵ درجه پراکنده باشند، که نشان‌دهنده انطباق بالای مقادیر پیش‌بینی شده با مقادیر واقعی و دقت بالای مدل است. انحرافات قابل توجه از خط ۴۵ درجه یا پراکندگی نامنظم، مانند الگوهای قیفی شکل، می‌تواند به ضعف مدل در برازش داده‌ها اشاره کند. نمودار مقادیر واقعی و پیش‌بینی شده برای معادلات منتخب در شکل ۴ قابل مشاهده است.

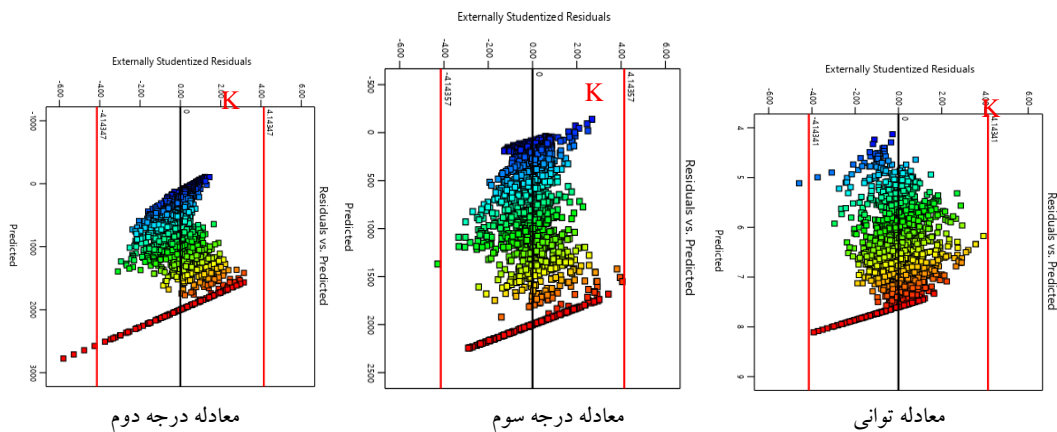
به‌منظور ارزیابی فرض‌های اساسی مدل‌های رگرسیونی برتر و مقایسه نهایی آن‌ها، نمودارهای تشخیصی مرتبط مورد تحلیل قرار گرفتند. شکل ۳، نمودار احتمال نرمال باقیمانده‌های استاندارد شده را برای سه مدل برتر (توانی، درجه سه و درجه دو) نمایش می‌دهد. در این نمودارها، محور افقی مقادیر مورد انتظار تئوریک برای یک توزیع نرمال استاندارد و محور عمودی، باقیمانده‌های استاندارد شده حاصل از هر مدل را نشان می‌دهد. انطباق نزدیک نقاط با خط راست ۱:۱ (خط نرمال ایده‌آل) دال بر توزیع نرمال باقیمانده‌ها است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، مدل توانی با دارا بودن کمترین انحراف نقاط از خط نرمال، به‌ویژه در نواحی دمایی، برقراری فرض نرمال بودن را بهتر از دو مدل دیگر تأیید می‌کند. مدل درجه سه نیز انطباق قابل قبولی نشان می‌دهد، درحالی‌که مدل درجه دو دارای انحرافات سیستماتیک (الگوی S شکل) از خط نرمال است که نشان از نقض نسبی این فرض دارد. این تحلیل گرافیکی، همراه با شاخص‌های آماری کمی، گواه دیگری بر برتری مدل توانی در برازش داده‌ها و رعایت فرض‌های بنیادی رگرسیون ارائه می‌دهد. تحلیل نمودارهای احتمال نرمال باقیمانده‌ها برای سه مدل برتر رگرسیونی نشان‌دهنده تفاوت‌های معناداری در انطباق با توزیع نرمال است. مدل توانی با پراکندگی یکنواخت و فشرده نقاط در امتداد خط ۴۵ درجه و حداقل انحراف در دم‌های توزیع، انطباقی استثنایی با توزیع نرمال را به نمایش می‌گذارد. این



شکل ۴. نمودار مقادیر واقعی و پیش‌بینی شده برای معادلات منتخب

۴-۱-۳. نمودار مقادیر پیش‌بینی شده و باقیمانده خط نمودار باقیمانده‌ها در برابر مقادیر پیش‌بینی شده ابزاری کلیدی برای ارزیابی فرض همگنی واریانس (هوموسداستیته) و فقدان الگوهای غیرخطی در مدل‌های رگرسیونی است. در نمودار شکل ۵، باقیمانده‌های مدل در برابر مقادیر پیش‌بینی شده ترسیم می‌شوند. در حالت ایده‌آل، باقیمانده‌ها باید به صورت تصادفی و یکنواخت حول خط صفر پراکنده باشند، بدون نمایش الگوهای سیستماتیک نظیر اشکال مخروطی، منحنی یا هر نوع روند مشخص وجود الگوهای غیرتصادفی یا پراکنده ناهمگن، مانند شکل کیفی، می‌تواند نقض فرض همگنی واریانس یا ناکافی بودن مدل در برازش داده‌ها را نشان دهد.

تحلیل نمودارهای مقادیر پیش‌بینی شده در برابر مقادیر واقعی نشان می‌دهد که مدل توانی با پراکنده‌ی یکنواخت و فشرده نقاط در امتداد خط ۴۵ درجه، بهترین انطباق و بالاترین دقت پیش‌بینی را در تمام دامنه داده‌ها ارائه می‌دهد. مدل درجه سه در رتبه دوم قرار می‌گیرد، اما پراکنده‌ی کیفی شکل در مقادیر بالاتر، دقت آن را محدود می‌کند. مدل درجه دو ضعیف‌ترین عملکرد را در میان این سه مدل دارد، با انحرافات برجسته‌تر و پراکنده‌ی کیفی شکل که نشان‌دهنده کاهش دقت پیش‌بینی است. بنابراین، از منظر نمودار مقادیر پیش‌بینی شده در برابر مقادیر واقعی، مدل توانی به‌عنوان مناسب‌ترین مدل برای برازش داده‌ها تأیید می‌شود.



شکل ۵. نمودار اختلاف مقادیر پیش‌بینی شده  $K$  با مقادیر مشاهداتی در انواع معادلات (برحسب Psi)

نقض آشکار فرض‌های رگرسیونی را تأیید می‌کند. بنابراین، از منظر نمودار باقیمانده‌ها در برابر مقادیر پیش‌بینی شده، مدل توانی به‌عنوان مناسب‌ترین مدل برای برازش داده‌ها تأیید می‌شود.

۴-۲. بحث و انتخاب مدل رگرسیونی منتخب با ارزیابی دقیق معیارهای عملکرد مدل شامل ضریب تعیین، ضریب تعیین تعدیل شده، ضریب تعیین پیش‌بینی شده، انحراف معیار باقیمانده‌ها و ضریب تغییرات برای ۹ مدل برازش یافته همراه با تحلیل بصری نمودارهای تشخیصی شامل نمودار احتمال نرمال

تحلیل نمودارهای باقیمانده‌ها در برابر مقادیر پیش‌بینی شده نیز نتایج مشابهی نشان می‌دهد. مدل توانی با پراکنده‌ی کاملاً تصادفی و یکنواخت باقیمانده‌ها حول خط صفر، بهترین انطباق را با فرض‌های همگنی واریانس و فقدان سوگیری غیرخطی ارائه می‌دهد. مدل درجه سه در رتبه دوم قرار می‌گیرد، اما الگوی مخروطی شکل و روند غیرخطی جزئی، نشان‌دهنده نقض نسبی فرض‌های رگرسیونی است. مدل درجه دو در این نمودار نیز ضعیف‌ترین عملکرد را در میان این سه مدل دارد که با الگوهای غیرخطی و پراکنده ناهمگن برجسته‌تر که

ضریب  $k_c$  دارد. دقت پیش‌بینی مدل توانی با انحراف معیار پایین و توزیع نرمال‌تر باقیمانده‌های تصادفی و بدون الگوی سیستماتیک تأیید شد. نمودار مقادیر واقعی در برابر مقادیر پیش‌بینی شده نیز بیانگر آن بود که در مدل توانی، نقاط داده با تراکم بیشتری در مجاورت خط همانی ( $y=x$ ) قرار دارند و انحراف کمتری از آن مشاهده می‌شود، که مؤید دقت بالاتر مدل در پیش‌بینی مقادیر  $k_c$  است. شکل نهایی معادله توانی رگرسیون شده جهت استفاده جهت مطالعات مطابق جدول ۴، قابل ارائه است.

باقیمانده‌ها، نمودار باقیمانده‌ها در برابر مقادیر پیش‌بینی شده و نمودار مقادیر واقعی در برابر مقادیر پیش‌بینی شده برای سه مدل رگرسیونی برگزیده، یافته‌های قابل توجهی به دست آمد. بر اساس این ارزیابی، مدل توانی به عنوان برترین گزینه در میان مدل‌های بررسی شده برای تبیین ضریب عکس‌العمل مرکب بستر ( $k_c$ ) در طراحی روسازی‌های بتنی تعیین گردید. این انتخاب مبتنی بر استدلال‌های زیر است:

در زمینه معیارهای عملکرد، مدل توانی در مقایسه با سایر مدل‌ها، مقادیر بالاتری برای ضریب تعیین و ضریب تعیین تعدیل شده نشان داد که دلالت بر برازش مطلوب‌تر مدل با داده‌ها و توانایی بیشتر آن در تبیین واریانس

جدول ۴. خلاصه معادلات و پارامترهای رگرسیون ضریب عکس‌العمل بستر

واحد‌ها	نماد	پارامترها	معادله/سیستم
kN/m <sup>3</sup> / pci	$K_c$	ضریب عکس‌العمل مرکب بستر	سیستم واحد آمریکایی
m / in	D	ضخامت زیراساس	$K_c=0.0203 \times D^{0.487} \times E^{0.234} \times M^{0.737}$
MPa / psi	E	مدول برجهنگی زیراساس	سیستم واحد SI
MPa / psi	M	مدول برجهنگی خاک بستر	$K_c=3890.45 \times D^{0.487} \times E^{0.234} \times M^{0.737}$

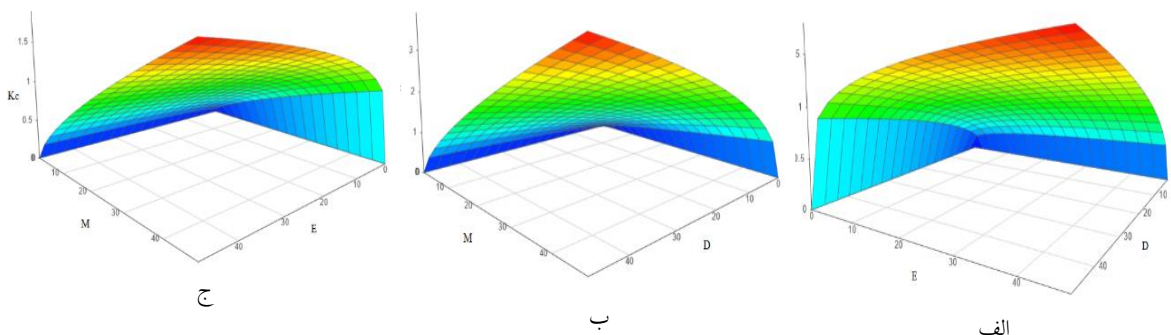
فرآیند اعتبارسنجی چندوجهی و نظام‌مند تأیید گردید. این فرآیند شامل دو محور کمی و کیفی بود: در بُعد کمی، مدل‌های کاندید با مجموعه‌ای از معیارهای آماری کلیدی شامل ضریب تعیین، ضریب تعیین تعدیل شده، ضریب تعیین پیش‌بینی، خطای استاندارد برآورد ریشه میانگین مربعات خطا و ضریب تغییرات مورد سنجش قرار گرفتند. هم‌گرایی قابل توجه مقادیر  $R^2$  و  $R^2$  پیش‌بینی - شده (۰/۹۷۳۹) برای مدل توانی، همراه با پایین‌ترین مقادیر، SEE، ۰/۱۳۰۸ و C.V، ۰/۲/۴، قدرت پیش‌بینی برتر و مقاومت آن در برابر پدیده بیش‌برازش را به وضوح نشان داد. رفتار تصادفی و توزیع نرمال باقیمانده‌ها حول صفر در مدل توانی، همراه با تراکم بسیار بالای نقاط حول خط ۴۵ درجه در نمودار واقعی-پیش‌بینی، مؤید رعایت

در مجموع، با در نظر گرفتن توأمان عملکرد مدل بر اساس معیارهای کمی و ارزیابی کیفی نمودارهای تشخیصی، مدل توانی به‌طور معناداری عملکرد بهتری نسبت به سایر مدل‌ها از خود نشان داد و به‌عنوان مناسب‌ترین مدل برای تبیین روابط موجود در داده‌های ضریب  $k_c$  و انجام پیش‌بینی‌های دقیق‌تر در طراحی روسازی‌های بتنی پیشنهاد می‌گردد. این مدل با ارائه رابطه‌ای پیوسته و قابل برنامه‌نویسی، امکان خودکارسازی فرآیندهای طراحی و افزایش کارایی مهندسی را فراهم می‌آورد. برای بهبود بیشتر، تحلیل داده‌های پرت یا بررسی تبدیل‌های اضافی توصیه می‌شود. انتخاب نهایی مدل توانی به‌عنوان بهینه‌ترین رابطه، صرفاً بر اساس ضریب تعیین بالا صورت نگرفت، بلکه از طریق یک



برجهندگی خاک بستر (M) با ضریب عکس‌العمل مرکب بستر (K)، تحلیل بصری با بهره‌گیری از نمودارهای سه‌بعدی مطابق شکل ۶ انجام شد. این نمودارها امکان تجسم تعاملات پیچیده میان متغیرها را فراهم کرده و رفتار مدل توانی را در شرایط مختلف به صورت شهودی نمایش می‌دهند.

فرض‌های اساسی رگرسیون و دقت بی‌نظیر این مدل بود. این رویکرد ترکیبی، که بر مبنای چارچوب‌های استاندارد تحلیل رگرسیون بنا نهاده شده، اطمینان جامعی از صحت‌سنجی درونی و قابلیت اطمینان مدل نهایی برای استفاده در طراحی‌های مهندسی فراهم می‌آورد. به منظور بررسی دقیق روابط بین متغیرهای ورودی شامل ضخامت زیراساس (D)، مدول برجهندگی زیراساس (E)، و مدول



شکل ۶. نمودارهای سه‌بعدی ضریب عکس‌العمل مرکب بستر بر حسب متغیرهای ورودی در مدل توانی: الف) ضخامت زیراساس-مدول برجهندگی زیراساس، ب) ضخامت زیراساس-مدول برجهندگی خاک بستر و ج) مدول برجهندگی زیراساس-مدول برجهندگی خاک بستر

بود، حداکثر خطای مطلق نسبی پیش‌بینی در داده‌های مورد مطالعه به ۲/۵ درصد محدود گردید. این میزان خطا، دقت بسیار بالای مدل را در تبدیل نمودارهای طراحی به معادلات تحلیلی تأیید می‌کند و گامی مهم در کاهش خطاهای انسانی ناشی از قرائت چشمی برمی‌دارد. تحلیل حساسیت مدل نیز نشان داد که این دقت بالا در گستره وسیعی از مقادیر متغیرهای ورودی (ضخامت زیراساس، مدول زیراساس و مدول خاک بستر) پایدار باقی می‌ماند. این یافته با توان بالاتر مدول برجهندگی خاک بستر (۰/۷۳۷) در معادله مدل توانی تأیید می‌شود. در مقایسه، ضخامت زیراساس (D) با توان ۰/۴۸۷ تأثیر قابل توجه اما کمتری نسبت به مدول برجهندگی خاک بستر دارد، و مدول برجهندگی زیراساس (E) با توان ۰/۲۳۴ کمترین تأثیر را بر ضریب عکس‌العمل مرکب بستر (K) نشان داد.

با تحلیل نمودارهای سه‌بعدی ضریب عکس‌العمل مرکب بستر (K) بر حسب جفت‌های متغیرهای ضخامت زیراساس (D)، مدول برجهندگی زیراساس (E)، و مدول برجهندگی خاک بستر (M)، با استفاده از معادله مدل توانی نتایج زیر به دست آمد: نتایج نشان داد که افزایش مقادیر هر یک از متغیرهای ضخامت زیراساس (D)، مدول برجهندگی زیراساس (E)، و مدول برجهندگی خاک بستر (M) با افزایش ضریب عکس‌العمل مرکب بستر (K) رابطه‌ای مستقیم و مثبت دارد. این رفتار با توان‌های مثبت متغیرها در معادله مدل توانی (۰/۴۸۷) برای ضخامت زیراساس، ۰/۲۳۴ برای مدول برجهندگی زیراساس و ۰/۷۳۷ برای مدول برجهندگی خاک بستر) کاملاً همخوان است. برای مدل توانی برگزیده که از بالاترین ضریب تعیین ۹۷/۴۱ و پایین‌ترین خطای استاندارد برآورد ۰/۱۳۰۸ برخوردار

## ۵. نتیجه گیری

پژوهش حاضر با هدف توسعه‌ی یک مدل ریاضی دقیق جهت برآورد ضریب عکس‌العمل مرکب بستر به‌عنوان یکی از پارامترهای کلیدی در طراحی سازه‌ای روسازی‌های بتنی انجام پذیرفت. نتایج حاصل نشان داد که مدل توانی در مقایسه با سایر مدل‌های رگرسیونی، عملکرد به‌مراتب برتری در تبیین رفتار این پارامتر دارد. این مدل با توانایی توضیح بیش از ۹۷ درصد از پراکندگی داده‌های استخراج‌شده از نمودار مرجع آیین‌نامه‌ای منتشرشده در سال ۱۹۹۳ توسط سازمان راه‌سازی ایالات متحده، بالاترین سطح انطباق با داده‌های تجربی را ارائه داد. مقدار کم انحراف معیار خطای پیش‌بینی و ضریب تغییرات کمتر از ۲/۱ درصد، مؤید دقت بالای مدل در تخمین مقادیر ضریب عکس‌العمل مرکب بستر است. لازم به توضیح است که اگرچه روش‌های پیشرفته‌تری مانند برنامه‌ریزی بیان ژن از توانایی بالقوه بالایی برای مدل‌سازی روابط غیرخطی پیچیده برخوردارند، اما هدف اصلی و دستاورد کلیدی این پژوهش، توسعه یک مدل ریاضی بهینه با ساختاری ساده، قابلیت تفسیر فیزیکی مستقیم و کاربردپذیری عملیاتی آسان در فرآیندهای متداول طراحی روسازی بود. مدل توانی نهایی ارائه‌شده، نشان می‌دهد که این مدل قادر است بیش از ۹۷ درصد از واریانس داده‌های مرجع آیین‌نامه‌ای را با دقت بسیار بالایی تبیین نماید. همچنین، ضریب تغییرات (C.V) محاسبه‌شده برای این مدل تنها ۲/۰۴٪ بود که نشان از دقت و قابلیت اطمینان فوق‌العاده مدل در پیش‌بینی دارد. این سطح از کارایی آماری، مدل حاضر را به‌عنوان یک ابزار بسیار مطمئن، کارآمد و به‌صرفه برای به‌کارگیری در طراحی‌های مهندسی معرفی می‌کند، چرا که علاوه بر دقت بالا، از سادگی ساختار و قابلیت تفسیر فیزیکی مستقیم برخوردار است. مدل‌سازی نمادین و الگوریتم‌های ژنتیک می‌تواند در پژوهش‌های آینده، روابط ساختاری پیچیده‌تر این سیستم را آشکار سازد.

تحلیل نمودارهای سه‌بعدی نشان داد که افزایش پارامترهای ورودی، ضریب عکس‌العمل مرکب بستر را تا حد اشباع افزایش می‌دهد. در این رفتار، مدول برجهندگی خاک بستر نسبت به ضخامت و مدول زیراساس، تأثیر تعیین‌کننده‌تری دارد. بهینه‌سازی این ضریب مستلزم توجه ویژه به بهبود ویژگی‌های مکانیکی خاک بستر از طریق روش‌های نوین تثبیت است (آماکی و همکاران، ۲۰۲۲). تحلیل حساسیت نشان می‌دهد که در مقادیر بسیار بالای  $K_{\infty}$  عمدتاً ناشی از ترکیب مقادیر بسیار بالای مدول خاک بستر  $M$ ، مدول زیراساس  $E$  و ضخامت زیراساس  $D$  نرخ افزایش  $K_{\infty}$  کاهش یافته و مدل تمایل به فلات دارد. این رفتار تا حدی با شکل منحنی‌های مرجع آیین‌نامه‌ای (AASHTO، ۱۹۹۳) در این نواحی همخوانی دارد که خود حاکی از کاهش حساسیت سیستم است. با این وجود، کاهش جزئی دقت پیش‌بینی در این نواحی دور از انتظار نبوده و عمدتاً ناشی برون‌یابی مدل فراتر از تراکم اصلی داده‌های آموزشی استخراج‌شده از نمودار می‌باشد. تمرکز اصلی این پژوهش بر ارائه مدلی دقیق و قابل اعتماد برای محدوده متعارف مورد استفاده در طراحی بوده که به خوبی محقق شده است. میانگین قدر مطلق خطای نسبی در این ناحیه حدود ۴/۲ درصد محاسبه شد که در مقایسه با خطای متوسط کل مدل (کمتر از ۲/۵ درصد) افزایش نشان می‌دهد، اما این میزان خطا همچنان در مقایسه با خطای ذاتی روش‌های سنتی استخراج از نمودار (که می‌تواند به ۵-۱۰٪ برسد) قابل قبول و پایین ارزیابی می‌شود. این رفتار در مدل‌سازی پدیده‌های مهندسی با روابط غیرخطی شدید امری شناخته‌شده است و بر برتری چشمگیر مدل پیشنهادی در کل دامنه کاربردی طراحی خلدشه‌ای وارد نمی‌سازد. بهینه‌سازی عملکرد مدل در نواحی با مقادیر حدی متغیرهای ورودی و نیز اعتبارسنجی آن با داده‌های آزمایشگاهی و میدانی در اولویت‌های پژوهشی آتی قرار دارد.

نظرگیری روابط غیرخطی) را در مقایسه با روش‌های نموداری مرسوم برجسته نماید. انجام این مقایسه به غنای بحث و ارائه چشم‌اندازی جامع‌تر به مهندسان طراح کمک شایانی خواهد کرد.

از دیدگاه کاربردی، استفاده از این مدل توانسته است خطای ناشی از تخمین چشمی مقادیر از نمودارهای آیین‌نامه‌ای را به‌طور محسوسی کاهش دهد؛ به‌گونه‌ای که مدل ریاضی ارائه‌شده این مقدار را به کمتر از ۲/۵ درصد رسانده است. همچنین، ماهیت برنامه‌پذیر این مدل امکان تلفیق آن با سامانه‌های تحلیلی و انجام ارزیابی‌های حساسیت چندمتغیره را فراهم می‌سازد. این ویژگی، گامی مهم در جهت بهینه‌سازی طراحی ضخامت دال‌های بتنی در شرایط خاک‌های متغیر تلقی می‌شود؛ حوزه‌ای که پیش‌تر با محدودیت‌های روش‌های سنتی روبرو بوده است.

## ۶. تقدیر و قدردانی

بدین وسیله از معاونت محترم پژوهش و فناوری دانشگاه یزد که در قالب پژوهانه شماره ۳۱۹/۰۳-۱۴۰۴ از این پژوهش حمایت کردند، سپاسگزاری می‌شود.

## ۷. تأییدیه اخلاقی

در این پژوهش تمامی کدهای اخلاق پژوهش رعایت شده است.

## ۸. مشارکت‌های نویسندگان

در این مطالعه جوکار پیش‌نویس اولیه و تحلیلها را به عهده داشتند و خیبری نظارت کلی و بازخوانی متن را انجام دادند و سرفراز و تیموری در تهیه داده‌های اولیه و تحلیل ابتدائی همکاری کردند.

## ۹. منابع مالی

هیچگونه حمایت مالی مستقیم از این مطالعه انجام نشده است.

## ۱۰. تعارض منافع

هیچگونه تعارض منافع در انجام این مطالعه وجود ندارد.

بررسی نمودارهای تشخیصی، شامل نمودار احتمال نرمال باقیمانده‌ها، رابطه میان مقادیر واقعی و پیش‌بینی‌شده، و نیز توزیع باقیمانده‌ها نسبت به پیش‌بینی‌ها، نیز صحت عملکرد مدل توانی را تأیید کردند. یکی از ملاحظات اساسی در توسعه مدل‌های رگرسیونی، اطمینان از عدم وقوع پدیده بیش‌برازش است که می‌تواند به کاهش توانایی مدل در تعمیم‌پذیری به داده‌های جدید منجر شود. در این پژوهش، برای ارزیابی این جنبه و اطمینان از صحت مدل نهایی، معیارهای آماری متعددی مورد تحلیل قرار گرفت. ضریب تعیین پیش‌بینی‌شده برای مدل توانی منتخب، مقداری معادل ۹۷/۳۹٪ را نشان داد که اختلاف بسیار ناچیزی در حدود ۰/۰۰۰۲ دارد. این همگرایی قابل توجه بین این دو شاخص، خود گواهی بر عدم وقوع بیش‌برازش است. توزیع تصادفی باقیمانده‌ها پیرامون محور صفر در این مدل، رفتار غیرخطی ضریب عکس‌العمل مرکب بستر تحت تأثیر تعامل ضخامت و مدول ارتجاعی لایه زیراساس و خاک بستر است. افزایش ضخامت در مدول‌های بالاتر، تأثیر تقویتی محسوسی دارد. افزون بر این، یافته‌ها نشان‌دهنده وجود یک آستانه بحرانی در ضخامت لایه زیراساس هستند که پس از آن، تأثیر افزایش مدول ارتجاعی این لایه بر ضریب به‌طور قابل توجهی افزایش یافته و امکان بهینه‌سازی مکانیکی مؤثرتری را فراهم می‌سازد. به‌عنوان یک مطالعه تکمیلی، مقایسه بین روش‌های شناخته‌شده‌ای مانند AASHTO (۱۹۹۳) و روش انجمن بتن پرتلند (PCA) برای محاسبه مدول عکس‌العمل مرکب بستر می‌تواند بسیار روشنگر باشد. چنین مقایسه‌ای می‌تواند روی معیارهایی مانند سهولت کاربرد، حساسیت به پارامترهای ورودی مختلف، همگرایی در طراحی و همخوانی با نتایج میدانی متمرکز شود. این تحلیل تطبیقی نه‌تنها به درک بهتر دامنه کاربرد و محدودیت‌های هر روش کمک می‌کند، بلکه می‌تواند برتری‌های احتمالی مدل ریاضی ارائه شده در این پژوهش (مانند دقت بالاتر، قابلیت برنامه‌نویسی و در

- AASHTO. American Association of State Highway and Transportation Officials. 1993. "AASHTO guide for design of pavement structures". American Association of State Highway and Transportation Officials, Washington, DC, USA. ISBN: 1-56051-055-2.
- AASHTO. American Association of State Highway and Transportation Officials. 2008. "Mechanistic-empirical pavement design guide: A manual of practice". 1st ed., American Association of State Highway and Transportation Officials, Washington, DC, ISBN: 978-1-56051-423-3.
- Ahmad, J., et al. 2025. "Mathematical models for stress-strain curve prediction: A review". AIP Conference Proceedings, 1988, 569 p., ISBN: 978-0133361650.
- Al-Qadi, I. L., & Elseifi, M. A. 2006. "Evaluation of pavement subgrade stiffness using the falling weight deflectometer". *J. Transport. Eng.*, 132(5): 398–406.
- Al-Hussaini, S. A., & Al-Rawa, B. B. 2018. "Developing empirical models for design charts of flexible pavements using curve fitting techniques". *Jordan J. Civ. Eng.*, 12(1): 60–70.
- Ali, A., & Milad, A. 2023. "Application of machine learning techniques for asphalt pavement performance prediction". *J. Pure Appl. Sci.*, 22(3): 35-40. <https://doi.org/10.51984/jopas.v22i3.2733>
- Amakye, S. Y., Abbey, S. J., Booth, C. A., & Oti, J. 2022. "Road pavement thickness and construction depth optimization using treated and untreated artificially-synthesized expansive road subgrade materials with varying plasticity index". *Mater.*, 15(8): 2773.
- ASTM International. 2016. "Standard test method for nonrepetitive static plate load tests of soils and flexible pavement components, for use in evaluation and design of airport and highway pavements". ASTM D1196/D1196M-12R16.
- Bates, R. B. 2011. "Plot Digitizer: An open-source program for extracting data from plots". *Comput. Geosci.*, 37(8): 1064–1069.
- Chambers, J. M., & Hastie, T. J. 2020. "Statistical models in S. Wadsworth & Brooks/Cole". 1st Edition, Pearson, 569 p., ISBN: 978-0133361650.
- Cohen, J. 1988. "Statistical power analysis for the behavioral sciences". Lawrence Erlbaum Associates.
- Costa, H. M. C., & Horta, L. G. G. 2015. "Parametric analysis of rigid pavements considering the Winkler foundation model". *Latin Amer. J. Solids Struct.*, 12(1): 200–217.
- Da Silva, B. O., Da Quiroze, M. M., Oliveira, G. & Gomez, G. J. C. 2024. "Predicting resilient modulus for pavement design: A comprehensive review of artificial neural network applications". *Int. J. Pavement Eng.*, 25(1). <https://doi.org/10.1080/10298436.2024.2426058>
- Draper, N. R., & Smith, H. 1998. "Applied regression analysis". John Wiley & Sons, Online ISBN:9781118625590, 736 p. Doi:10.1002/9781118625590
- Duncan, J. M., Monismith, C. L., & Wilson, E. L. 1968. "Finite element analyses of pavements". *Highway Res. Record*, 228: 18–33.
- Federal Highway Administration (FHWA). 2006. "Geotechnical aspects of pavements (Reference Manual No. FHWA NHI-05-037)". National Highway Institute, U.S. Department of Transport. <https://www.fhwa.dot.gov/engineering/geotech/pubs/05037/05037.pdf>
- Ghanizadeh, A.R. Bayat, M. Tavanaamlashi, A. & Rahravan, M. 2019, "Prediction of Unconfined Compressive Strength of Clayey Subgrade Stabilized with Portland Cement and Lime Using Group Method of Data Handling (GMDH) Method," *Journal of Transportation Infrastructure Engineering*, vol. 5, no. 1 (Serial No. 17), pp. 77–96. <https://sid.ir/paper/251560/fa>
- Gelman, A., & Carlin, J. B. 2014. "Bayesian data analysis". Chapman and Hall/CRC, 1st Edition, 569 p., ISBN: 978-0133361650.
- Goulias, D. G., & Titus-Glover, L. 2007. "Long-term pavement performance (LTPP) program: Evaluation of K-value and subgrade resilient modulus for rigid pavement design". *Transport. Res. Record*, 2037(1): 108–117.
- Hu, X., & Solanki, P. 2021. "Predicting resilient modulus of cementitiously stabilized subgrade soils using neural network, support vector machine, and Gaussian process regression". *J. Mater. Civ. Eng.*, 33(4): 04021026.
- Huang, Y. H. 1994. "Finite element analysis of flexible pavements". *Transport. Res. Record*, 1449: 80–88.
- Huang, Y. H. 2004. "Pavement analysis and design". 2nd Edition, Pearson Prentice Hall, 792 p., ISBN: 978-0131424739.
- Ioannides, M., Raad, L. D., & Whitfield, J. L. S. D. W. 1990. "Load response of concrete pavements". *Transport. Res. Record*, 1286: 10–18.
- Jain, A. K. 1988. "Fundamentals of digital image processing". 1st Edition, Pearson, 569 p., ISBN: 978-0133361650.

- Kang, K., & Kim, Y. 2024. "Predicting resilient modulus for pavement design: A comprehensive review of artificial neural network applications". *J. Road Eng.*, 25(1): 2426058.
- Khaiatoli, S., & Rezaei, M. 2024. "Estimation of the subgrade reaction modulus using field and numerical analysis methods". *J. Civ. Eng. Struct.*, 8(1): 1–15.
- Mander, J. B., Priestley, M. J. N., & Park, R. 1988. "Theoretical stress-strain model for confined concrete". *J. Struct. Eng.*, 114(8): 1804–1826.
- Min, Y., Gao, M., Yao, C., Wu, J., & Wei, X. 2023. "On the use of one-part geopolymer activated by solid sodium silicate in soft clay stabilization". *Constr. Build. Mater.*, 402: 132957. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2023.132957>
- Mohammad, A. A., & Al-Amoudi, O. S. B. 2022. "Influence of hybrid steel fiber on the behavior of rigid pavements: A finite element modeling approach". *Appl. Sci.*, 12(10): 1478.
- Montgomery, D. C., Peck, E. A., & Vining, G. G. 2022. "Introduction to linear regression analysis". John Wiley & Sons, 1st Edition, Pearson, 1988, 569 p., ISBN: 978-0133361650.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. 1992. "Numerical recipes in C: The art of scientific computing". Cambridge University Press.
- Qian, Y., Han, J., Pokharel, S. K., & Parsons, R. L. 2011. "Determination of resilient modulus of subgrade using cyclic plate loading tests". In *Geo-Frontiers 2011: Advances in geotechnical Eng.* (pp. 4743–4752). American Society of Civil Engineers.
- Rice, J. A. 2006. "Mathematical statistics and data analysis". Duxbury Press.
- Selejdak, J., et al. 2023. "Mathematical models of reinforced concrete structures in modern computer software". *Prod. Eng. Arch.*, 29(1): 108–115.
- Tamagusko, T., Gomes Correia, M., & Ferreira, A. 2024. "Machine learning applications in road pavement management: A review, challenges and future directions". *Infrastruct.*, 24(12): 213. <https://doi.org/10.3390/infrastructures9120213>
- Von Quintus, H. L., & Moulthrop, J. S. 2007. "Mechanistic-empirical pavement design guide flexible pavement performance prediction models: Volume II reference manual". Federal Highway Administration.

## Notation Table

Symbol	Description	معادل فارسی	Unit
$K_{\infty}$	Composite foundation reaction modulus	مدول واکنش پی مرکب	pci / kN/m <sup>3</sup>
D	Thickness of subbase layer	ضخامت لایه زیراساس	in / m
E	Elastic modulus of subbase	مدول الاستیسیته زیراساس	psi / MPa
M	Elastic modulus of subgrade soil	مدول الاستیسیته خاک بستر	psi / MPa
R <sup>2</sup>	Coefficient of determination	ضریب تعیین	Dimensionless
SEE	Standard error of estimate	خطای استاندارد برآورد	Dimensionless
Power Model	Optimal regression equation: $K_{\infty} = \alpha \cdot D^{\beta} \cdot E^{\gamma} \cdot M^{\delta}$	مدل توانی: معادله رگرسیونی بهینه	—