

نابرابری در آمد در خطوط اتوبوسرانی مشهد براساس شاخص زنگا

سید جمال خراشادیزاده

کارشناس ارشد آمار سازمان اتوبوسرانی مشهد (نویسنده مسئول)

jamal_khorashad@yahoo.com

غلامرضا محتشمی بروزادران

استاد گروه آمار دانشگاه فردوسی مشهد

gmb1334@yahoo.com

حدیث پوراسمعیلی

کارشناس ارشد آمار اقتصادی و اجتماعی

h_p2006@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۱۰/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۰۲/۲۲

چکیده:

شاخص‌ها و معیارهای متعددی در زمینه نابرابری‌های اقتصادی معرفی گردیده است که هر کدام دارای خواص و ویژگی‌هایی می‌باشند. زنگا در سال ۲۰۰۷ میلادی شاخص جدیدی را به عنوان جایگزین ضریب جینی معرفی کرد. این شاخص از مقایسه درآمد میانگین p ٪ پایین جامعه و میانگین ($p-100$)٪ بالای جامعه بدست می‌آید. برتری این معیار نسبت به سایر معیارهای دیگر این است که این شاخص ارتباط فقر و ثروت را به خوبی منعکس می‌کند. در این مقاله به بررسی خواص و ویژگی‌های شاخص زنگا در راستای مقالات گرسلين و همکاران (۲۰۰۹)، ۲۰۱۰، ۲۰۱۳ و زنگا (۲۰۰۷) می‌پردازیم و برآورد نقطه‌ای و فواصل اطمینان را برای آن یافته و آن را با سایر معیارهای نابرابری از جمله ضریب جینی مقایسه می‌کنیم. در انتهای از داده‌های درآمد خطوط سازمان اتوبوسرانی مشهد برای نشان دادن کاربرد عملی شاخص زنگا استفاده خواهیم کرد.

طبقه‌بندی JEL: D63

کلید واژه‌ها: شاخص زنگا، منحنی زنگا، منحنی لورنتس، سازمان اتوبوسرانی مشهد

۱. مقدمه

زنگا در سال ۲۰۰۷ میلادی شاخص جدیدی را معرفی کرد که از آن به عنوان جایگزین منحنی لورنتس و ضریب جینی یاد می‌کند. این شاخص بر پایه‌ی نسبت بین میانگین پایین درآمد و میانگین بالای درآمد و یا به طور معادل بر پایه نسبت بین میانگین p ٪ پایین جامعه و میانگین $(1-p)$ ٪ بالای جامعه تعریف می‌شود. آن‌چه این شاخص را از سایر شاخص‌های نابرابری متمایز می‌کند، این است که شاخص زنگا ارتباط بین فقر و ثروت را به خوبی منعکس می‌کند. همچنین در موارد پیوسته یک رابطه‌ی یک به یک بین منحنی لورنتس $L(p)$ و منحنی زنگا $Z(p)$ وجود دارد. می‌توان منحنی زنگا را به صورت زیر به دست آورد:

$$Z(p) = 1 - \frac{L(p)}{p} \cdot \frac{1-p}{1-L(p)} \quad (1)$$

۲. معرفی شاخص نابرابری زنگا

شاخص زنگا (Z) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$Z = \int_0^1 Z(p) dp \quad (2)$$

این شاخص دارای ویژگی‌های زیر است:

۱- در حالت برابری کامل مقدار $Z=0$ است.

۲- در حالت نابرابری کامل مقدار این شاخص به صورت تابعی صعودی از N مانند C_N است طوری که:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C_N = 1 \quad (3)$$

شاخص زنگا پایای مقیاس است بدین معنا که اگر $Y = aX + b$ باشد آنگاه $Z(Y) = Z(X)$ می‌باشد.

شاخص زنگا پایای مکان نیست یعنی اگر $Y = h + X$ و $X > 0$ باشد.

۳- شاخص زنگا از قانون انتقال پیروی می‌کند، یعنی اگر به مقدار x_i از درآمد x_{i+1} به x_i منتقل کنیم ($i=1, \dots, N-1$) طوری که $x_i < \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)$ ، مقدار Z کاهش می‌یابد.

۳. دو برآوردگر ناپارامتری برای شاخص زنگا

یکی از مزایای یک شاخص خوب، این است که برآوردهای مناسبی داشته باشد. به دست آوردن برآوردها همیشه با چالش رو برو بوده و افراد مختلف برآوردهای متفاوتی را ارایه می‌نمایند.

فرض کنید X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با X باشند. گریسلین و پاسکوازی^۱ در سال ۲۰۱۰ میلادی دو برآوردگر ناپارامتری برای شاخص زنگا Z معرفی کردند. اولین برآوردگر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{Z}_n = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i^{-1} \sum_{k=1}^i X_{k:n}}{(n-i)^{-1} \sum_{k=i+1}^n X_{k:n}} \quad (4)$$

که در آن $X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ هستند و \bar{X} آماره‌های ترتیبی از X_1, \dots, X_n میانگین نمونه‌ای X_1, \dots, X_n است. دومین برآوردگر نیز به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_n = & - \sum_{i=2}^n \frac{\sum_{k=1}^{i-1} X_{k:n} - (i-1)X_{i:n}}{\sum_{k=i+1}^n X_{k:n} + iX_{i:n}} + \log\left(\frac{i}{i-1}\right) \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\bar{X}}{X_{i:n}} - 1 - \frac{\sum_{k=1}^{i-1} X_{k:n} - (i-1)X_{i:n}}{\sum_{k=i+1}^n X_{k:n} + iX_{i:n}} \right) \\ & \times \log\left(1 + \frac{X_{i:n}}{\sum_{k=i+1}^n X_{k:n}}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

دو برآوردگر \hat{Z}_n و \tilde{Z}_n به طور مجانبی هم‌ارز هستند (گریسلین و پاسکوازی، ۲۰۱۰).

قضیه ۱: اگر گشتاور $E[X^{2+\alpha}] > 0$ متناهی باشد، به طور مجانبی داریم:

$$\sqrt{n}(\tilde{Z}_n - Z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i) + o_p(1) \quad (6)$$

که در آن $o_p(1)$ متغیری تصادفی است که وقتی $\infty \rightarrow n$ میل می‌کند، در احتمال

همگرا به صفر می‌شود و تابع $h(X_i)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h(X_i) = \int_0^\infty (I\{X_i \leq x\} - F(x)) w_F(F(x)) dx \quad (7)$$

در عبارت فوق تابع وزنی $w_F(t)$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} w_F(t) = & -\frac{1}{\mu_F} \int_0^t \left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{L_F(p)}{(1 - L_F(p))^2} dp \\ & + \frac{1}{\mu_F} \int_t^1 \left(\frac{1}{p} - 1\right) \frac{1}{1 - L_F(p)} dp \end{aligned} \quad (8)$$

^۱Pasquazzi

قضیه ۱ نشان می‌دهد که $(\tilde{Z}_n - Z) \sqrt{n}$ دارای توزیع مجانبی نرمال با میانگین صفر و واریانس متناهی $\sigma_F^2 = E[h^2(X)]$ می‌باشد که در آن

$$\sigma_F^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty (\min \{F(x), F(y)\} - F(x)F(y)w_F(F(x))w_F(F(y)))dx dy \quad (9)$$

است.

۴. برآورد نابرابری درآمدی در خطوط اتوبوسرانی مشهد

سازمان اتوبوسرانی مشهد ۱۶۰ خط اتوبوسرانی دارد که از این تعداد، ۹۹ خط مربوط به بخش سازمانی، ۴۷ خط مربوط به بخش خصوصی و ۱۴ خط مربوط به خطوط مینی بوسرانی می‌باشند. اطلاعات استفاده شده در این مقاله مربوط به تراکنش‌های کسر شارژ من کارت در خداداد ماه ۱۳۹۲ می‌باشد که برگرفته از سامانه حمل و نقل هوشمند بليت الکترونیک شهرداری مشهد است.

با استفاده از نرم‌افزار R مقادیر \tilde{Z} و \hat{Z} را برای داده‌های درآمد خطوط اتوبوسرانی مشهد محاسبه و نتایج در جدول ۱ ارایه شده است.

جدول ۱: شاخص‌های ناپارامتری زنگا برای خطوط اتوبوسرانی مشهد به تفکیک نوع خط

\tilde{Z}	\hat{Z}	نوع خط
۰/۶۱۲۰۷۹۲	۰/۶۱۷۳۱۸۹	خطوط خصوصی
۰/۷۸۳۶۱۸۲	۰/۷۸۵۴۹۰۳	خطوط سازمانی
۰/۷۶۷۱۷۸۷	۰/۷۸۷۳۵۷۹	خطوط مینی بوسرانی
۰/۸۱۵۲۳۰۷	۰/۸۱۵۸۲۹۳	کل خطوط اتوبوسرانی

در جدول ۱ مشاهده می‌شود که نابرابری درآمدی در بین خطوط مینی بوسرانی بیشتر از خطوط سازمانی و خصوصی است. سیاست استفاده شده در سازمان اتوبوسرانی مشهد بر این است که خطوط پردرآمد و پرترکنش در اختیار شرکت‌های خصوصی قرار داشته باشند که برای آن‌ها توجیه اقتصادی داشته باشد. نتیجه حاصل شده مبنی بر پایین بودن شاخص نابرابری زنگا در خطوط بخش خصوصی نسبت به سایر خطوط است، دور از انتظار نیست. نکته دیگری که باید در مورد خطوط مینی بوسرانی به آن اشاره کنیم، این است که در برخی از این خطوط علاوه بر مینی بوس‌های بخش خصوصی، اتوبوس‌های سازمانی نیز فعالیت دارند، همین مساله باعث شده تا درآمد این خطوط کاهش داشته باشد و نسبت به سایر خطوط کمتر شود که می‌تواند دلیلی بر ایجاد نابرابری درآمدی تلقی شود. این قضیه در مورد آن دسته از خطوط سازمانی که مشترک

با مینیبوسرانی هستند نیز صدق می‌کند و باعث اختلاف درآمدی آن‌ها می‌شود. اکنون می‌خواهیم براورد واریانس شاخص زنگا را محاسبه کنیم و به‌وسیله‌ی آن فاصله اطمینان را برای هر یک از شاخص‌ها به دست آوریم. با استفاده از نرم‌افزار R مقدار براورد واریانس شاخص زنگا به تفکیک نوع خط در جدول ۲ نشان داده شده است.

جدول ۲: براورد واریانس شاخص زنگا برای خطوط اتوبوسرانی مشهد

واریانس	نوع خط
۰/۱۰۲۱۰۵۵	خطوط خصوصی
۰/۰۶۱۱۵۸۷۲	خطوط سازمانی
۰/۰۴۷۴۰۹۵۸	خطوط مینیبوسرانی
۰/۰۶۷۳۷۲۵۲	کل خطوط اتوبوسرانی

بنابراین فاصله اطمینان شاخص‌های ناپارامتری \tilde{Z} و \hat{Z} برای کل شبکه‌ی خطوط اتوبوسرانی مشهد، خطوط بخش‌های سازمانی، خصوصی و مینیبوسرانی به صورت جدول ۳ حاصل می‌شوند.

جدول ۳: فواصل اطمینان برای شاخص‌های \tilde{Z} و \hat{Z}

\tilde{Z}		\hat{Z}		نوع خط
فاصله اطمینان ۹۵ درصد	فاصله اطمینان ۹۰ درصد	فاصله اطمینان ۹۵ درصد	فاصله اطمینان ۹۰ درصد	
(۰/۰۸۸، ۱)	(۰، ۱)	(۰/۰۹۳، ۱)	(۰، ۱)	خطوط خصوصی
(۰/۳۷۸، ۱)	(۰/۳۹۸، ۱)	(۰/۳۷۹، ۱)	(۰/۳، ۱)	خطوط سازمانی
(۰/۴۱۰، ۱)	(۰/۳۴۰، ۱)	(۰/۴۳۰، ۱)	(۰/۳۶، ۱)	خطوط مینیبوسرانی
(۰/۳۸۹، ۱)	(۰/۳۰۶، ۱)	(۰/۳۹۰، ۱)	(۰/۳۰۷، ۱)	کل خطوط اتوبوسرانی

نکته قابل ذکر از دو جدول اخیر این است که با وجود این که شاخص زنگا در خطوط بخش خصوصی کمتر از خطوط دیگر است، اما پراکندگی این شاخص در خطوط خصوصی بیشتر می‌باشد و همین امر باعث بزرگ شدن فاصله اطمینان شده است طوری که فواصل اطمینان ۹۵ درصد برای خطوط خصوصی بین صفر و یک تغییر می‌کند که همان حدود شاخص زنگا در حالت کلی است. پراکندگی شاخص زنگا در خطوط مینیبوسرانی کمترین مقدار را دارد و باعث ایجاد فواصل اطمینان کوتاه‌تری نسبت به سایر خطوط شده است.

۴-۱. مقایسه‌ی شاخص زنگا و شاخص جینی

شاخص‌های زنگا و جینی ویژگی‌های مشترک زیادی دارند، از جمله این‌که می‌توان هر دوی آن‌ها را با میانگین منحنی لورنتس (pL) تعریف کرد. از ویژگی‌های مشترک دیگر،

می‌توان به ویژگی‌هایی نظیر دامنه‌ی تغییرات، مستقل از مقیاس بودن، مستقل از اندازه جامعه و قانون انتقال نام برد.

یکی از ویژگی‌های شاخص زنگا نسبت به شاخص جینی، نتیجه‌های است که رادائلی^۲(۲۰۱۰) بدست آورد او نشان داد در تجزیه شاخص‌ها به زیرگروه‌ها، شاخص زنگا نسبت به شاخص جینی دقیق‌تر است. در اینجا مزایای دیگری از شاخص زنگا را نسبت به شاخص جینی بیان می‌کیم.

دو اندازه‌ی نابرابری زنگا و جینی، از جهات مختلف با یکدیگر متفاوت هستند. یک استدلال در این مورد را گریسلین^۳(۲۰۱۰) ارایه داده است. بنا به نظر او، شاخص جینی نابرابری بین خیلی فقیر و تمام جامعه را کم برآورد می‌کند. اما شاخص زنگا دو زیر‌گروه مکمل را با یکدیگر مقایسه کرده و به هر یک از زیرگروه‌ها وزن یکسانی را نسبت می‌دهد. بنابراین با حساسیت یکسانی همه‌ی تغییرات نابرابری را در هر قسمت توزیع بیان می‌کند.

در یک مطالعه‌ی شبیه‌سازی شده، مقایسه‌ی بین ۱۷ زیرگروه متفاوت از شاخص‌های نابرابری نشان می‌دهد، شاخص زنگا یکی از مناسب‌ترین اندازه‌ها برای تشخیص تغییرات در هر سطح از توزیع درآمد و در وضعیت‌های متفاوت است (لانگل و تایلی^۴، ۲۰۰۹). ویژگی دیگر شاخص زنگا تفسیر آن است که به جای تجزیه و تحلیل، اطلاعات زیادی را مستقیماً از خود منحنی می‌توان به دست آورد. برای مثال، هر نقطه‌ی $Z(p)$ روی منحنی نشان می‌دهد که میانگین درآمد p ۱۰۰٪ فقیرترین برابر با $[Z(p)-1]$ ام میانگین درآمد $(p-1)$ ۱۰۰٪ ثروتمندترین است. به علاوه شاخص زنگا را می‌توان در کنار منحنی زنگا رسم کرد. در نتیجه می‌توان فاصله نابرابری هر نقطه مانند p را نسبت به میانگین سطح نابرابری، به خوبی نمایش داد. در نهایت مافنینی^۵ و پولیسیچیو^۶(۲۰۱۰) نشان دادند زمانی که یک درآمد مثبت را به همه‌ی درآمدها اضافه می‌کنیم، روی منحنی زنگا بیشتر از منحنی لورنتس اثر می‌گذارد.

در واقع منحنی زنگا نشان می‌دهد که بعد از تبدیل، سطح نابرابری برای درآمدهای کم نسبت به درآمدهای زیاد، بیشتر کاهش می‌یابد در حالی که درمورد منحنی لورنتس

^۱Radaelli

^۲Greselin

^۳Langel and Tille

^۴Maffenini

^۵Polisicchio

این گونه نیست. یکی از ویژگی‌های منحصر بفرد شاخص زنگا نسبت به شاخص‌های جینی و بن‌فرونی، این است که رفتار شاخص زنگا مشابه رفتار دو شاخص دیگر نیست. در جدول ۴ مقادیر \hat{G} و \hat{Z} به تفکیک خطوط خصوصی، سازمانی و مینی‌بوسرانی نشان داده شده است، این مقادیر براساس میزان نابرابری به صورت صعودی رتبه‌بندی شده‌اند.

جدول ۴: شاخص‌های زنگا و جینی برای خطوط اتوبوسرانی مشهد به تفکیک نوع خط

\hat{G}	\hat{Z}	نوع خط
۰/۲۹۹۶۷۸۹	۰/۶۱۷۳۱۸۹	خطوط خصوصی
۰/۴۱۹۵۸۵۳	۰/۷۸۵۴۹۰۳	خطوط سازمانی
۰/۵۱۵۲۷۲۶	۰/۷۸۷۷۲۵۷۹	خطوط مینی‌بوسرانی
۰/۴۶۴۰۵۶۵	۰/۸۱۵۲۸۹۳	کل خطوط اتوبوسرانی

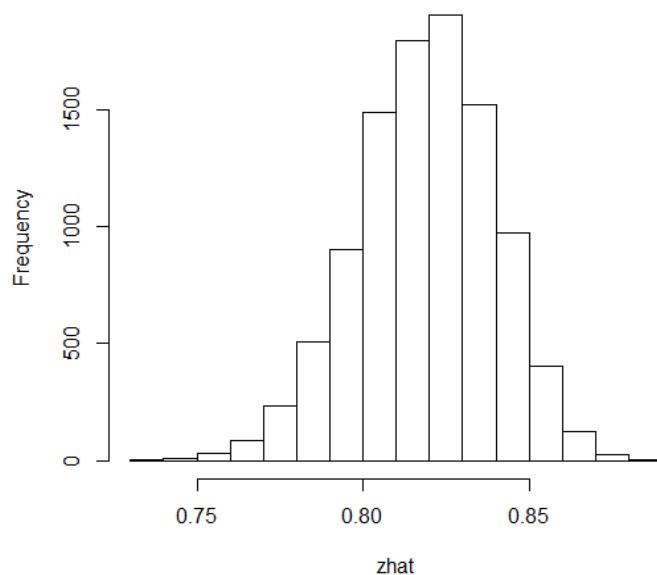
همان‌طور که مشاهده می‌کنید، رتبه‌بندی خطوط براساس هر دو شاخص یکی است. براساس هر دو شاخص خطوط بخش خصوصی دارای کمترین میزان نابرابری درآمدی هستند. در این خصوص باید گفت که برخی از خطوط بخش خصوصی مانند خط ۱۵ دارای کمترین درآمد می‌باشند و برخی از خطوط مانند خط ۱۱ و ۱۰ بیشترین درآمد را در بین آن‌ها دارا هستند.

برای بررسی نرمال بودن شاخص‌های جینی و زنگا با کمک بسته bootstrap در نرمافزار R، از روی داده‌های موجود، ۱۰۰۰۰ بار شبیه سازی گردید و هر بار مقدار \hat{Z} و \hat{G} محاسبه شده است. و در نهایت نمودار هیستوگرام^۱ و نمودار احتمال نرمال^۲ برای آن‌ها ترسیم شده است.

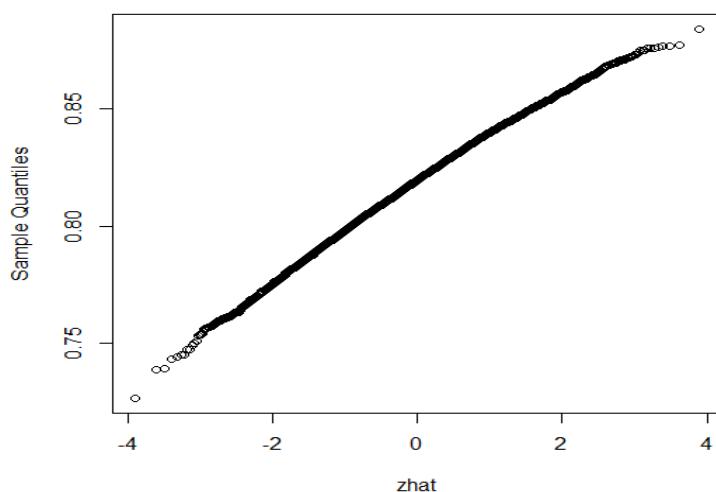
¹Histogram

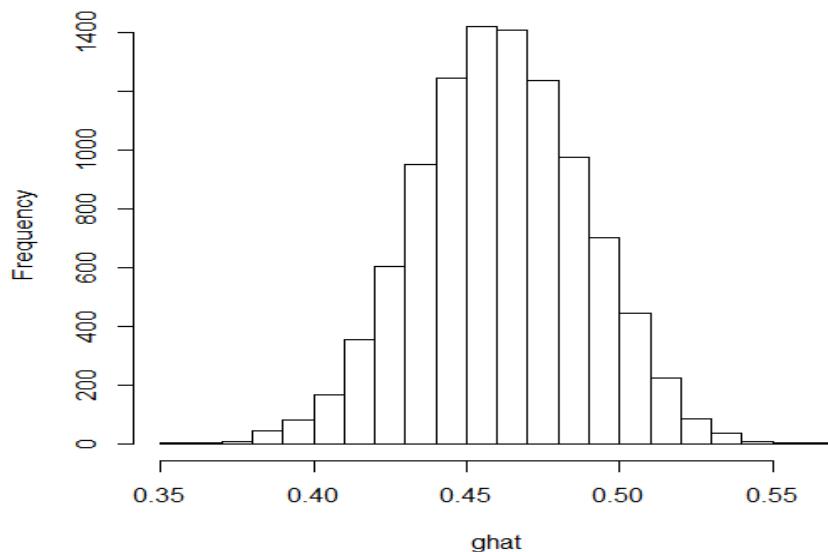
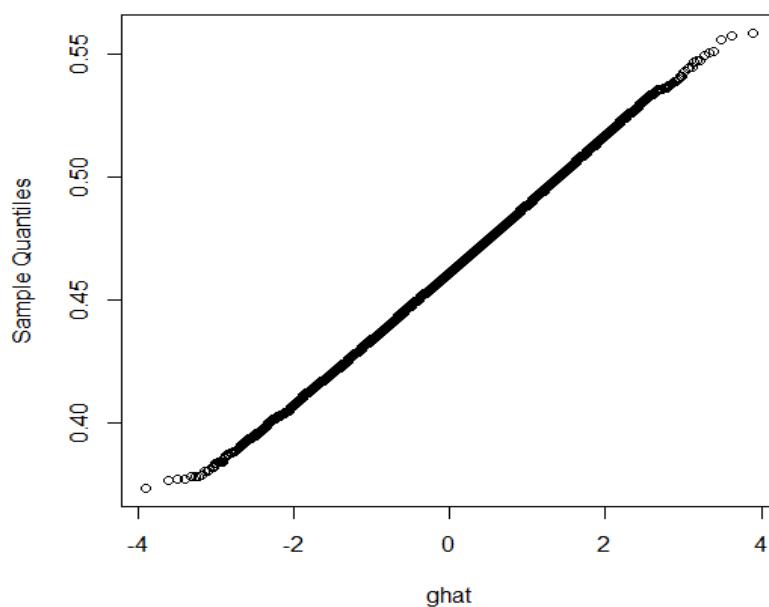
²Normal Q-Q plot

شکل ۱: نمودار هیستوگرام توزیع \hat{Z} روی ۱۰۰۰۰ نمونه به حجم $n=160$



شکل ۲: نمودار احتمال نرمال توزیع \hat{Z} روی ۱۰۰۰۰ نمونه به حجم $n = 160$



شکل ۳: نمودار هیستوگرام توزیع \hat{G} روی $n=160$ نمونه به حجمشکل ۴: نمودار احتمال نرمال توزیع \hat{G} روی $n=160$ نمونه به حجم

همان طور که در نمودار احتمال نرمال دیده می‌شود، با توجه به این که دنباله‌های میانی داده‌ها روی یک خط راست قرار می‌گیرند، فرضیه‌ی نرمال بودن برای هیچ یک از دو شاخص رد نمی‌شود. نمودار هیستوگرام نیز با توجه به زنگوله‌ای شکل بودن، گواه روش‌ن دیگری بر این ادعا است. برای بررسی دقیق‌تر این موضوع ضرایب چولگی و کشیدگی را برای هر دو شاخص محاسبه کرده ایم که در جدول ۵ ارایه شده است.

جدول ۵: چولگی و کشیدگی برای براورد شاخص‌های زنگا و جینی

آماره	۲	۶
چولگی	-۰/۰۱۹۹۰۶	-۰/۲۳۰۱۴۴۴
کشیدگی	۲/۸۷۵۹۰۹	۲/۹۸۶۹۲

جدول ۵ نشان می‌دهد که مقادیر چولگی و کشیدگی دو شاخص جینی و زنگا اختلاف ناچیزی با یکدیگر دارند با این اوصاف میزان چولگی و کشیدگی برای شاخص زنگا کمتر از شاخص جینی است. این نکته از اهمیت زیادی برخوردار است، چرا که فواصل اطمینان نرمال برای شاخص زنگا نسبت به شاخص جینی از اعتبار بیشتری برخوردار است.

۵. نتیجه‌گیری

به عنوان نتیجه‌ی کلی از مقاله‌ی حاضر، می‌توان گفت با وجود این که شاخص جینی عمومیت بیشتری دارد، اما منعکس‌کننده واقعیت اختلاف درآمدی و شکاف طبقاتی نیست. این شاخص بیشتر جنبه مدیریتی داشته و باعث کم جلوه دادن نابرابری درآمدی در جامعه می‌شود. با توجه به مباحثی که مطرح شد، شاخص زنگا به خوبی نابرابری درآمدی بین افراد کم درآمد و افراد ثروتمند را نشان می‌دهد. همچنین تفسیر بسیار ساده‌ای دارد و فواصل اطمینان قابل اعتمادتری را ارایه می‌کند. این شاخص، اجباری برای گرفتن مقادیر صفر و یک در نقاط ابتدایی و انتهایی خود ندارد و شکل نموداری آن نیز با توجه به درآمدهای خانوار تغییر می‌کند و به طور کلی می‌توان گفت، مقدار این شاخص به واقعیت موجود در جامعه نزدیک‌تر است. لذا در بسیاری از مطالعات نابرابری‌های درآمدی می‌تواند مورد توجه قرار گیرد.

فهرست منابع:

- Greselin, F. and L. Pasquazzi (2009), Asymptotic confidence intervals for a new inequality measure. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, 38(8): 1742–1756.
- Greselin, F., Pasquazzi, L. and R. Zitikis (2010), Zenga's new index of economic inequality, its estimation, and an analysis of incomes in Italy, *J Probab Stat*, ID 718905: 1–26.
- Greselin, F., Pasquazzi, L. and R. Zitikis (2013). Contrasting the Gini and Zenga Index of Economic inequality, *Journal of Applied Statistics*, 40(2): 282-297.
- Langel, M. and Y. Tille (2009), An evaluation of the performance of inequality measures for the detection of changes in an income distribution, Technical Report, University of Neuchatel.
- Langel, M. and Y. Tille (2012), Inference by linearization for Zenga's new inequality index: A comparison with the Gini index, *Metrika*, 75(8): 1093–1110.
- Maffenini, W. and M. Polisicchio (2010), How potential is the $I(p)$ inequality curve in the analysis of empirical distributions, Technical Report, Universita degli Studi di Milano-Bicocca, Available at <http://hdl.handle.net/10281/13258>.
- Radaelli, P. (2010), On the decomposition by subgroups of the Gini index and Zenga's uniformity and inequality indexes, *Int. Stat. Rev*, 78: 81–101.
- Zenga, M. (2007), Inequality curve and inequality index based on the ratios between Lower and Upper arithmetic means, *Statistica & Applicazioni*, 5.

Income inequality in Mashhad Bus Lines based on Zenga Index

Seyed Jamal Khorashadizade

M.S.c of Economic and Social Statistics of Organization Bus Mashhad
jamal_khorashad@yahoo.com

Gholam Reza Mohtashami Borzadaran

Professor, Department of Statistics, Ferdowsi University of Mashhad
gmb1334@yahoo.com

Hadis Pouresmaeili

M.S.c of Economic and Social Statistics, Ferdowsi University of Mashhad
h_p2006@yahoo.com

Abstract:

Several indexes and measures have been introduced in the field of economic inequality. Zenga in 2007 introduce a new index which as an alternative to the Gini coefficient. The index is the ratio between the mean income of the 100p% poorest to that of the 100(1-p) % richest. The advantage of this index to other measures as well reflect the relationship between poverty and wealth. This paper examine properties and features of Zenga by papers of Greselin (2009, 2010, 2013) and Zenga (2007) and discuss point estimates and confidence intervals and it compare with other inequality measures such as the Gini coefficient. Also, explain Zenga index in both discrete and continuous state and presented their properties. Finally, for applications of Zenga index we use the Mashhad bus lines income data.

JEL Classification: D63

Keywords: Zenga index, Zenga curve, Lorenz curve, Organization of Mashhad Bus