

حرکت چرخشی استوانه با جرم متغیر

سیف الله سعدالدین^۱، علی منتظری هدش^۱، روزبه درگاهی کرمانی^۱، پوریا وزیر^{۱*}

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت مقاله: خرداد ۱۳۸۸ پذیرش مقاله: آذر ۱۳۸۸	در این مقاله با استفاده از تئوری سیستم‌های جرم متغیر و تحلیل‌های دینامیکی، رفتار چرخشی استوانه‌ای با جرم متغیر مورد ارزیابی قرار گرفته است. اثرات سرعت‌های زاویه‌ای، نحوه کاهش جرم، متد سوزش سوخت، شکل و میزان کشیدگی هندسی در جهت محور تقارن استوانه در پایداری سیستم، شناخته شده است. نتایج حاصل از این مطالعه در واقع رویکردی به بررسی علت ایجاد تغییرات سریع و غیر منتظرانه در سرعت‌های زاویه‌ای راکت‌های دوار می‌باشد که در بعضی از انواع آن‌ها در زمان نزدیک به اتمام سوخت، اتفاق می‌افتد و مشکلات خاصی را در کنترل و پایداری سیستم به وجود می‌آورد. معادلات حرکت مورد استفاده در این مقاله بر مبنای تئوری دینامیکی اجسام جرم متغیر بر پایه تحلیل دینامیکی Kane در اجسام صلب بیان شده‌اند.
واژگان کلیدی: جت‌دمپینگ سرعت زاویه‌ای عرضی سوزش محوری سوزش شعاعی	

۱- مقدمه

بیش از پیش مورد توجه قرار گرفت و نظریات متعددی در زمینه حرکت چرخشی راکت‌های دوار بیان گردید [۱]. تامسون در سال ۱۹۶۱ نشان داد که حرکت چرخش عرضی یک سیستم جرم متغیر دارای تقارن محوری، به نسبت فاصله مرکز جرم سیستم از نازل خروجی به شعاع ژیراسیون عرضی وابسته است. اگر این نسبت از یک بزرگتر باشد سرعت زاویه‌ای عرضی با گذشت زمان کاهش می‌یابد و اگر این نسبت از یک کوچکتر شود، سرعت زاویه‌ای عرضی راکت در طول فرایند کاهش جرم، افزایش می‌یابد [۲].

وی در سال ۱۹۶۵ با انتشار مقاله خود واژه جت دمپینگ را به معنی تغییرات در سرعت زاویه‌ای راکت در طول عملکرد موتور به سبب گشتاور اعمال شده حاصل از خروج ذرات و گازهای سوخته شده از نازل خروجی، تعریف نمود. "گشتاور جت دمپینگ نسبت به گشتاورهای آیرودینامیکی در درجه دوم اهمیت قرار دارد، اما در فضای

در این مقاله سیستم جرم متغیر به سیستم‌های مکانیکی در حال حرکت اطلاق می‌گردد که جرم آنها نسبت به زمان به صورت پیوسته تغییر کرده و این تغییر جرم بر رفتار دینامیکی سیستم اثر گذار باشد. مسائل بنیادی در مورد سیستم‌های جرم متغیر، برای اولین بار توسط یک مخترع اهل چک در سال ۱۸۱۲ بیان گردید. تحقیقات او در واقع تولد و آغاز تئوری سیستم‌های جرم متغیر است. از آن زمان تا اواسط دهه ۱۹۴۰ تحقیقات گسترده‌ای درباره حرکت راکت‌ها انجام گرفت. تا این زمان تحقیقات انجام گرفته در راکت‌ها تنها معطوف به حرکت انتقالی آنها بود. در طول جنگ جهانی دوم، بررسی حرکت راکت‌ها

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: pouryavaziri@yahoo.com

۱. دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان

۲- معادله چرخشی سیستم جرم متغیر

با استفاده از تئوری سیستم‌های جرم متغیر و تحلیل دینامیکی معادله چرخشی سیستم‌های جرم متغیر در حالت کلی به فرم زیر بیان می‌گردد:

$$\tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_H + \mathbf{M}_T + \mathbf{M}_C + \mathbf{M} \quad (1)$$

که در آن:

$$\mathbf{M}_H = -\frac{d}{dt} \int \rho(\mathbf{p} \times \mathbf{v}_r) dV \quad (2)$$

$$\mathbf{M}_T = -\int_s \rho(\mathbf{p} \times \mathbf{v}_r)(\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}) ds \quad (3)$$

$$\mathbf{M}_C = -\frac{d\tilde{\mathbf{I}}}{dt} \cdot \boldsymbol{\omega} - \int \rho(\mathbf{p} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}))(\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}) ds \quad (4)$$

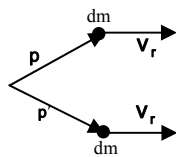
$$- \int \rho(\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{v}_r)) dV$$

\mathbf{M}_H گشتاور ناشی از تغییر مومنتوم زاویه‌ای ذرات جاری در داخل سیستم، \mathbf{M}_T گشتاور تراستینگ و \mathbf{M}_C گشتاور کریولیس نامیده می‌شود. \mathbf{M} مجموع گشتاورهای خارجی وارد بر سیستم می‌باشد [۱].

فرمهای انتگرالی فوق با کمک قضایای انتقال رینولدز در مکانیک سیالات حاصل شده‌اند [۵].

اگر جریان سیال در داخل سیستم نسبت به مرکز جرم سیستم به صورت متقارن باشد، در آن صورت $\int \rho(\mathbf{p} \times \mathbf{v}_r) dV = 0$. زیرا همانطور که در شکل ۱

مشاهده می‌گردد به ازای هر بردار \mathbf{p} ، برداری مانند \mathbf{p}' وجود خواهد داشت که:



شکل ۱- حرکت متقارن ذرات

بنابراین M_T, M_H و ترم سوم سمت راست معادله (۴) برابر صفر می‌گردد و در نتیجه معادله (۱) به فرم زیر خلاصه می‌شود:

خلا که گشتاورهای آیرودینامیکی وجود ندارد، مهمترین مساله در پایداری راکت‌ها خواهد بود [۳].

در اوایل دهه ۸۰ در بعضی از ماموریت‌های فضایی که توسط راکت استار ۴۸ انجام می‌گرفت یک رفتار غیر منتظرانه و غیر قابل توضیح در حرکت راکت مشاهده می‌گردید. وقتی سوخت موشک به حدود ۱/۳ مقدار اولیه تقلیل می‌یافت، سرعت زاویه‌ای عرضی سیستم به حدی زیاد می‌شد که سیستم را دچار ناپایداری کرده و باعث ایجاد واگرایی در مسیر حرکت راکت می‌شد [۴].

هم اکنون در نوع موشک‌های دوار ساخت داخل، مساله ناپایداری در حرکت چرخشی در زمان‌های نزدیک به اتمام سوخت جامد راکت، مشاهده می‌گردد. در این مقاله با نوشتن معادلات سیستم‌های جرم متغیر برای یک استوانه با جرم متغیر به عنوان مدل، علت ایجاد این رفتار دینامیکی آشکار می‌گردد.

علائم اختصاری

\mathbf{p}	بردار موقعیت هر نقطه از سیستم جرم متغیر نسبت مرکز جرم آن
$\boldsymbol{\omega}$	بردار سرعت زاویه‌ای سیستم جرم متغیر
$\boldsymbol{\alpha}$	بردار شتاب زاویه‌ای سیستم جرم متغیر
\mathbf{v}_r	بردار سرعت نسبی ذرات و گازهای سوخته شده نسبت به سیستم
\mathbf{n}	بردار یکه عمود بر سطح خروجی نازل
$\tilde{\mathbf{I}}$	ممان اینرسی به صورت ضرب دیاتیک
\mathbf{M}	بردار برایند گشتاورهای خارجی وارد بر سیستم
\mathbf{b}_i	بردارهای راستگرد یکه واقع شده روی سیستم جرم متغیر
m	جرم
ρ	چگالی
ds	المان سطحی از سطح نازل خروجی
u	اسکالر سرعت نسبی گازهای خروجی از نازل
t	زمان
dV	المان حجمی
l_e	فاصله مرکز جرم استوانه از سطح انتهایی آن

²Kane

بردارهای $\mathbf{b}_i (i=1,2,3)$ بردارهایی که بوده که بر روی سیستم قرار داده شده‌اند.

اگر برابند گشتاورهای خارجی وارد بر سیستم صفر باشد، معادله (۵) به فرم زیر در می‌آید:

$$\tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{d\tilde{\mathbf{I}}}{dt} \cdot \boldsymbol{\omega} + \int \rho (\mathbf{p} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p})) (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}) ds = 0 \quad (۶)$$

محور تقارن استوانه، محور z و دو محور عمود دیگر، x و y نامگذاری می‌شوند.

تک تک ترمهای معادله فوق برای استوانه جرم متغیر به کمک بردارهاییکه b_i تشکیل می‌شوند. بردار ممان اینرسی به صورت ضرب دیاتیک به فرم زیر خلاصه می‌گردد.

$$\tilde{\mathbf{I}} = I(\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2) + J \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_3 \quad (۷)$$

J اسکالر اینرسی حول محور z و I اسکالر اینرسی حول محور x یا y می‌باشد [۷].

داریم:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{b}_1 + \omega_y \mathbf{b}_2 + \omega_z \mathbf{b}_3 \quad (۸)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\omega}_x \mathbf{b}_1 + \dot{\omega}_y \mathbf{b}_2 + \dot{\omega}_z \mathbf{b}_3 \quad (۹)$$

بنابراین:

$$I \cdot \boldsymbol{\alpha} = I(\dot{\omega}_x \mathbf{b}_1 + \dot{\omega}_y \mathbf{b}_2) + J \dot{\omega}_z \mathbf{b}_3 \quad (۱۰)$$

$$\boldsymbol{\omega} \times I \cdot \boldsymbol{\omega} = (J - I) \omega_z (\omega_y \mathbf{b}_1 - \omega_x \mathbf{b}_2) \quad (۱۱)$$

$$\left(\frac{d\tilde{\mathbf{I}}}{dt} \right) \cdot \boldsymbol{\omega} = \dot{I}(\omega_x \mathbf{b}_1 + \omega_y \mathbf{b}_2) + J \dot{\omega}_z \mathbf{b}_3 \quad (۱۲)$$

با فرض خروج یکنواخت ذرات از نازل $(\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n} = u_r = u)$

و با استفاده از تساوی زیر

$$\int \rho \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}) \gamma m = \tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (۱۳)$$

می‌توان نوشت:

$$\int \rho (\mathbf{p} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p})) (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}) ds - \dot{m} \left[(l_e^2 + R^2/4)(\omega_x \mathbf{b}_1 + \omega_y \mathbf{b}_2) + \frac{1}{2} R^2 \omega_z \mathbf{b}_3 \right] \quad (۱۴)$$

با جایگذاری معادلات (۱۰)، (۱۱)، (۱۲)، (۱۴) در معادله (۶) سه معادله زیر حاصل می‌گردد:

$$\int \rho \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}) \gamma m = \tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (۱۵)$$

$$\tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{d\tilde{\mathbf{I}}}{dt} \cdot \boldsymbol{\omega} + \int \rho (\mathbf{p} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p})) (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}) ds = \mathbf{M} \quad (۵)$$

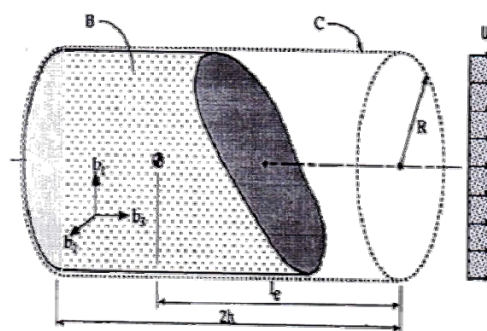
ترم های سوم و چهارم سمت چپ معادله فوق مختص سیستم‌های جرم متغیر می‌باشد. ترم سوم مربوط به تغییرات اینرسی سیستم بوده که در اثر وجود حرکت چرخشی سیستم به وجود می‌آید و ترم چهارم معمولاً به عنوان گشتاور جت دمپینگ نامیده می‌شود [۶].

چنانچه $\mathbf{v}_r = 0$ باشد، در این حالت با توجه به اینکه میزان اینرسی ثابت است، هر دو ترم سوم و چهارم در معادله فوق برابر صفر گردیده و معادله تبدیل به فرم معادلات دینامیکی کین در حرکت چرخشی اجسام صلب می‌گردد [۷].

۳- بررسی حرکت چرخشی آزاد استوانه با جرم متغیر

در این قسمت معادلات سیستم‌های جرم متغیر برای یک استوانه با جرم متغیر که عمل کاهش جرم در آن به صورت متقارن و یکنواخت نسبت به محور تقارن و با سه روش متفاوت مدل سوزش در سوخت‌های جامد انجام می‌گیرد، بررسی شده است [۸].

در این مدل، ذرات سیال تنها می‌توانند با رفتاری متقارن در داخل سیستم حرکت کرده و از سطح دایره‌ای انتهایی استوانه به صورت یکنواخت خارج شوند. در واقع از حرکت چرخشی ذرات و گازهای سوخته شده نسبت به سیستم صرف‌نظر گردیده است. در این مدل نازلی جداگانه برای خروج گازها در نظر گرفته نمی‌شود.

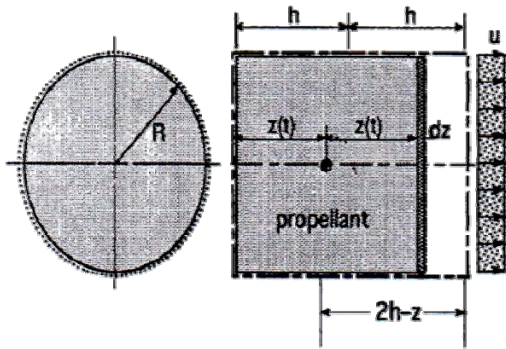


شکل ۲- استوانه با جرم متغیر

می‌باشد. اگر هر کدام از عبارات $\theta(t)$ یا $\phi(t)$ برابر صفر باشد، میزان سرعت‌های زاویه‌ای در طول زمان ثابت باقی می‌ماند. اگر هر کدام از این عبارات بزرگتر از صفر باشد با گذشت زمان، میزان سرعت زاویه‌ای آنها به سمت صفر میل می‌کند و چنانچه این پارامترها منفی باشد، حرکت زاویه‌ای سیستم در طول فرایند کاهش جرم افزایش می‌یابد. برای بدست آوردن پارامترهای $\theta(t)$ و $\phi(t)$ می‌بایست نحوه کاهش جرم مشخص باشد.

الف) سوزش محوری

در این متد فرض شده است، جرم استوانه به صورت یک بعدی و از انتهای آن کاهش می‌یابد. شکل (۳) نحوه کاهش جرم استوانه را در این متد نشان می‌دهد.



شکل ۳- کاهش جرم استوانه در سوزش محوری

$z(t)$ بیانگر فاصله مرکز جرم سیستم از انتهای استوانه

سوخت در زمان t می‌باشد. داریم:

$$m = 2\rho\pi R^2 z \rightarrow \frac{m}{\dot{m}} = \frac{z}{\dot{z}} \quad (25)$$

$$J = mR^2/2 \quad (26)$$

$$j = \dot{m}R^2/2 \quad (27)$$

بنا به رابطه (۱۹) نتیجه می‌شود:

$$\theta(t) = \dot{J} - \dot{m}R^2/2 = 0 \quad (28)$$

یعنی در هر لحظه میزان $\theta(t)$ برابر صفر بوده و در نتیجه ω_z در طول فرایند کاهش جرم مقدار اولیه ω_{z0}

$$I\dot{\omega}_y - (J-I)\omega_x\omega_z + \left\{ \dot{J} - \dot{m}\left(l_e^2 + \frac{R^2}{4}\right) \right\} \omega_y = 0 \quad (16)$$

$$J\dot{\omega}_z + \left\{ \dot{J} - \dot{m}\frac{R^2}{4} \right\} \omega_z = 0 \quad (17)$$

با ضرب معادله (۱۵) در ω_x و (۱۶) در ω_y و جمع طرفین معادلات حاصل می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2}I \frac{d}{dt}(\omega_x^2 + \omega_y^2) + \left\{ \dot{J} - \dot{m}\left(l_e^2 + \frac{R^2}{4}\right) \right\}(\omega_x^2 + \omega_y^2) = 0 \quad (18)$$

متغیرهای $\theta(t), \phi(t)$ به صورت تعریف می‌گردند:

$$\theta(t) = \dot{J} - \dot{m}\frac{R^2}{2} \quad (19)$$

$$\phi(t) = \dot{I} - \dot{m}\left(l_e^2 + \frac{R^2}{4}\right) \quad (20)$$

بنابراین معادلات (۱۷) و (۱۸) به فرم زیر در می‌آیند:

$$J \frac{d\omega_z}{dt} + \theta\omega_z = 0 \quad (21)$$

$$I \frac{d\omega_t}{dt} + 2\phi\omega_t = 0 \quad (22)$$

که در آن $\omega_t = \omega_x^2 + \omega_y^2$. با حل معادلات دیفرانسیلی فوق و با تعریف $\omega_{xy} = \sqrt{\omega_t}$ نتایج زیر را بدست می‌آید:

$$\omega_z = \omega_{z0} \exp\left[-\int_0^t \frac{\theta(t)}{J(t)} dt\right] \quad (23)$$

$$\omega_{xy} = \omega_{xy0} \exp\left[-\int_0^t \frac{\phi(t)}{I(t)} dt\right] \quad (24)$$

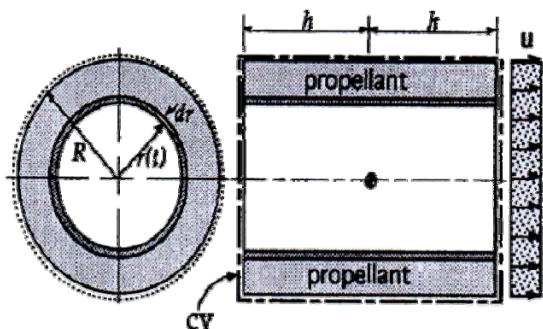
از معادلات فوق این مسأله استنباط می‌شود که سرعت زاویه ای حول محور تقارن استوانه (ω_z) و سرعت زاویه‌ای عرضی (ω_{xy}) در حالتی که گشتاورهای خارجی مانند گشتاورهای آیرودینامیکی وجود نداشته باشند، از یکدیگر مستقلند و نسبت به زمان به صورت تابعی نمایی تغییر می‌کند. روند صعودی یا نزولی بودن آن، یعنی افزایش یا کاهش سرعت زاویه‌ای منوط به علامت $\theta(t)$ و $\phi(t)$

می‌دهد. واضح است که محل مرکز جرم سیستم در اثر تغییر جرم تغییر نمی‌کند. داریم:

$$m = 2\rho\pi(R^2 - r^2)h \rightarrow \dot{m} = -4\rho\pi r\dot{r}h \quad (34)$$

$$J = m(R^2 + r^2)/2 \quad (35)$$

$$\theta(t) = \dot{m}R^2[(r/R)^2 - 1/2] \quad (36)$$



شکل ۴- کاهش جرم استوانه در سوزش شعاعی

تابع $\theta(t)$ تابعی نزولی با مقدار اولیه مثبت و مقدار نهایی منفی است که در $r/R = 0.707$ تغییر علامت می‌دهد. با جایگذاری روابط (۳۵) و (۳۶) در معادله (۲۳) نمودار شکل ۷ حاصل می‌گردد. این نمودار تغییرات سرعت زاویه‌ای حول محور تقارن استوانه را در طول فرایند کاهش جرم در روش سوزش شعاعی برای $h/R = 1$ نشان می‌دهد. به ازای هر نسبتی از h/R رفتار مشابهی در نمودار مشاهده می‌گردد. در بررسی حرکت زاویه‌ای عرضی سیستم داریم:

$$I = m((R^2 + r^2)/4 + h^2/3) \quad (37)$$

$$\phi(t) = \dot{m}R^2[\frac{1}{2}(r/R)^2 - \frac{2}{3}(h/R)^2 - 1/4] \quad (38)$$

$$t = t_\infty, r = R \rightarrow \phi(\infty) = \dot{m}R^2[1/2 - \frac{2}{3}(h/R)^2]$$

$$\phi_\infty = 0 \rightarrow R/h = 1/63 \quad (39)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \dot{m}r\dot{r} < 0$$

را حفظ می‌نماید. در بررسی حرکت چرخش عرضی استوانه داریم:

$$I = m(R^2/4 + z^2/3) \quad (29)$$

با استفاده از رابطه (۲۵) می‌توان نوشت:

$$\dot{I} = \dot{m}(R^2/4 + z^2) \quad (30)$$

داریم:

$$l_e = (2h - 2z) + z = 2h - z \quad (31)$$

بنابراین بنا به رابطه (۲۰) نتیجه می‌شود:

$$\phi(t) = 4\dot{m}h^2[z/h - 1] \quad (32)$$

در زمان ابتدا ($t = 0$) و انتهای فرایند سوختن ($t = t_\infty$) داریم:

$$t = 0, z = h \rightarrow \phi(0) = 0$$

$$t = t_\infty, z = 0 \rightarrow \phi(\infty) = -4\dot{m}h^2 > 0 \quad (33)$$

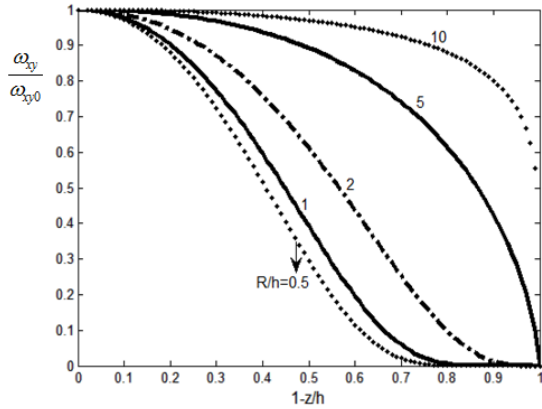
$$d\phi/dt = 4h\dot{m}\dot{z} > 0$$

بنابراین $\phi(t)$ تابعی صعودی با مقادیر مثبت می‌باشد و در نتیجه ω_{yy} با گذشت زمان به سمت صفر میل می‌کند. با جایگذاری روابط (۲۵)، (۲۹)، (۳۲) و (۳۶) در معادله (۲۴)، نمودار شکل ۶ حاصل می‌گردد. این نمودار تغییرات سرعت زاویه‌ای عرضی استوانه را در روش سوزش شعاعی نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، سرعت زاویه‌ای عرضی به ازای مقادیر مختلف R/h کاهش می‌یابد. اگر نسبت R/h زیاد باشد یا به عبارتی شکل استوانه به سمت یک دیسک تخت میل کند، سرعت زاویه‌ای عرضی سیستم کاهش نمی‌یابد.

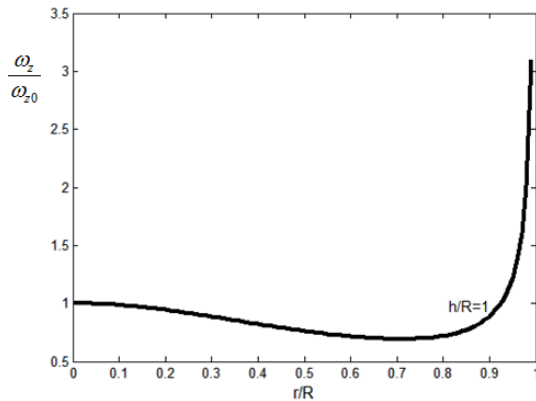
(ب) سوزش شعاعی

در این متد کاهش جرم و عمل سوختن، به صورت شعاعی از داخل به خارج، در نظر گرفته می‌شود. شکل ۴، نحوه کاهش جرم سیستم استوانه را به صورت شعاعی نشان

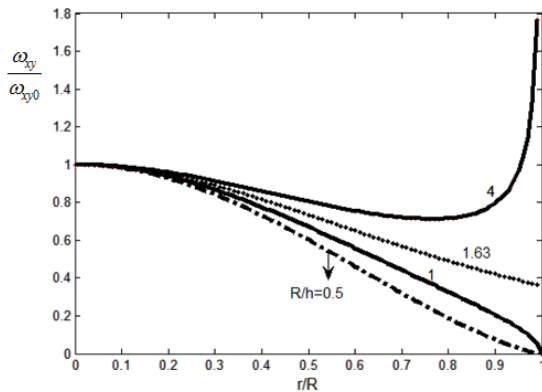
از روابط فوق مشخص می‌شود که مثبت یا منفی بودن ϕ_{∞} به فاکتور شکل سیلندر یعنی R/h بستگی دارد، چنانچه $R/h < 1.63$ باشد ω_{xy} مسلماً واگرا نمی‌شود ولی چنانچه $R/h > 1.63$ باشد، سیستم به سمت ناپایداری میل می‌کند. از جایگذاری روابط (۳۷) و (۳۸) در معادله (۲۴)، نمودار شکل ۸ حاصل می‌گردد.



شکل ۶- نمودار تغییرات سرعت زاویه‌ای عرضی استوانه در متد سوزش محوری



شکل ۷- نمودار تغییرات سرعت زاویه‌ای حول محور تقارن استوانه در متد سوزش شعاعی



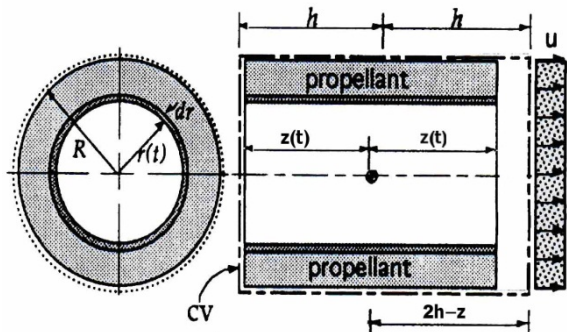
شکل ۸- نمودار تغییرات سرعت زاویه‌ای عرضی استوانه در متد سوزش شعاعی

این نمودار، تغییرات سرعت زاویه‌ای عرضی استوانه را در روش سوزش شعاعی نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌گردد پایداری سیستم کاملاً به هندسه سیستم وابسته است. هر چه نسبت R/h کمتر اختیار شود، سیستم پایدارتر است [۸].

ج) سوزش شعاعی - محوری

در این قسمت کاهش جرم به گونه‌ای در نظر گرفته شده که در آن جرم همزمان هم به صورت شعاعی از داخل به خارج و هم از انتهای استوانه به صورت محوری کاهش یابد (شکل ۵). تجربه نشان می‌دهد که سوزش سوخت در جهت شعاعی و محوری با سرعت یکسان انجام می‌گیرد یعنی داریم: $\dot{r} = -\dot{z}$

مشابه دو متد ذکر شده و با اعمال یکسری روابط ریاضی نتایج حاصل در نمودارهای اشکال (۹)، (۱۰) و (۱۱) مشاهده می‌گردد.



شکل ۵- کاهش جرم استوانه در سوزش شعاعی - محوری

نمودار اشکال (۹) و (۱۰) تغییرات سرعت زاویه‌ای حول محور تقارن استوانه را در سوزش دوبعدی در دو حالت

حرکت چرخشی استوانه با جرم متغیر

$$I \dot{\omega}_x + (J - I) \omega_y \omega_z + \left[\dot{I} - \dot{m} \left(l e^2 + \frac{R^2}{4} \right) \right] \omega_x = M_x \quad (۴۰)$$

$$I \dot{\omega}_y - (J - I) \omega_x \omega_z + \left[\dot{I} - \dot{m} \left(l e^2 + \frac{R^2}{4} \right) \right] \omega_y = M_y \quad (۴۱)$$

$$J \dot{\omega}_z + \left(\dot{J} - \dot{m} \frac{R^2}{2} \right) \omega_z = M_z \quad (۴۲)$$

برای M_z, M_y, M_x معمولاً توابعی از زمان می‌باشند. ابتدا برای

حل معادله (۴۲) دو پارامتر زیر تعریف می‌شوند.

$$\lambda = \left(\dot{J} - \dot{m} \frac{R^2}{2} \right) / J \quad (۴۳)$$

$$\bar{M}_z = M_z / J \quad (۴۴)$$

بنابراین معادله (۴۲) را می‌توان به فرم زیر بازنویسی نمود.

$$\frac{d\omega_z}{dt} + \lambda(t) \omega_z = \bar{M}_z \quad (۴۵)$$

از حل معادله دیفرانسیل فوق نتیجه می‌شود:

$$\omega_z = \left[\omega_{z0} + \int_0^t \bar{M}_z(s) \exp\left(\int_0^s \lambda(\tau) d\tau \right) ds \right] \times \exp\left(- \int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right) \quad (۴۶)$$

از معادله فوق استنباط می‌شود که حرکت چرخشی حول محور تقارن استوانه، تنها به دو پارامتر \bar{M}_z و λ بستگی داشته و گشتاورهای خارجی M_x و M_y ، در میزان سرعت زاویه‌ای ω_z بی‌تاثیرند.

در بررسی حرکت زاویه‌ای عرضی سیستم، پارامتر $\Theta(t)$ به گونه زیر تعریف می‌شود.

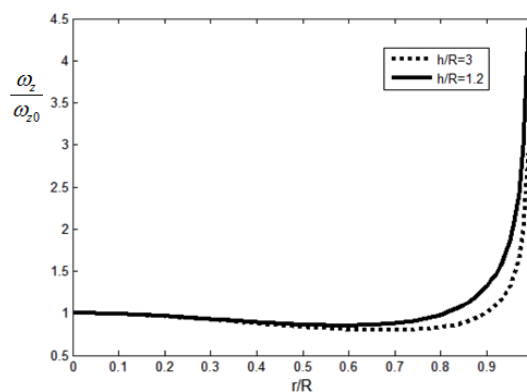
$$\Theta(t) = \int_0^t \omega_z \frac{J - I}{I} dt \rightarrow d\Theta = \omega_z \frac{J - I}{I} dt \quad (۴۷)$$

Θ پارامتری از جنس زاویه و بر مبنای رادیان می‌باشد.

از رابطه (۴۷) می‌توان نوشت:

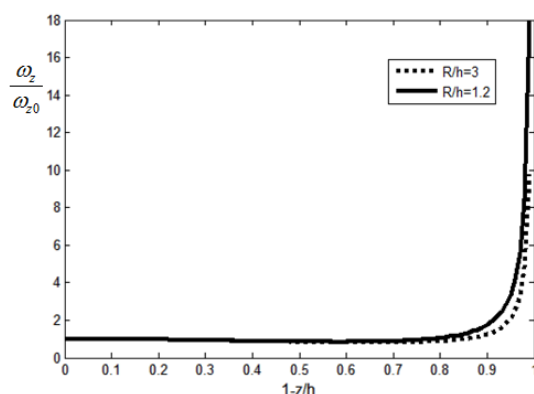
$$\frac{d}{dt} = \omega_z \frac{J - I}{I} \frac{d}{d\Theta} = \omega_z^* \frac{J^* - I^*}{I^*} \frac{d}{d\Theta} \quad (۴۸)$$

درحالی که I^* و J^* توابعی بر حسب Θ در نظر گرفته شده‌اند.



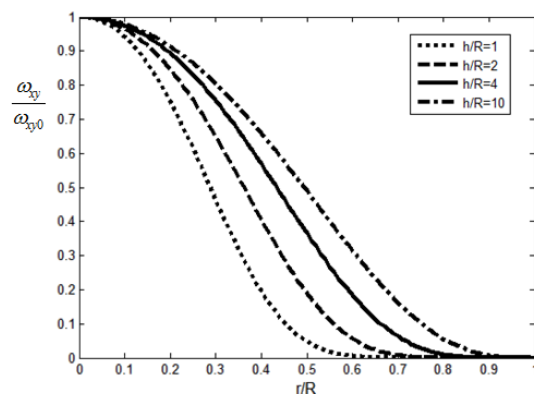
شکل ۹- نمودار تغییرات سرعت زاویه‌ای حول محور تقارن

استوانه در متد سوزش شعاعی- محوری $h > R$



شکل ۱۰- نمودار تغییرات سرعت زاویه‌ای حول محور تقارن

استوانه در متد سوزش شعاعی- محوری $R > h$



شکل ۱۱- نمودار تغییرات سرعت زاویه‌ای عرضی استوانه در

متد سوزش شعاعی- محوری

۴- عوامل پایدار ساز سیستم

در این قسمت، گشتاورهای خارجی بر سیستم استوانه جرم متغیر اعمال می‌گردد. بنابراین معادلات (۱۵)، (۱۶) و (۱۷) به فرم های زیر تغییر می‌یابند.

$$\Gamma^*(\Theta) = \int_0^\Theta \lambda^* d\tau, \Gamma^*(s) = \int_0^s \lambda^* d\tau \quad (58)$$

در معادلات (۵۶) و (۵۷) مشاهده می‌شود که سرعت زاویه‌ای حول محور تقارن (ω_z) و میزان کشیدگی هندسی در جهت محور تقارن (اختلاف $J^* - I^*$) در سرعت زاویه‌ای عرضی سیستم و در نتیجه در پایداری سیستم موثر است. برای روشن‌تر شدن موضوع اگر معادلات (۵۶) و (۵۷) برای یک جسم صلب بیان شود، می‌دانیم:

$$\frac{dI^*}{d\Theta} = \frac{dJ^*}{d\Theta} = \frac{dm_f^*}{d\Theta} = 0 \rightarrow \lambda^* = 0 \rightarrow \Gamma^*(\Theta) = 0 \quad (59)$$

و در نتیجه در حالت خاص اگر گشتاورهای خارجی M_x و M_y مقادیر ثابتی بوده و M_z برابر صفر باشد، دو رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$\omega_x(\Theta) = (\omega_{x0} \cos\Theta - \omega_{y0} \sin\Theta) + \frac{1}{\omega_{z0}(J^* - I^*)} [M_x^* \sin(\Theta) - M_y^*(1 - \cos(\Theta))] \quad (60)$$

$$\omega_y(\Theta) = (\omega_{y0} \cos\Theta + \omega_{x0} \sin\Theta) + \frac{1}{\omega_{z0}(J^* - I^*)} [M_y^*(s) \sin(\Theta) - M_x^*(s)(1 - \cos(\Theta))] \quad (61)$$

همانطور که در دو معادله فوق مشاهده می‌شود، در یک سیستم صلب هر چه سرعت زاویه‌ای حول محور طولی تقارنی بیشتر بوده و یا شکل هندسی سیستم از حالت کروی به شکل استوانه‌ای با لاغری بیشتر پیش رود سیستم در حرکات زاویه‌ای عرضی در برابر تحریکات خارجی دارای سختی ژيروسکوپی بیشتری بوده و پایدارتر می‌گردد.

سیستم‌های جرم ثابت در واقع حالت خاصی از سیستم‌های جرم متغیر تلقی می‌شوند. اگر در معادله (۱)، $\mathbf{v}_r = 0$ باشد، معادله تبدیل به معادله حرکت چرخشی یک جسم صلب می‌گردد. اما در حالت کلی آنچه از معادلات فوق الذکر بر می‌آید این است که در یک سیستم با تقارن محوری، گشتاورهای خارجی M_x و M_y در حرکت چرخشی حول محور تقارن سیستم بی‌تاثیرند، اما

بنا به رابطه (۴۸) معادلات (۴۰) و (۴۱) بر حسب تغییر متغیر Θ به گونه زیر بازنویسی می‌شوند.

$$\frac{d\omega_x}{d\Theta} + \omega_y + \left[\frac{dI^*}{d\Theta} - \frac{dm^*}{d\Theta} (I_e^* + R^2/4) \right] \frac{\omega_x}{I^*} = \frac{M_x^*}{\omega_z(J^* - I^*)} \quad (49)$$

$$\frac{d\omega_y}{d\Theta} - \omega_x + \left[\frac{dI^*}{d\Theta} - \frac{dm^*}{d\Theta} (I_e^* + R^2/4) \right] \frac{\omega_y}{I^*} = \frac{M_y^*}{\omega_z(J^* - I^*)} \quad (50)$$

اگر طرفین معادله (۵۰) در عدد موهومی j ضرب شده و حاصل با طرفین معادله (۴۹) جمع گردد، معادله زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{d\omega_{xy}}{d\Theta} + (\lambda_1^* - j)\omega_{xy} = M_{xy}^* \quad (51)$$

که در آن:

$$\omega_{xy}(\Theta) = \omega_x(\Theta) + j\omega_y(\Theta) \quad (52)$$

$$\lambda^* = \left[\frac{dI^*}{d\Theta} - \frac{dm^*}{d\Theta} (I_e^* + R^2/4) \right] / I \quad (53)$$

$$M_{xy}^* = \frac{M_x^* + jM_y^*}{\omega_z(J^* - I^*)} \quad (54)$$

از حل معادله دیفرانسیل (۵۱) می‌توان نوشت:

$$\omega_{xy} = \left[\omega_{xy0} + \int_0^\Theta M_{xy}^*(s) \exp\left(\int_0^s (\lambda^*(\tau) - j) d\tau\right) ds \right] \times \exp\left(-\int_0^\Theta (\lambda^*(\tau) - j) d\tau\right) \quad (55)$$

با بسط $e^{j\Theta}$, e^{js} و برابر قرار دادن قسمت‌های موهومی و حقیقی دو طرف معادله فوق با یکدیگر دو معادله زیر حاصل می‌گردد.

$$\omega_x(\Theta) = (\omega_{x0} \cos\Theta - \omega_{y0} \sin\Theta) e^{-\Gamma^*(\Theta)} + \int_0^\Theta \frac{e^{[\Gamma^*(s) - \Gamma^*(\Theta)]}}{\omega_z(J^* - I^*)} [M_x^*(s) \cos(s - \Theta) + M_y^*(s) \sin(s - \Theta)] ds \quad (56)$$

$$\omega_y(\Theta) = (\omega_{y0} \cos\Theta + \omega_{x0} \sin\Theta) e^{-\Gamma^*(\Theta)} + \int_0^\Theta \frac{e^{[\Gamma^*(s) - \Gamma^*(\Theta)]}}{\omega_z(J^* - I^*)} [M_y^*(s) \cos(s - \Theta) - M_x^*(s) \sin(s - \Theta)] ds \quad (57)$$

که در آن:

استوانه با جرم متغیر مشاهده گردید که با در نظر گرفتن الگوهای مختلف کاهش جرم نتایج مختلفی بدست می‌آید. در سوزش محوری، سرعت زاویه‌ای حول محور تقارن استوانه در طول فرایند کاهش جرم مقدار اولیه خود را حفظ می‌کند در حالی که در سوزش شعاعی، این سرعت زاویه‌ای با گذشت زمان افزایش می‌یابد. در سوزش محوری، سرعت زاویه‌ای عرضی سیستم دچار واگرایی نمی‌گردد در حالی که در روش شعاعی بسته به میزان (R/h) رفتار سیستم متفاوت است. اگر نسبت $(R/h) > 1.63$ باشد، سیستم دچار ناپایداری می‌گردد. در روش کاهش جرم دوبعدی، شعاعی-محوری، با شرط $\dot{r} = -\dot{z}$ ، هر چه نسبت (R/h) به عدد یک نزدیک شود، میل به افزایش سرعت زاویه‌ای حول محور تقارن بیشتر و سرعت زاویه‌ای عرضی سریعتر کاهش می‌یابد.

۵- در بررسی حرکت چرخشی آزاد، این مساله روشن گردید که حتی بدون وجود گشتاورهای خارجی، سیستم می‌تواند دچار ناپایداری گردد. در بعضی از انواع راکت‌ها در انتهای فرایند سوختن سوخت جامد، تغییرات سریعی در حرکت چرخشی سیستم مشاهده می‌گردد که از آن به نام اثر جت‌دمپینگ یاد می‌کنند. این مساله باعث ایجاد مشکلاتی در کنترل پایداری سیستم‌ها می‌شود. نمودارهای ارائه شده می‌تواند ما را در توجیه رفتار این گونه سیستم‌ها هدایت نماید.

سرعت زاویه‌ای آن و در نتیجه گشتاور M_z و همچنین شکل هندسی سیستم در پایداری سیستم موثر است.

۵- نتیجه گیری

از بررسی حرکت چرخشی یک استوانه جرم متغیر نتایج زیر استنباط می‌شود که می‌توان آن را برای هر سیستم جرم متغیر با شرط داشتن تقارن محوری بسط و تعمیم داد.

۱- حرکت حول محور طولی تقارنی یک سیستم جرم متغیر، از گشتاورهای خارجی عرضی وارد بر سیستم مستقل است.

۲- حرکت زاویه‌ای عرضی سیستم به سرعت زاویه‌ای حول محور تقارن سیستم وابسته است. این سرعت زاویه‌ای می‌تواند اثر گشتاورهای خارجی عرضی وارد بر سیستم را خنثی نماید.

۳- نحوه توزیع جرم، در رفتار چرخشی سیستم موثر است. هر چه شکل سیستم از حالت کروی به حالت استوانه‌ای لاغرتر پیش رود پایداری سیستم بیشتر است.

۴- علاوه بر نیروها و گشتاورهای خارجی وارد بر سیستم، دو عامل مهم، یکی نحوه کاهش جرم و مدل سوختن سوخت و دیگری هندسه شکل سیستم در رفتار چرخشی سیستم موثر است. در بررسی حرکت چرخشی آزاد یک

مراجع

1. Eke, F.O., (1998), "Dynamics Of Variable Mass Systems", Final Technical Report, Submitted by Department Of Mechanical And Aeronautical University Of California Davis, CA95616.
2. Thomson, W.T., (1961), "Introduction to Space Dynamics. John Wiley, New York".
3. Tomson, W.T and G.S.Reiter., (1965), "Jet Damping of a Solid Rocket: Theory and Flight Results" AIAA Journal, vol 3, No 3, pp 413-417.
4. Eke, F.O., (1983), "Dynamics of Variable Mass Systems with Application to The Star 48 Solid Rocket Motor", Advances in the Astronautical Science, v 54, pp 671-678.

5. Shames, I.H., (1982), "Mechanics of Fluids" John Wiley & Sons, Inc.
6. Wang, S.M and F.O.Eke, (1995), "Rotational Dynamics of Axisymmetric Variable Mass Systems" Journal of Applied Mechanics, Vol 62, pp 970-974.
7. Kane, T.R and D.A. Levinson., (1985), "Dynamics: Theory And Applications" McGraw-Hill, Inc.
8. Eke, F.O and S.Wang., (1995), "Attitudbehavior of Variable Mass Cylinder" ASME Journal of Applied Mechanics. Vol 62, No 4, pp 365-376.
9. Rao, K.S., (2006), " Classical Mechanics" Prentice Hall Of India, New Delhi.
10. Meryam, J.L., (1975), "Dynamics". John Wile & Sons, Inc.