

شبیه‌سازی عددی و ارائه روش حل برای جریان سیال غیرنیوتنی تحت تاثیر میدان مغناطیسی در لایه مرزی یک صفحه کشسان

مازیار دهقان^{۱*}، مصطفی میرزایی^۲، آرش محمدزاده^۱

اطلاعات مقاله	چکیده
<p>واژگان کلیدی: سیال غیرنیوتنی، میدان مغناطیسی، صفحه کشسان، تبدیلات تشابهی، شبیه‌سازی عددی.</p>	<p>جریان آرام تراکم‌ناپذیر سیال غیرنیوتنی روی یک صفحه کشسان متحرک، در حضور یک میدان مغناطیسی یکنواخت مطالعه شده است. سرعت صفحه مشخص و در طول آن به صورت خطی تغییر می‌کند. به کمک تبدیلات تشابهی، دستگاه معادلات پاره‌ای حاکم بر جریان به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی تبدیل و سپس توسط روش عددی ارائه شده بر مبنای تفاضل محدود، حل گردیده است. اثرات پارامترهای سیال، جریان و میدان مغناطیسی بر میدان سرعت در لایه مرزی بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش میدان مغناطیسی ضخامت لایه مرزی کاهش می‌یابد. همچنین دیده شده است که در نظر گرفتن مدل نیوتنی برای سیالات غیرنیوتنی که تحت تاثیر میدان مغناطیسی هستند، می‌تواند تا ۱۰٪ خطا به دنبال داشته باشد.</p>

۱- مقدمه

به سیالات مگنتوهیدرودینامیک^۲ نیز گسترش یافته است؛ سیالاتی که میدان مغناطیسی نیز می‌تواند بر روی رفتار آن‌ها تاثیر بگذارد. این امر به دلیل کاربردهای جدید و گسترده‌ی سیالات مگنتوهیدرودینامیک از جمله در ژنراتورها و مبدل‌های قدرت، خنک‌کردن رآکتورها، مبدل‌های حرارتی، فرایند کشش صفحات پلاستیکی در صنایع پلیمری و شکل‌دهی فلزات می‌باشد. کاربرد سیالات مگنتوهیدرودینامیک به زمینه‌های بیوتکنولوژی نیز گسترش یافته است؛ از جمله در داروهای مغناطیسی (رساندن داروها به منطقه خاصی از بدن مانند حمله به تومورها)، جداسازی گلبول‌های قرمز (به‌علت وجود

به‌علت کاربردهای روزافزون صنعتی جریان سیال در روی صفحه با سرعت متغیر، بررسی جریان در لایه مرزی صفحه کشسان به‌عنوان مدل پایه و کلاسیک مورد توجه قرار گرفته است. از جمله مواردی که این نوع جریان‌ها اهمیت پیدا می‌کند می‌توان به فرآیندهای پلیمری و شکل‌دهی فلزات، اشاره نمود. از کشش صفحه، برای شکل‌دهی و رساندن صفحات به ضخامت موردنظر استفاده می‌شود. سرعت حرکت صفحه و توان خنک‌کاری سیال در خواص محصول تولیدی تاثیر به‌سزایی دارد. این بررسی‌ها

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: m-dehghan@aut.ac.ir

۱. دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان؛

۲. دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر.

² magtenohydrodynamic

مولکول‌های اکسید آهن به میدان مغناطیسی واکنش نشان می‌دهد، کنترل جریان خون در جراحی‌ها و
 تئوری لایه مرزی پرائتل کاربرد عمده‌ای در سیالات نیوتنی دارد و طبق فرضیات پیشنهاد شده توسط وی، معادلات با مشتقات پاره‌ای ناویر استوکس به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شوند که با پیچیدگی کمتری قابل حل می‌باشند. یکی از مسائل کلاسیک، جریان بر روی یک صفحه در حال کشش در یک محیط نامحدود از سیال است. کرین [۱] اولین کسی بود که مساله جریان پایدار دو بعدی در لایه مرزی را روی صفحه کشسان که سرعت خطی داشت، را مورد بررسی قرار داد. پس از او افراد زیادی از جمله گوپتا [۲]، چن [۳] و ... کار کرین را گسترش دادند و مساله انتقال حرارت را بررسی کردند. البته تمامی بررسی‌های فوق محدود به سیال‌های نیوتنی بود.

امروزه برای شبیه‌سازی بهتر پدیده‌های مرتبط، به سراغ مدل‌های غیرنیوتنی برای سیالات رفته‌اند [۴-۱۱]. برای این منظور از روش‌های مختلفی برای شبیه‌سازی سیالات غیرنیوتنی استفاده می‌شود، از جمله: سیال ویسکو الاستیک، تنش‌های کوپلی، میکروپلار و قانون توانی^۱. از کارهای اولیه در استفاده از مدل توانی برای سیالات غیرنیوتنی می‌توان به آکریووس [۴] و شووالتر [۵] نام برد. همچنین پاولوف [۶]، چار [۷]، اندرسون [۸] چپام [۹] و ... مدل ویسکو الاستیک را در سیالات مگنتوهیدرودینامیک بررسی کرده‌اند.

از دیگر مطالعات انجام گرفته در این زمینه می‌توان به این موارد اشاره کرد: میرسا [۱۰] رفتار بیو-سیالات تحت تاثیر میدان مغناطیسی را با مدل ویسکو الاستیک بررسی کرده و کاربردهای آن را در بیوتکنولوژی بیان نموده است. آبل و همکاران [۱۱] سیال غیرنیوتنی (طبق قانون توانی) را تحت تاثیر میدان مغناطیسی صفحه کشسان عمودی در حضور منبع حرارتی مورد بررسی قرار داده‌اند. آن‌ها در تحقیق خود، تاثیر پارامترهای مختلف از جمله عدد

پرائتل، میدان مغناطیسی و توان غیرنیوتنی را روی پروفیل‌های سرعت و دما در لایه مرزی مطالعه نمودند.
 اخیرا خان و پاپ [۱۲] به بررسی انتقال حرارت نانوسیال در لایه مرزی صفحه کشسان طبق مدل نیوتنی پرداختند. آن‌ها حالتی خاص را برای جریان صفحه فرض نموده‌اند که برای آن حل تحلیلی موجود می‌باشد. سپس با معلوم بودن پروفیل سرعت، به بررسی انتقال حرارت پرداخته‌اند. ماکینه و عزیز [۱۳] به بررسی انتقال حرارت در لایه مرزی صفحه کشسان تحت شرایط مرزی انتقال حرارت جابه‌جایی با محیط نامحدود در طرف دیگر صفحه پرداخته‌اند. در مطالعه آن‌ها نانو سیال با رفتار نیوتنی در نظر گرفته شده بود. باچوک و همکاران [۱۴] به بررسی جریان و انتقال حرارت نانو سیال بر روی صفحه کشسان با دمش/مکش یکنواخت در حالت ناپایا پرداخته‌اند. مدل در نظر گرفته در تحقیق آن‌ها، مدل نیوتنی برای سیال می‌باشد. ابراهیم و شانکر [۱۵] به بررسی جریان و انتقال حرارت سیال نیوتنی در لایه مرزی صفحه کشسان پرداخته‌اند. تابع سرعت صفحه در مطالعه آن‌ها متغیر با زمان بوده است.

در کار حاضر معادلات ساختاری حاکم بر سیال تحت تاثیر میدان مغناطیسی به صورت عام ارائه می‌شود که برای مدل‌سازی سیال غیرنیوتنی از قانون توانی استفاده شده است. سپس جریان پایدار یک سیال غیرنیوتنی بر روی یک صفحه کشسان (با سرعت خطی) در حضور میدان مغناطیسی (ثابت) در نظر گرفته مطالعه می‌شود. معادلات پاره‌ای حاکم بر جریان به کمک تبدیلات تشابهی به معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی تبدیل می‌شوند. این معادلات ابتدا به دستگاه معادلات جبری تبدیل و سپس به کمک روش عددی تفاضل محدود^۲ ارائه شده توسط نویسندگان کار حاضر، حل می‌شوند. ابتدا اعتبارسنجی نتایج روش عددی ارائه شده انجام می‌شود و سپس در ادامه به بررسی تاثیر پارامترهای جریان و سیال بر میدان سرعت سیال پرداخته می‌شود.

² Finite Difference (F.D)

¹ Power law

۲- معادلات ساختاری

در ابتدا باید معادلات بقای سیال مشخص گردد. معادلات بقای لازم برای تعیین حرکت سیال عبارتند از: بقای جرم، بقای مومنتوم و بقای انرژی. معادله انتگرالی بقای جرم برای یک سیال دلخواه عبارتست از [۱۶]:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho dx = - \oint_{\Gamma} \rho v \cdot \bar{n} ds \quad (1)$$

به کمک قضیه دیورژانس می توان نوشت [۱۶]:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} \rho + \text{div}(\rho v) \right] dx = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \text{div}(\rho) + \rho \text{div}(v) = \quad (2)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot v$$

که $\frac{D}{Dt}$ مشتق مادی است. برای سیال تراکم ناپذیر

تغییرات چگالی قابل صرف نظر کردن می باشد، لذا معادله پیوستگی برای سیالات تراکم ناپذیر به صورت زیر درمی آید:

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (3)$$

برای معادله بقای مومنتوم، می توان از قانون دوم نیوتن کمک گرفت و آن را در واحد حجم به صورت زیر نوشت [۱۶]:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot v \cdot v \right) = \nabla \cdot S + \rho M + \rho g \quad (4)$$

که S تانسور تنش کوشی و M بردار نیروی حجمی وارده بر سیال و g بردار نیروی جاذبه است. باتوجه به ماهیت و طبیعت سیالات، تانسور تنش کوشی به صورت مجموع قسمت های انحرافی^۱ و کروی^۲ نوشته می شود [۱۷]:

$$S = \text{dev}(S) + \text{sph}(S) = \tau + \frac{1}{3} S_{ii} I = \tau - PI \quad (5)$$

که I تانسور واحد و $-\frac{1}{3} S_{ii} = -\frac{1}{3} \text{tr}(S)$ همان فشار

سیال است. برای تعیین تانسور تنش کوشی از تئوری

رینر-ریولین^۳ کمک گرفته می شود. طبق این تئوری، تانسور تنش کوشی تابعی از تانسور سرعت تغییر شکل^۴ (D) به صورت زیر می باشد [۱۷]:

$$S = \phi_0 I + \phi_1 (II_D, III_D) D \quad (6)$$

تانسور سرعت تغییر شکل (D) در واقع قسمت متقارن تانسور گرادیان بردار سرعت می باشد:

$$D_{ij} = \text{sym}(\nabla v_{ij}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (7)$$

ϕ_0 مقداری ثابت دارد و III_D, II_D, I_D ناوردهای^۵ تانسور D هستند:

$$I_D = \text{tr}(D) = D_{ii} = 0 \text{ (from eq. 3)}$$

$$II_D = 0.5 [\text{tr}(D)^2 - \text{tr}(D^2)] = -0.5 \text{tr}(D^2) \quad (8)$$

$$III_D = \det(D)$$

برای کامل شدن معادلات باید ضرایب ϕ_0 و ϕ_1 تعیین شوند. با مقایسه روابط (۵) و (۶) می توان دریافت که $\phi_0 = -$ همان فشار سیال است. همچنین از آزمایشات تجربی مشخص شده است که وابستگی ϕ_1 به ناوردهای سوم تانسور سرعت تغییر شکل (III_D) ناچیز است [۱۷]. به عبارت دیگر ϕ_1 فقط تابعی از ناوردهای دوم می باشد. از قانون دوم ترمودینامیک نتیجه می شود که در حالت واقعی باید $\phi_1 > 0$ باشد [۱۷].

$$S = -pI + \phi_1 (II_D) D \quad (9)$$

از آنجا که II_D همواره منفی و ϕ_1 همواره مثبت است و باتوجه به نتایج تجربی، معادله (۹) به صورت زیر بازنویسی می شود و به سیالاتی که از این معادله پیروی می کنند سیالات نیوتنی تعمیم یافته^۶ گفته می شود که هم شامل سیالات نیوتنی و هم شامل سیالات غیرنیوتنی (غیرخطی) می باشد [۱۷]:

$$S = -pI + 2\gamma(-4II_D) D \quad (10)$$

³ Reiner-Rivlin

⁴ Deformation rate

⁵ Invariants

⁶ Generalized Newtonian fluids

¹ Deviatoric

² Spherical

که J چگالی جریان و B شار میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد. برای تعیین چگالی جریان، از قانون اهم کمک گرفته می‌شود [۱۹]:

$$J = \sigma(E + v \times B) \quad (14)$$

که σ هدایت الکتریکی، E میدان الکتریکی و v سرعت سیال می‌باشد. در مساله حاضر میدان الکتریکی و القای مغناطیسی قابل صرف‌نظر است [۱۹]. بنابراین برای نیروی وارده از میدان مغناطیسی بر سیال می‌توان نوشت:

$$M = \sigma(v \times B) \times B = -\sigma v B^2 \quad (15)$$

اکنون معادلات ساختاری حاکم بر سیال غیرنیوتنی با استفاده از مدل توانی مشخص شده‌اند. این معادلات صورتی کلی دارند و فارغ از دستگاه مختصات نوشته شده‌اند. برای جریان در لایه مرزی، به کمک تعاریف و مفاهیم می‌توان ساده‌سازی‌هایی اعمال نمود.

۳- معادلات حاکم بر جریان در لایه مرزی

در ابتدا باید دستگاه مناسب را انتخاب نمود. بدیهی است که مناسب‌ترین دستگاه مختصات باتوجه به فیزیک مساله، دستگاه کارتزین (X, Y) می‌باشد. هندسه مساله در شکل ۱ نمایش داده شده است.



شکل ۱- شماتیک هندسه مساله

از آنجا که جهت میدان مغناطیسی وارد شده بر سیال عمود بر جهت حرکت سیال، یعنی در راستای y می‌باشد و نیروی وارده از میدان مغناطیسی (نیروی لورنز) عمود بر جهت میدان مغناطیسی است، لذا در راستای y نیرویی

برای تعیین γ از مدل‌سازی استفاده می‌شود. معمول‌ترین مدل استفاده شده، مدل توانی^۱ است که در کار حاضر نیز از این مدل بهره برده شده است. در این رویکرد، γ به‌صورت زیر مدل می‌شود [۱۷ و ۱۸]:

$$\gamma = r(-4II_D)^{n-1/2} \quad (11)$$

که n توان غیرنیوتنی و r ضریب سازگاری می‌باشد. بنابراین تانسور تنش کوشی برای مدل توانی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$S_{ij} = -p\delta_{ij} + 2r|4II_D|^{n-1/2} D_{ij} \quad (12)$$

هنگامی که توان غیرنیوتنی برابر یک باشد، معادله مومنوم به‌کمک معادله ساختاری (۱۲) به‌صورت معادله ناویر-استوکس درمی‌آید و سیالی که از آن تبعیت می‌کند نیوتنی نام دارد. در این حالت فرض می‌شود که مقدار ویسکوزیته مستقل از تغییر شکل اعمالی می‌باشد. هنگامی که n کوچک‌تر از یک باشد سیال را شبه-پلاستیک^۲ یا تحلیل‌رونده^۳ گویند زیرا با افزایش سرعت تغییر شکل، مقاومت سیال در برابر تغییر شکل (یا در واقع همان ویسکوزیته) کمتر می‌شود. اغلب سیالات در این دو دسته جای می‌گیرند. حالت دیگر هنگامی است که n بزرگتر از واحد باشد. به این گونه سیالات، اتساع‌پذیر^۴ یا تقویت‌شونده^۵ گویند. در واقعیت سیالات کمی وجود دارند که از این دسته معادلات پیروی کنند.

حال باید نیرویی که از میدان مغناطیسی بر سیال وارد می‌شود (نیروی لورنز^۶) و به‌صورت نیروی حجمی (M) در معادله بقای مومنوم (۴) نمایش داده شده است، مشخص گردد [۱۹]:

$$M = J \times B \quad (13)$$

¹ Power-law

² Pseudo-plastic

³ Shear thinning

⁴ Dilatant

⁵ Shear thickening

⁶ Lorenz force

$$n| -f''|^{n-1} f''' - f'^2 + \left(\frac{2n}{n+1}\right) f f'' - m f' = 0, \quad (21)$$

$$m = \frac{\sigma B^2}{b}$$

m پارامتر بی بعد میدان مغناطیسی می باشد.

شرایط مرزی (۱۷) برای رابطه (۲۱) نیز به این صورت قابل بیان است:

$$\begin{aligned} f(\eta) &= 0 \quad \text{at} \quad \eta = 0, \\ f'(\eta) &= 1 \quad \text{at} \quad \eta = 0, \\ f'(\eta) &\rightarrow 0 \quad \text{as} \quad \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (22)$$

۴- روش حل عددی

برای حل معادله انتقال یافته جریان در لایه مرزی (رابطه ۲۱) که یک معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه سوم و درجه دوم است، این رابطه ابتدا به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول (رابطه ۲۴) تبدیل می شود. سپس این معادلات به کمک روش تفاضل محدود^۳ به یک دستگاه معادلات جبری (روابط ۲۵) تا (۲۷) تبدیل و با روش شوتینگ^۴ حل می شوند. برای این کار ابتدا متغیرهای زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} y_1 &= f \\ y_2 &= f' \\ y_3 &= f'' \end{aligned} \quad (23)$$

معادلات به صورت زیر بازنویسی می شوند:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1' \\ y_3 &= y_2' \\ n| -y_3|^{n-1} y_3' - y_2^2 + \left(\frac{2n}{n+1}\right) y_1 y_3 - m y_2 &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

با استفاده از تفاضل مرکزی معادلات به صورت زیر تبدیل خواهند شد:

$$\frac{y_2^{i+1} - y_2^i}{h} = 0.5(y_3^i + y_3^{i+1}) \quad (25)$$

موثر وارد نمی شود. با انجام ساده سازی های لایه مرزی می توان نوشت [۲۰ و ۲۱]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (16)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -v \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n - \sigma B^2 u$$

سیال جریان آزاد^۱ (در خارج از لایه مرزی)، ساکن می باشد و برای صفحه، سرعت به صورت $U(x) = bx$ در نظر گرفته شده است. بنابر این شرایط مرزی به این صورت می باشند:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= U(x), \\ v(x, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$u(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad y \rightarrow \infty$$

تبدیلات تشابهی نیز به این صورت تعریف می شوند [۲۱]:

$$\eta = \frac{y}{x} (\text{Re}_x)^{\frac{1}{n+1}}, \quad (18)$$

$$\psi(x, y) = Ux (\text{Re}_x)^{-\frac{1}{n+1}} f(\eta)$$

که در معادله فوق $U(x)$ سرعت صفحه می باشد (نه سرعت جریان آزاد). همچنین در رابطه (۱۸) n توان غیرنیوتنی در مدل توانی و $n=1$ حالت خاص سیال نیوتنی را نشان می دهد. رابطه (۱۸) حالت کلی تری از تعریف پرائنتل در رابطه با تغییر مختصات (تبدیلات تشابهی) است. در واقع با انجام مطالعه مقیاسی^۲، می توان دریافت که ضخامت لایه مرزی به صورت $\delta \sim x \text{Re}_x^{-\frac{1}{n+1}}$ است. از آنجا که متغیر تشابهی متناسب با $y/\delta(x)$ در نظر گرفته می شود، بنابراین می توان به تعریف ارائه شده در رابطه (۱۸) برای متغیر تشابهی دست یافت.

عدد رینولدز تعمیم یافته در معادله (۱۸) به این صورت تعریف می شود [۲۱]:

$$\text{Re}_x = \frac{U^{2-n} x^n}{\nu} \quad (19)$$

و مولفه های سرعت:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (20)$$

پس از انجام اعمال ریاضی به معادله زیر می توان رسید:

³ Finite Difference

⁴ Shooting Method

¹ Free stream

² Scale analysis

۵- بحث بر روی نتایج

برای صحنه‌گذاری روی نتایج به دست آمده، نتایج مربوط به حالات خاصی که در کارهای قبلی بررسی شده است مقایسه می‌شود. برای مقایسه از مشتق دوم تابع تشابهی استفاده شده است که تعبیری فیزیکی دارد و طبق رابطه (۲۹) مرتبط با ضریب اصطکاک روی صفحه می‌باشد:

$$C_f = - \left(\frac{2\tau_{xy}}{\rho U^2} \right)_{y=0} = 2(-f''(0))^n (\text{Re}_x)^{\frac{-1}{n+1}} \quad (29)$$

در اینجا نتایج اندرسون و دانداپات [۱۸] و پراساد و همکاران [۲۱] آورده شده است. اندرسون و دانداپات [۱۸] سیال غیرنیوتنی را روی صفحه کشسان بررسی کرده‌اند و پراساد و همکاران [۲۱] اثر میدان مغناطیسی را هم در این مسئله در نظر گرفته‌اند. مقایسه بین نتایج کار حاضر و مراجع [۱۸] و [۲۱] در جدول ۱ آورده شده است. مشاهده می‌شود که تطابق مناسبی بین نتایج وجود دارد.

$$\frac{y_1^{i+1} - y_1^i}{h} = 0.5(y_2^i + y_2^{i+1}) \quad (26)$$

$$n \left| -y_3^i \right|^{n-1} \frac{y_3^{i+1} - y_3^{i-1}}{2h} - (y_2^i)^2 + \left(\frac{2n}{n+1} \right) y_1^i y_3^i - m y_2^i = 0 \quad (27)$$

برای حل معادله (۲۷) به دو مقدار y_3^0, y_3^1 نیاز است. شرط مرزی است که حدس زده می‌شود. با گسسته‌سازی پیشرو در مرز، y_3^1 به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$y_3^1 = y_3^0 + h f'''(0) \quad (28)$$

پس از آن معادلات (۲۵)، (۲۶) و (۲۷) به ترتیب حل می‌شوند و در نهایت شرط $y_2^{\infty} = 0$ چک شده و حدس اولیه تصحیح می‌شود (با برون‌یابی خطی) و دوباره همین روند تکرار می‌شود تا به جواب درست برسد. روش فوق روشی ابتکاری از مرتبه دقت دو برای حل معادله غیرخطی مساله حاضر است که توسط نویسندگان کار حاضر ارائه و تعدیل شده است. تمامی تعریفات و جابه‌جایی طرفین معادلات روی شبکه محاسباتی به منظور رسیدن به یک راه صریح‌تر و آسان‌تر برای مواجهه با ترم غیرخطی $n \left| -f'' \right|^{n-1} f''' = \eta$ انجام شده است. گام عددی به کار گرفته شده در کار حاضر به منظور رسیدن به تعادل بین دقت بالاتر و زمان حل معقول، 10^{-5} انتخاب شده است که تغییرات نتایج با نصف کردن گام، کمتر از ۰.۱٪ می‌باشد.

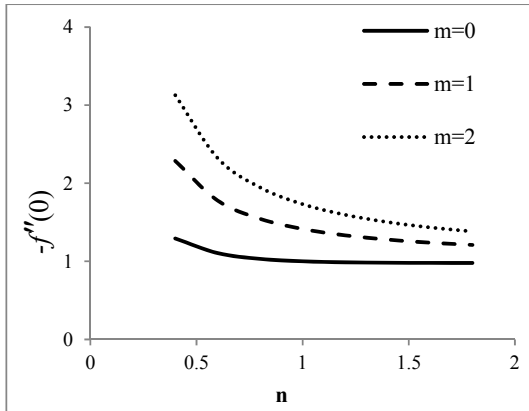
جدول ۱- مقایسه نتایج برای $-f''(0)$

$n=0.4$	$n=0.6$	$n=0.8$	$n=1$	$n=1.2$	$n=1.5$	
1.289	1.100	1.031	1.000	0.9874	0.9809	کار حاضر
1.273	1.096	1.029	1.00	0.987	0.981	اندرسون و دانداپات [۱۸]
1.280	1.099	1.029	1.000	0.9874	0.9809	پراساد و همکاران [۲۱]

و در سیالات دیلاتانت ($1 < n < 2$) کمتر از سیالات نیوتنی می‌باشد. نکته مهم در این نمودار در این است که هرچه سیال توان غیرنیوتنی (n) کمتری داشته باشد، یعنی تحت تاثیر نرخ کرنش مقاومت کمتری نشان دهد، توان کمتری برای انتقال تنش دارد. به عبارت دیگر تغییر شکل بیشتری داشته و به همین دلیل ضخامت لایه مرزی نیز بیشتر خواهد بود. نکته دیگر این که تاثیر توان غیرنیوتنی

در نمودار شکل ۲ اثر توان غیرنیوتنی (n) در مدل توانی (که میزان غیرنیوتنی بودن سیال را تعیین می‌کند) بر پروفیل سرعت بی‌بعد در راستای صفحه نشان داده شده است. از شکل ۲ مشاهده می‌شود که با افزایش توان غیرنیوتنی (n) مقدار ضخامت لایه مرزی کاهش پیدا می‌کند. به طوری که ضخامت لایه مرزی در سیالات سودو پلاستیک ($0 < n < 1$) بیشتر از سیالات نیوتنی ($n=1$) است

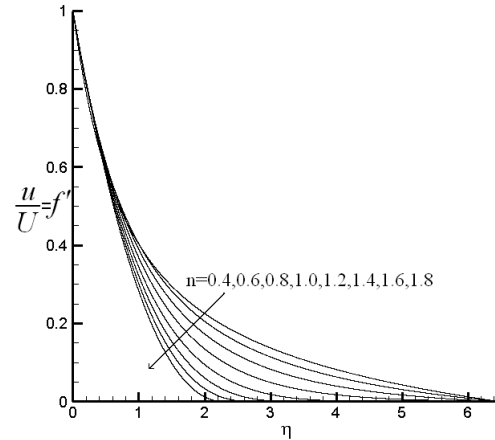
از آنجاکه ضریب اصطکاک نسبت مستقیم با $f''(0)$ دارد، تاثیر میدان مغناطیسی (m) و توان غیرنیوتنی (n) بر $f''(0)$ در شکل ۴ نشان داده شده است. همچنین در جدول ۲ مقادیر $f''(0)$ برای مقادیر مختلف n و m آورده شده است.



شکل ۴- تاثیر مقادیر مختلف میدان مغناطیسی (m) و توان غیرنیوتنی (n) بر $f''(0)$ (ضریب اصطکاک)

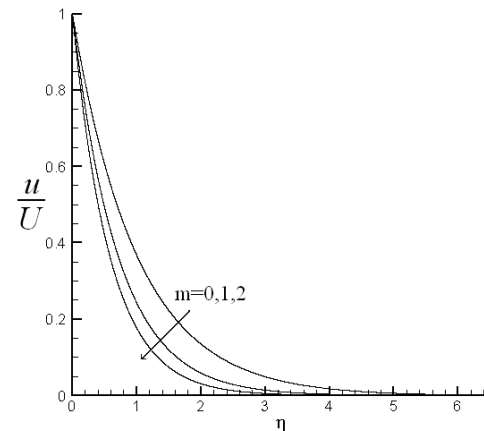
در شکل ۴ مشاهده می‌شود که با افزایش میدان مغناطیسی ضریب اصطکاک افزایش و با افزایش توان غیرنیوتنی (n) ضریب اصطکاک کاهش پیدا می‌کند. افزایش ضریب اصطکاک با افزایش میدان مغناطیسی قابل انتظار است. زیرا همان‌طور که در شکل ۳ دیده شده است، افزایش میدان مغناطیسی باعث افزایش نیروی پسا شده و مقاومت سیال را در برابر حرکت صفحه تقویت می‌کنند؛ به عبارت دیگر، نیروی بیشتری را از طریق سیال به صفحه وارد می‌کند و در نتیجه ضریب اصطکاک روی صفحه افزایش می‌یابد. نکته دیگر این‌که تغییرات ضریب اصطکاک برای سیال تحلیل‌رونده ($n < 1$) نسبت به تغییر توان غیرنیوتنی (n) بیشتر از سیال نیوتنی و سیال تقویت‌شونده ($n > 1$) است. همچنین دیده می‌شود که با افزایش میدان مغناطیسی، اهمیت مدل غیرنیوتنی افزایش یافته و تغییرات نسبت به توان غیرنیوتنی بیشتر می‌شود. به عبارت دیگر مشاهده می‌شود که اگر مدل نیوتنی فرض شود، به اندازه ۱۰٪ برای سیال تحلیل‌رونده و ۵۰٪ برای سیال

(n) در نزدیکی دیواره کم است و تفاوتی بین نمودارها دیده نمی‌شود. اما با فاصله گرفتن از صفحه کشسان، تاثیر مدل‌سازی غیرنیوتنی بهتر دیده می‌شود و کاملاً ملموس می‌باشد.



شکل ۲- تاثیر توان غیرنیوتنی (n) بر پروفیل سرعت بی‌بعد در لایه مرزی ($m=0$)

نمودار شکل ۳ تاثیر میدان مغناطیسی بر پروفیل سرعت بی‌بعد در راستای صفحه را در لایه مرزی نشان می‌دهد. در شکل ۳ مشخص است که با افزایش میدان مغناطیسی، ضخامت لایه مرزی کم می‌شود. دلیل این امر نیز نیروی وارده از میدان مغناطیسی (نیروی لورنتز) می‌باشد که نقشی همانند نیروی پسا ایفا می‌کند. به طوری که افزایش این نیرو (متعاقب افزایش میدان مغناطیسی) باعث کاهش سریعتر سرعت سیال روی صفحه می‌شود و ضخامت لایه مرزی کاهش می‌یابد.



شکل ۳- تاثیر میدان مغناطیسی (m) بر پروفیل سرعت برای $n=1$

تقویت‌شونده دچار خطا خواهیم شد. این مساله اهمیت حیاتی در نظر گرفتن مدل غیرنیوتنی برای سیالات تحت تاثیر میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد.

افزایش می‌یابد، به حرکت درمی‌آید. برای حل معادله معمولی غیرخطی حاصله از انتقال تشابهی، از روش تفاضل محدود تصحیح شده و ارائه شده توسط نویسندگان کار حاضر برای این دسته از معادلات خاص، استفاده شده است. بررسی تاثیرات پارامترهای سیال، جریان و میدان مغناطیسی بر جریان سیال انجام گرفته است. از نتایج مهم کار حاضر می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱. افزایش توان غیرنیوتنی (n) در قانون توانی، ضخامت لایه مرزی را کاهش می‌دهد همچنین این افزایش باعث کاهش ضریب اصطکاک (روی صفحه) می‌شود.
۲. میدان مغناطیسی ضخامت لایه مرزی را کاهش می‌دهد و همانند یک نیروی پسا عمل می‌کند.
۳. افزایش میدان مغناطیسی باعث افزایش ضریب اصطکاک روی صفحه می‌شود.

۴. برای سیالاتی که تحت تاثیر میدان مغناطیسی هستند در نظر گرفتن مدل غیرنیوتنی برای سیال حیاتی می‌باشد. به طوریکه مدل نیوتنی، مقدار ضریب اصطکاک روی صفحه را با ۱۰۰٪ خطا برای سیالات تحلیل رونده ($n < 1$) و ۵۰٪ خطا برای سیالات تقویت شونده ($n > 1$) نشان خواهد داد.

جدول ۲- اثر میدان مغناطیسی (m) و توان غیرنیوتنی (n) بر مشتق دوم تابع تشابهی روی دیواره ($\frac{1}{f''(0)} \propto C_{f,x}^{\frac{1}{n}} \text{Re}_x^{\frac{1}{n+1}}$)

n	m=0	m=1	m=2
0.4	-1.292	-2.285	-3.127
0.6	-1.105	-1.777	-2.321
0.8	-1.032	-1.544	-1.945
1	-1.000	-1.414	-1.732
1.2	-0.9870	-1.333	-1.596
1.4	-0.9819	-1.278	-1.502
1.6	-0.9799	-1.239	-1.434
1.8	-0.9796	-1.210	-1.382

۶- نتیجه‌گیری

معادلات ساختاری برای سیالات غیرنیوتنی تحت تاثیر میدان مغناطیسی به صورت عام ارائه شده‌اند. سپس جریان در لایه مرزی صفحه کشسان بررسی و معادلات حاکم بر جریان آن بر مبنای تبدیلات تشابهی به معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه سوم و از درجه دوم تبدیل شده‌اند. سیال مفروض، در اثر حرکت صفحه کشسان که سرعت آن با حرکت در جهت جریان به صورت خطی

مراجع

- [1] Crane, L.J. (1970). "Flow past a stretching plate". *Z Angew Math Phys*, Vol. 21, pp. 645–647.
- [2] Gupta, P.S., Gupta, A.S. (1977). "Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction or blowing". *Can J Chem Eng*, Vol. 55, pp. 744–746.
- [3] Chen, C.K., Char, M.I. (1988). "Heat transfer of a continuous stretching surface with suction or blowing". *J Math Anal Appl*, Vol. 135, pp. 568–580.
- [4] Acrivos, A., Shah, M., Petersen, E.E. (1960). "Momentum and heat transfer in laminar boundary layer flows of non-Newtonian fluids past external surfaces". *AIChE J*, Vol. 6, pp. 312–317.
- [5] Schowalter, W.R. (1960). "The application of boundary-layer theory to power-law pseudoplastic fluids: similarity solutions". *AIChE J*, Vol. 6, pp. 25–28.
- [6] Pavlov, K.B. (1974). "Magnetohydrodynamic flow of an incompressible viscous fluid caused by deformation of a plane surface". *Magninaya Gidrodinamika (USSR)*, Vol. 4, pp. 146–147.

- [7] Char, M.I. (1994). "Heat and mass transfer in a hydromagnetic flow of a visco-elastic fluid over a stretching sheet". *J Math Anal Appl*, Vol. 186, pp. 674–689.
- [8] Andersson, H.I. (1992). "MHD flow of a visco-elastic fluid past a stretching surface". *Acta Mech*, Vol. 95, pp. 227–230.
- [9] Chiam, T.C. (1997). "Magnetohydrodynamic heat transfer over a non-isothermal stretching sheet". *Acta Mech*, Vol. 122, pp. 169–179.
- [10] Misra, J.C., Shit, G.C. (2009). "Biomagnetic viscoelastic fluid flow over a stretching sheet". *Appl. Math. Comput.* Vol. 210, No. 2, pp. 350–361.
- [11] SubhasAbel, M., Siddheshwar, P.G., Mahesha, N. (2009). "Effects of thermal buoyancy and variable thermal conductivity on the MHD flow and heat transfer in a power-law fluid past a vertical stretching sheet in the presence of a non-uniform heat source". *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 44, pp. 1-12.
- [12] Khan, W.A., Pop, I. (2010). "Boundary-layer flow of a nanofluid past a stretching sheet". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 53, pp. 2477–2483.
- [13] Makinde, O.D., Aziz, A. (2011). "Boundary layer flow of a nanofluid past a stretching sheet with a convective boundary condition". *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 50, pp. 1326-1332.
- [14] Bachok, N., Ishak, A., Pop, I. (2012). "Unsteady boundary-layer flow and heat transfer of a nanofluid over a permeable stretching/shrinking sheet". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 55, pp. 2102–2109.
- [15] Ibrahim, W., Shanker, B. (2012). "Unsteady MHD boundary-layer flow and heat transfer due to stretching sheet in the presence of heat source or sink". *Computers & Fluids*, Vol. 70, pp. 21–28.
- [16] White, F.M., (2006). "Viscous Fluid Flow". third^{ed}. McGraw-Hill, New York.
- [17] Astarita, G., Marrucci, G. (1974). "Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics". McGraw-Hill Book Company (UK).
- [18] Andersson, H.I., Dandapat, B.S. (1991). "Flows of a power law fluid over a stretching sheet". *Stability Appl Anal Continuous Media*, Vol. 1, pp. 339–347.
- [19] Wang, Y., Hayat, T., Hutter, K. (2005). "On non-linear magnetohydrodynamic problems of an Oldroyd 6-constant fluid". *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 40, pp. 49– 58.
- [20] Denier, J.P., Dabrowski, P.P. (2004). "On the boundary layer equation for power law fluid". *Proc R Soc London Ser A*, Vol. 460, pp. 3143–3158.
- [21] Prasad, K.V., Pal, D., Datti, P.S., (2009). "MHD power-law fluid flow and heat transfer over a non-isothermal stretching sheet". *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, Vol. 14, pp. 2178–2189.