

## مدل سازی روش آرایه فازی برای انتشار مودی خاص از امواج فراصوت در ورق تک لایه و دو لایه

امین میرزاخانی نافچی<sup>۱\*</sup>

چکیده	اطلاعات مقاله
<p>در این مقاله انتشار امواج هدایت شده‌ی فراصوت در ورق‌های همسانگرد تک لایه و دو لایه مورد بررسی قرار می‌گیرد و منحنی‌های پراکندگی، شامل دیاگرام‌های طیف فرکانس، سرعت فاز، سرعت گروه و زاویه‌ی تابش در ورق‌های تک لایه و دو لایه استخراج می‌شوند. در ادامه با استفاده از منحنی‌های پراکندگی بدست آمده، به نحوه‌ی تحریک یک مود خاص در یک فرکانس پروب به کمک روش آرایه فازی پرداخته می‌شود و نمودارهای زاویه تابش بر حسب فرکانس برای ورق تک لایه و دو لایه رسم و نتایج برای ورق تک لایه و دو لایه مقایسه می‌شوند.</p>	<p><b>واژگان کلیدی:</b> امواج فراصوت منحنی پراکندگی سرعت فاز سرعت گروه آرایه فازی</p>

### ۱- مقدمه

این کار نیاز به رسم منحنی‌های پراکندگی ناشی از انتشار موج در جسم می‌باشد.

دمنکو و مازیکا [۱]، به بررسی روش‌های رسم منحنی پراکندگی برای یک ورق تک لایه و چند لایه پرداختند. هنرور و همکاران [۲]، از نمایش سه بعدی معادله فرکانس منحنی پراکندگی را رسم کردند. رز [۳]، منحنی پراکندگی سرعت فاز و سرعت گروه را برای سطح بالایی ریل آهن و ورق تک لایه رسم کرد. هو و ریس [۴]، با توجه به منحنی‌های پراکندگی، نتیجه گرفتند که مود S0 بهترین مود برای بازرسی شیشه‌های ایمنی می‌باشد. دسچامپس و همکاران [۵]، پس از رسم منحنی پراکندگی یک ورق آلومینیومی به تفسیر آن پرداختند. ژونگ و رز [۶]، نشان دادند که موج لمب نتایج خوبی برای تشخیص عیوب در یک ورق آلومینیومی دارند.

در این مقاله علاوه بر رسم منحنی پراکندگی به چگونگی تحریک یک مود خاص در ورق تک لایه و دو لایه به کمک روش آرایه فازی پرداخته می‌شود و نتایج با

ایمنی قطعات صنعتی ایجاب می‌نماید که به نحوی در مورد سالم بودن قطعات ساخته شده آزمون‌هایی به عمل آید. یکی از آزمون‌های غیر مخربی که امروزه بسیار از آن استفاده می‌شود، تست امواج فراصوت می‌باشد.

هنگامیکه یک ضربه به صورت هارمونیک بر روی سطح ورق نواخته شود، تمامی مودها در فرکانس تحریک، در ورق منتشر می‌شوند. رفتار پراکندگی مودهای منتشر شده در ورق باعث می‌شود که مودها در زمان‌های مختلفی به عیب یا ناپیوستگی برخورد کنند به همین دلیل استخراج اطلاعات مورد نیاز از سیگنال‌های منعکس شده از مرز عیب کاری مشکل می‌باشد. برای غلبه بر این مشکل نیاز است تا فقط مود خاصی از موج در ورق منتشر شود، برای

\* پست الکترونیک نویسنده مسئول: amin.mirzakhani@yahoo.com

۱. مربی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۲۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران.

ضخامت استفاده می‌گردد. در شکل ۱ نمونه ای از بازرسی یک لوله توسط روش آرایه فازی نمایش داده شده است.

یکدیگر مقایسه می‌شوند. از روش آرایه فازی برای بازرسی جوش و خوردگی، تشخیص عیوب قطعات و اندازه‌گیری

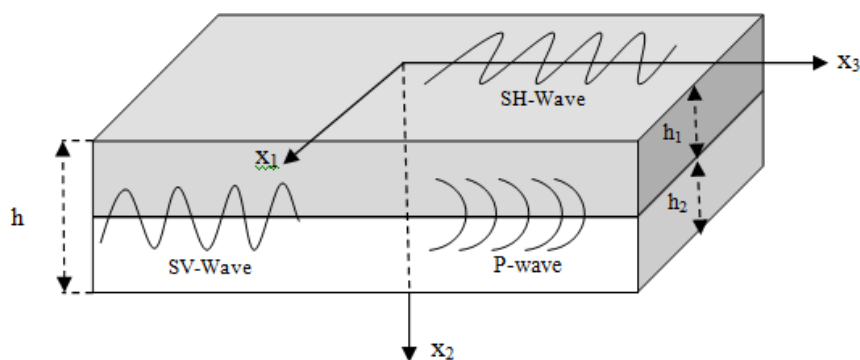


شکل ۱- بازرسی خط لوله به کمک روش آرایه فازی.

می‌توانند به دو صورت موج برشی عمودی<sup>۳</sup> و افقی<sup>۴</sup> در ورق انتشار پیدا کنند.

## ۲- انتشار موج در ورق

انتشار امواج فراصوت در ورق‌ها به دو شکل امواج طولی<sup>۱</sup> و برشی<sup>۲</sup> صورت می‌گیرد. موج‌های برشی مطابق با شکل ۲



شکل ۲- انتشار موج در ورق دو لایه.

در ورق‌ها از تداخل بازگشت‌های متعددی که موج‌های طولی و عرضی از سطح آزاد ورق دارند، موج‌های لمب<sup>۵</sup> یا هدایت شده تشکیل می‌شود. امواج لمب دارای خاصیت پراکندگی می‌باشند به طوریکه سرعت فاز<sup>۶</sup> و سرعت گروه<sup>۷</sup> این امواج علاوه بر خصوصیات ماده به هندسه و مشخصات موج بستگی دارند. یک ورق دو لایه ایزوتروپ<sup>۸</sup> و همگن مطابق با شکل ۲ در نظر گرفته می‌شود. هر لایه توسط یک اندیس صحیح  $n$  مشخص می‌شود.  $n=1$

مربوط به لایه بالایی و  $n=2$  مربوط به لایه پایینی می‌باشد. ضرایب لامه<sup>۹</sup> و چگالی لایه‌ی  $n$  ام توسط

## ۳- تحلیل روابط موج

سه معادله‌ی، حرکت، کرنش-جابجایی و هوک برای یک ورق دو لایه مطابق با روابط (۱) تا (۳) تعریف می‌شوند.

با ترکیب این سه رابطه، در نهایت یک معادله‌ی حرکت واحد بر حسب تغییر مکان بدست می‌آید. این معادله را معادله‌ی ناویر<sup>۱۰</sup> گویند و برای لایه‌ی  $n$  ام به صورت رابطه‌ی (۴) نمایش داده می‌شود.

$$\sigma_{ij,j}^n + \rho^n f_i^n = \rho^n \ddot{u}_i^n \quad (4)$$

۳-۱- استخراج معادلات انتشار موج در ورق

میدان جابجایی با توجه به روابط (۸) تا (۱۰) به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}
 u_{1(n)} &= 0 \\
 u_{2(n)} &= ik_{L_n} \cos(\theta_{L_n}) \{c_1^n \exp[ik_{L_n} (x_3 \sin(\theta_{L_n}) + x_2 \cos(\theta_{L_n}))] - c_2^n \exp[ik_{L_n} (x_3 \sin(\theta_{L_n}) - x_2 \cos(\theta_{L_n}))]\} + ik_{T_n} \sin(\theta_{T_n}) \\
 &\{c_3^n \exp[ik_{T_n} (x_3 \sin(\theta_{T_n}) + x_2 \cos(\theta_{T_n}))] - c_4^n \exp[ik_{T_n} (x_3 \sin(\theta_{T_n}) - x_2 \cos(\theta_{T_n}))]\} \\
 &\quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{3(n)} &= ik_{L_n} \sin(\theta_{L_n}) \{c_1^n \exp[ik_{L_n} (x_3 \sin(\theta_{L_n}) + x_2 \cos(\theta_{L_n}))] + c_2^n \exp[ik_{L_n} (x_3 \sin(\theta_{L_n}) - x_2 \cos(\theta_{L_n}))]\} - ik_{T_n} \cos(\theta_{T_n}) \\
 &\{c_3^n \exp[ik_{T_n} (x_3 \sin(\theta_{T_n}) + x_2 \cos(\theta_{T_n}))] - c_4^n \exp[ik_{T_n} (x_3 \sin(\theta_{T_n}) - x_2 \cos(\theta_{T_n}))]\}
 \end{aligned}$$

میدان تنش با توجه به قانون هوک از روابط زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{32(n)} &= -2k_{L_n}^2 \mu_n \sin(2\theta_{L_n}) \{c_1^n \exp[ik_{L_n} (x_3 \sin(\theta_{L_n}) + x_2 \cos(\theta_{L_n}))] - c_2^n \exp[ik_{L_n} (x_3 \sin(\theta_{L_n}) - x_2 \cos(\theta_{L_n}))]\} \\
 &+ \mu_n k_{T_n}^2 \cos(2\theta_{T_n}) \{c_3^n \exp[ik_{T_n} (x_3 \sin(\theta_{T_n}) + x_2 \cos(\theta_{T_n}))] + c_4^n \exp[ik_{T_n} (x_3 \sin(\theta_{T_n}) - x_2 \cos(\theta_{T_n}))]\} \\
 &\quad (13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{22(n)} &= -k_{L_n}^2 \mu_n [\lambda_n + 2\mu_n \cos(\theta_{L_n})^2] \{c_1^n \exp[ik_{L_n} (x_3 \sin(\theta_{L_n}) + x_2 \cos(\theta_{L_n}))] + c_2^n \exp[ik_{L_n} (x_3 \sin(\theta_{L_n}) - x_2 \cos(\theta_{L_n}))]\} \\
 &- 2\mu_n k_{T_n}^2 \sin(\theta_{T_n}) \cos(\theta_{T_n}) \{c_3^n \exp[ik_{T_n} (x_3 \sin(\theta_{T_n}) + x_2 \cos(\theta_{T_n}))] - c_4^n \exp[ik_{T_n} (x_3 \sin(\theta_{T_n}) - x_2 \cos(\theta_{T_n}))]\}
 \end{aligned}$$

شرایط مرزی روی سطح آزاد لایه‌ی اول ( $x_2 = 0$ ) به صورت زیر می‌باشند:

$$\varepsilon_{ij}^n = \frac{1}{2} (u_{i,j}^n + u_{j,i}^n) \quad (2)$$

$$\sigma_{ij,j}^n = \lambda^n \varepsilon_{kk}^n \delta_{ij} + 2\mu^n \varepsilon_{ij}^n \quad (3)$$

$$(\mu_n + \lambda_n) \nabla(\nabla \cdot u_n) + \mu_n \nabla^2 u_n = \rho_n \frac{\partial^4 u_n}{\partial t^2} \quad (4)$$

در ورق دو لایه میدان جابجایی بر اساس تجزیه هلمهلتز<sup>۱۱</sup> به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$u_n = \nabla \phi_n + \nabla \times \psi_n \quad (5)$$

در روابط بالا  $\phi_n$  و  $\psi_n$  به ترتیب بیانگر تابع پتانسیل اسکالر و تابع پتانسیل برداری لایه  $n$  ام هستند به نحویکه  $\nabla \cdot \psi_n = 0$  می‌باشد. با قرار دادن میدان جابجایی از رابطه‌ی بالا در معادله‌ی ناویر رابطه (۶) بدست می‌آید.

$$\nabla^2 \phi_n = \frac{1}{c_{L_n}^2} \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial t^2} \quad (6)$$

$$\nabla^2 \psi_n = \frac{1}{c_{T_n}^2} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial t^2}$$

در روابط بالا  $c_{L_n}$  و  $c_{T_n}$  به ترتیب بیانگر سرعت موج طولی و عرضی در لایه‌ی  $n$  ام می‌باشند.

$$c_{L_n} = \frac{2\mu_n + \lambda_n}{\rho_n} \quad \text{and} \quad c_{T_n} = \frac{\mu_n}{\rho_n} \quad (7)$$

با فرض اینکه موج در راستای  $x_3$  انتشار می‌یابد، میدان جابجایی با توجه به تجزیه هلمهلتز به صورت زیر استخراج می‌شود.

$$\begin{aligned}
 u_{1(n)} &= 0 \\
 u_{2(n)} &= \frac{\partial \phi_n}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_n}{\partial x_3} \\
 u_{3(n)} &= \frac{\partial \phi_n}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_n}{\partial x_2}
 \end{aligned} \quad (8)$$

با حل روابط (۶) توابع برداری و اسکالر  $\phi_n$  و  $\psi_n$  به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
 \phi_n &= C_1^n \exp(ik_{L_n} [x_3 \sin(\theta_{L_n}) + x_2 \cos(\theta_{L_n})]) \\
 &+ C_2^n \exp(ik_{L_n} [x_3 \sin(\theta_{L_n}) - x_2 \cos(\theta_{L_n})]) \\
 &\quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_n &= C_3^n \exp(ik_{T_n} [x_3 \sin(\theta_{T_n}) + x_2 \cos(\theta_{T_n})]) \\
 &+ C_4^n \exp(ik_{T_n} [x_3 \sin(\theta_{T_n}) - x_2 \cos(\theta_{T_n})]) \\
 &\quad (10)
 \end{aligned}$$

در روابط بالا  $k_{L_n}$  و  $k_{T_n}$  به ترتیب بیانگر عدد موج طولی و عرضی در راستای انتشار موج در لایه‌ی  $n$  ام می‌باشند.

$$k_{L_n} = \frac{\omega}{c_{L_n}} \quad \text{and} \quad k_{T_n} = \frac{\omega}{c_{T_n}} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22(2)} \Big|_{x_2=h} = 0 \Rightarrow & \\ \mu_2(q_2^2 - k^2)\{c_1^2 \exp[ip_2 h] & \\ + c_2^2 \exp[-ip_2 h]\} + 2\mu_2 k q_2 & \\ \{c_3^2 \exp[iq_2 h] - c_4^2 \exp[-iq_2 h]\} = 0 & \\ \sigma_{32(2)} \Big|_{x_2=h} = 0 \Rightarrow & \\ -2\mu_2 k p_2 \{c_1^2 \exp[ip_2 h] - & \\ c_2^2 \exp[-ip_2 h]\} + \mu_2(q_2^2 - k^2) & \\ \{c_3^2 \exp[iq_2 h] + c_4^2 \exp[-iq_2 h]\} = 0 & \end{aligned} \quad (۲۰)$$

شرایط پیوستگی میدان جابجایی و میدان تنش در فصل مشترک دو لایه ( $x_2 = h_1$ ) به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} x_2 = h_1, -\infty < x_3 < +\infty \rightarrow u_{2(1)} = u_{2(2)} & \\ p_1 \{c_1^1 \exp[ip_1 h_1] - c_2^1 \exp[-ip_1 h_1]\} + & \\ k \{c_3^1 \exp[iq_1 h_1] + c_4^1 \exp[-iq_1 h_1]\} - & \\ p_2 \{c_1^2 \exp[ip_2 h_1] - c_2^2 \exp[-ip_2 h_1]\} - & \\ k \{c_3^2 \exp[iq_2 h_1] + c_4^2 \exp[-iq_2 h_1]\} = 0 & \end{aligned} \quad (۲۱)$$

$$x_2 = h_1, -\infty < x_3 < +\infty \rightarrow u_{3(1)} = u_{3(2)}$$

$$\begin{aligned} k \{c_1^1 \exp[ip_1 h_1] + c_2^1 \exp[-ip_1 h_1]\} - & \\ q_1 \{c_3^1 \exp[iq_1 h_1] - c_4^1 \exp[-iq_1 h_1]\} - & \\ k \{c_1^2 \exp[ip_2 h_1] + c_2^2 \exp[-ip_2 h_1]\} + & \\ q_2 \{c_3^2 \exp[iq_2 h_1] - c_4^2 \exp[-iq_2 h_1]\} = 0 & \end{aligned} \quad (۲۲)$$

$$x_2 = h_1, -\infty < x_3 < +\infty \rightarrow \sigma_{22(1)} = \sigma_{22(2)}$$

$$\begin{aligned} \mu_1(q_1^2 - k^2)\{c_1^1 \exp[ip_1 h_1] + & \\ c_2^1 \exp[-ip_1 h_1]\} + 2\mu_1 k q_1 & \\ \{c_3^1 \exp[iq_1 h_1] - c_4^1 \exp[-iq_1 h_1]\} - & \\ \mu_2(q_2^2 - k^2)\{c_1^2 \exp[ip_2 h_1] + & \\ c_2^2 \exp[-ip_2 h_1]\} - 2\mu_2 k q_2 \{c_3^2 \exp[iq_2 h_1] & \\ - c_4^2 \exp[-iq_2 h_1]\} = 0 & \end{aligned} \quad (۲۳)$$

$$x_2 = h_1, -\infty < x_3 < +\infty \rightarrow \sigma_{23(1)} = \sigma_{23(2)}$$

$$\begin{aligned} -2\mu_1 k p_1 \{c_1^1 \exp[ip_1 h_1] - c_2^1 & \\ \exp[-ip_1 h_1]\} + \mu_1(q_1^2 - k^2) & \\ \{c_3^1 \exp[iq_1 h_1] + c_4^1 \exp[-iq_1 h_1]\} & \\ + 2\mu_2 k p_2 \{c_1^2 \exp[ip_2 h_1] - & \\ c_2^2 \exp[-ip_2 h_1]\} - \mu_2(q_2^2 - k^2) & \\ \{c_3^2 \exp[iq_2 h_1] - c_4^2 \exp[-iq_2 h_1]\} = 0 & \end{aligned} \quad (۲۴)$$

$$x_2 = 0, -\infty < x_3 < +\infty \rightarrow \sigma_{32(1)} = \sigma_{22(1)} = 0 \quad (۱۴)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \sigma_{22(1)} \Big|_{x_2=0} \Rightarrow -k_{L_1}^2 \mu_1 [\lambda_1 + 2\mu_1 \cos(\theta_{L_1})^2] & \\ \{c_1^1 + c_2^1\} \exp[ik_{L_1} (x_3 \sin(\theta_{L_1}))] + & \\ + 2\mu_1 k_{T_1}^2 \sin(\theta_{T_1}) \cos(\theta_{T_1}) \{c_3^1 - c_4^1\} & \\ \exp[ik_{T_1} (x_3 \sin(\theta_{T_1}))] = 0 & \end{aligned} \quad (۱۵)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{32(1)} \Big|_{x_2=0} \Rightarrow -k_{L_1}^2 \mu_1 \sin(2\theta_{L_1}) \{c_1^1 - c_2^1\} & \\ \exp[ik_{L_1} (x_3 \sin(\theta_{L_1}))] + \mu_1 k_{T_1}^2 \cos(2\theta_{T_1}) & \\ \{c_3^1 + c_4^1\} \exp[ik_{T_1} (x_3 \sin(\theta_{T_1}))] = 0 & \end{aligned}$$

روابط (۱۵) در صورتی برای تمام  $X_3$  ها تامین می‌شوند که شرایط زیر برای  $n = 1, 2$  حاکم باشد:

$$\exp[ik_{L_n} (x_3 \sin(\theta_{L_n}))] = \exp[ik_{T_n} (x_3 \sin(\theta_{T_n}))] \quad (۱۶)$$

رابطه‌ی (۱۶) همان قانون اسنل<sup>۱</sup> می‌باشد.

در روابط بالا  $k$ ، تصویر عدد موج<sup>۱۲</sup> طولی و عرضی در راستای انتشار موج ( $x_3$ ) و  $p_n$  و  $q_n$  به ترتیب عبارت است از تصویر عدد موج طولی و عرضی در راستای ضخامت ( $x_2$ ) می‌باشد.

$$\begin{aligned} k_{L_n} \sin(\theta_{L_n}) = k_{T_n} \sin(\theta_{T_n}) = k & \\ k_{L_n} \cos(\theta_{L_n}) = p_n = \sqrt{k_{L_n}^2 - k^2} & \\ k_{T_n} \cos(\theta_{T_n}) = q_n = \sqrt{k_{T_n}^2 - k^2} & \end{aligned} \quad (۱۷)$$

با توجه به توضیحات بالا روابط (۱۵) به صورت زیر بازنویسی می‌شوند.

$$\begin{aligned} \mu_1(q_1^2 - k^2)\{c_1^1 + c_2^1\} + & \\ 2\mu_1 k q_1 \{c_3^1 - c_4^1\} = 0 & \\ -2k \mu_1 p_1 \{c_1^1 - c_2^1\} + & \\ \mu_1(q_1^2 - k^2)\{c_3^1 + c_4^1\} = 0 & \end{aligned} \quad (۱۸)$$

شرایط مرزی روی سطح آزاد لایه‌ی دوم ( $x_2 = h$ ) به صورت رابطه‌ی (۱۹) می‌باشند:

$$x_2 = h, -\infty < x_3 < +\infty \rightarrow \sigma_{32(2)} = \sigma_{22(2)} = 0 \quad (۱۹)$$

لذا داریم:

<sup>1</sup> Snell's Law

$$|A(\omega, k, \lambda_n, \mu_n, h_n)| = 0 \quad (۲۷)$$

معادلات مربوط به انتشار موج لمب در ورق تک لایه همانند روابط حاکم بر ورق دو لایه می‌باشد با این تفاوت که در این معادلات برابر با ۱ می‌باشد. پس از اعمال شرایط مرزی بر روی مرزهای آزاد ورق دستگاه معادلات به فرم ماتریسی زیر نوشته می‌شود.

$$[A]_{4 \times 4} [Y_i]_{4 \times 1} = 0 \quad (۲۸)$$

درایه‌های مربوط به ماتریس  $[A]$  از رابطه‌ی زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} A_{11} &= \lambda k_L^2 + 2\mu K_L^2 & A_{13} &= 2\mu k K_T \\ A_{21} &= \lambda k_L^2 + 2\mu K_L^2 & A_{14} &= -2\mu k K_T \\ A_{21} &= -2\mu k K_L & A_{23} &= \mu(K_T^2 - 2k_T^2) \\ A_{22} &= 2\mu k K_L & A_{24} &= \mu(K_T^2 - 2k_T^2) \\ A_{31} &= (\lambda k_L^2 + 2\mu K_L^2) e^{ik_L h} & A_{33} &= 2\mu k K_T e^{ik_T h} \\ A_{32} &= (\lambda k_L^2 + 2\mu K_L^2) e^{-ik_L h} & A_{34} &= -2\mu k K_T e^{-ik_T h} \\ A_{41} &= -2\mu k K_L e^{ik_L h} & A_{43} &= \mu(K_T^2 - 2k_T^2) e^{ik_T h} \\ A_{42} &= 2\mu k K_L e^{-ik_L h} & A_{44} &= \mu(K_T^2 - 2k_T^2) e^{-ik_T h} \end{aligned} \quad (۲۹)$$

معادله (۲۹) زمانی دارای جواب می‌باشد که دترمینان ماتریس  $[A]_{4 \times 4}$  برابر با صفر باشد.

$$|A(\omega, k, \lambda, \mu, h)| = 0 \quad (۳۰)$$

پس از صفر قرار دادن دترمینان ماتریس  $[A]_{4 \times 4}$ ، معادله فرکانسی موج لمب در ورق تک لایه به صورت زیر استخراج می‌شود.

$$\frac{\tan(2K_T h)}{\tan(2K_L h)} + \left\{ \frac{4K_L K_T k^2}{(k^2 - K_T^2)^2} \right\}^{\pm 1} = 0 \quad (۳۱)$$

معادله بالا به دو قسمت تقسیم می‌شود، توان (-۱) برای مودهای پادمقارن<sup>۱۳</sup> و توان (+۱) برای مودهای مقارن<sup>۱۴</sup> در نظر گرفته می‌شود.

#### ۴- تحریک مودی خاص از موج لمب

تجزیه شدن موج به مودهای مختلف در ورق باعث می‌شود که مودها در زمان‌های مختلفی به مرزها برخورد کنند. در این حالت به علت پراکندگی سیگنال‌های منعکس شده که ناشی از تبدیل مودها در مرزها می‌باشند، استخراج اطلاعات مورد نیاز مشکل می‌باشد. برای غلبه بر این مشکل بهتر است، فقط یک مود خاص از موج

با اعمال شرایط مرزی و پیوستگی یک دستگاه معادلات حاصل می‌شود که به فرم ماتریسی زیر نوشته می‌شود.

$$[A]_{8 \times 8} [Y_i]_{8 \times 1} = 0 \quad (۲۵)$$

درایه‌های ماتریس  $[Y_i]$  و  $[A_i]$  به صورت زیر بدست می‌آیند.

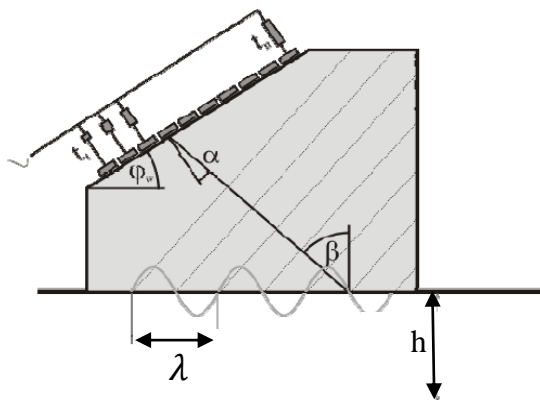
$$\begin{aligned} Y_1 &= c_1^1 & Y_2 &= c_2^1 & Y_3 &= c_3^1 & Y_4 &= c_4^1 \\ Y_5 &= c_1^2 & Y_6 &= c_2^2 & Y_7 &= c_3^2 & Y_8 &= c_4^2 \\ A_{11} &= \mu_1(q_1^2 - k^2) & A_{21} &= -2\mu_1 k q \\ A_{12} &= \mu_1(q_1^2 - k^2) & A_{22} &= 2\mu_1 k q_1 \\ A_{13} &= 2\mu_1 k q & A_{23} &= \mu_1(q_1^2 - k^2) \\ A_{14} &= -2\mu_1 k q & A_{24} &= \mu_1(q_1^2 - k^2) \\ A_{1n} &= 0 \text{ for } 5 \leq n \leq 8 & A_{2n} &= 0 \text{ for } 5 \leq n \leq 8 \\ A_{31} &= p_1 \exp[ip_1 h] & A_{35} &= -p_2 \exp[ip_2 h] \\ A_{32} &= -p_1 \exp[-ip_1 h] & A_{36} &= p_2 \exp[-ip_2 h] \\ A_{33} &= k \exp[iq_1 h] & A_{37} &= -k \exp[iq_2 h] \\ A_{34} &= k \exp[-iq_1 h] & A_{38} &= -k \exp[-iq_2 h] \\ A_{41} &= k \exp[ip_1 h] & A_{45} &= -k \exp[ip_2 h] \\ A_{42} &= k \exp[-ip_1 h] & A_{46} &= -k \exp[-ip_2 h] \\ A_{43} &= -q_1 \exp[iq_1 h] & A_{47} &= q_2 \exp[iq_2 h] \\ A_{44} &= q_1 \exp[-iq_1 h] & A_{48} &= -q_2 \exp[-iq_2 h] \end{aligned} \quad (۲۶)$$

$$\begin{aligned} A_{51} &= \mu_1(q_1^2 - k^2) \exp[ip_1 h] & A_{55} &= -\mu_2(q_2^2 - k^2) \exp[ip_2 h] \\ A_{52} &= \mu_1(q_1^2 - k^2) \exp[-ip_1 h] & A_{56} &= -\mu_2(q_2^2 - k^2) \exp[-ip_2 h] \\ A_{53} &= 2\mu_1 k q_1 \exp[iq_1 h] & A_{57} &= -2\mu_2 k q_2 \exp[iq_2 h] \\ A_{54} &= -2\mu_1 k q_1 \exp[-iq_1 h] & A_{58} &= 2\mu_2 k q_2 \exp[-iq_2 h] \\ A_{61} &= -2\mu_1 k p_1 \exp[ip_1 h] & A_{65} &= 2\mu_2 k p_2 \exp[ip_2 h] \\ A_{62} &= 2\mu_1 k p_1 \exp[-ip_1 h] & A_{66} &= -2\mu_2 k p_1 \exp[-ip_2 h] \\ A_{63} &= \mu_1(q_1^2 - k^2) \exp[iq_1 h] & A_{67} &= -\mu_2(q_2^2 - k^2) \exp[iq_2 h] \\ A_{64} &= \mu_1(q_1^2 - k^2) \exp[-iq_1 h] & A_{68} &= -\mu_2(q_2^2 - k^2) \exp[-iq_2 h] \\ A_{7n} &= 0 \text{ for } 1 \leq n \leq 4 & A_{8n} &= 0 \text{ for } 1 \leq n \leq 4 \\ A_{75} &= \mu_2(q_2^2 - k^2) \exp[ip_2 h] & A_{85} &= -2\mu_2 k p_2 \exp[ip_2 h] \\ A_{76} &= \mu_2(q_2^2 - k^2) \exp[-ip_2 h] & A_{86} &= 2\mu_2 k p_2 \exp[-ip_2 h] \\ A_{77} &= 2\mu_2 k q_2 \exp[iq_2 h] & A_{87} &= \mu_2(q_2^2 - k^2) \exp[iq_2 h] \\ A_{78} &= -2\mu_2 k q_2 \exp[-iq_2 h] & A_{88} &= \mu_2(q_2^2 - k^2) \exp[-iq_2 h] \end{aligned}$$

برای داشتن جواب غیر بدیهی، دترمینان ماتریس  $[A]_{8 \times 8}$  باید برابر با صفر باشد. در این حالت معادله فرکانسی موج لمب در ورق‌های دو لایه به صورت زیر استخراج می‌شود.

روش‌های مورد استفاده برای تحریک مود انتخابی روش آرایه‌ی فازی<sup>۱۶</sup> می‌باشد که در شکل ۳ مدلی از این روش نمایش داده شده است.

لمب در ورق منتشر شود. برای تحریک مود انتخابی علاوه بر فرکانس پروب<sup>۱۵</sup> که از روی نمودار پراکندگی مشخص می‌شود، باید زاویه‌ی تابش ( $\beta$ ) را نیز تعیین کرد. یکی از



شکل ۳- استفاده از روش آرایه‌ی فازی برای تحریک یک مود خاص در ورق

برای رسم منحنی‌های پراکندگی باید ریشه‌های مربوط به معادله پراکندگی (۲۷) که بر حسب دو متغیر  $\bar{f} = fh$  و  $\bar{k} = kh$  می‌باشد را استخراج کرد. استخراج ریشه‌ها در نواحی مختلفی از فرکانس و عدد موج کار پیچیده‌ای می‌باشد، به نحوی که ریشه‌های معادله‌ی (۲۷) را باید در نواحی مختلفی از عدد موج و فرکانس به صورت جداگانه محاسبه کرد [۷]. رابطه‌ی پراکندگی (۲۷) تابع غیر جبری می‌باشد که در آن رابطه‌ی بین  $\bar{k}$  و  $\bar{f}$  مستقیم نمی‌باشد، لذا بدست آوردن ریشه‌های  $\bar{k}$  در یک فرکانس مشخص کار ساده‌ای نمی‌باشد. در حالت کلی ریشه‌ها به صورت مختلط می‌باشند ولی اگر هدف، تنها موج‌های منتشر شونده باشد، باید از قسمت موهومی ریشه‌ها صرف نظر کرد [۸]. منحنی طیف فرکانس، سرعت فاز و سرعت گروه بر حسب فرکانس، حاصل از انتشار موج لمب در ورق دو لایه با مشخصات ذکر شده در جدول ۱ در شکل‌های ۴ تا ۶ نمایش داده شده است. در نمودارهای پراکندگی مربوط به ورق دو لایه  $m_i$  بیانگر  $i$  امین مود انتشار یافته در ورق دو لایه می‌باشد.

با استفاده از این روش می‌توان مود مورد نظر را در فرکانس انتخابی با تغییر زاویه‌ی تابش، تحریک کرد. در این روش ترنس‌دیوسری<sup>۱۷</sup> که بر روی سطح گوه‌ی مجاور ورق قرار دارد، سیگنالی با زاویه‌ی کنترل پذیر  $\alpha$  به داخل گوه می‌فرستد. این سیگنال با زاویه‌ی  $\beta$  به سطح پایه‌ی گوه برخورد نموده و باعث تولید یک نیروی عمودی بر روی سطح ورق می‌شود. نیروی ایجاد شده موجی با طول موج  $\lambda$  در سطح ورق ایجاد می‌کند. با استفاده از قانون اسنل<sup>۱۸</sup> رابطه‌ی بین زاویه تابش و سرعت فاز به صورت زیر بدست می‌آید:

$$c_w \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_p \sin(\beta) \rightarrow \beta = \sin^{-1}\left(\frac{c_w}{c_p}\right) \quad (32)$$

در رابطه‌ی بالا  $c_w$  سرعت موج در گوه می‌باشد.

### ۵- رسم منحنی‌های پراکندگی ورق

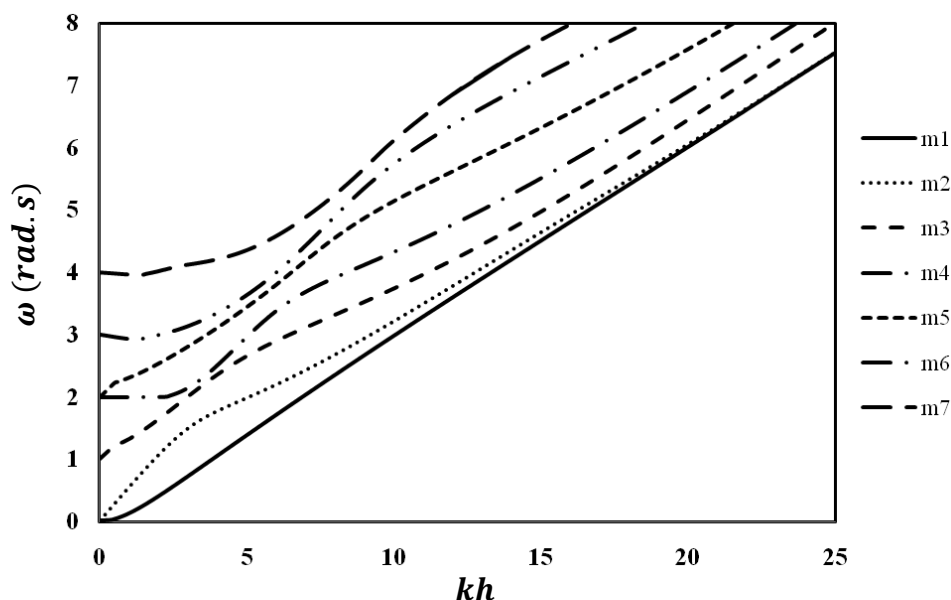
در این قسمت چگونگی رسم نمودارهای پراکندگی مربوط به یک ورق دو لایه آلومینیوم-فولاد با مشخصات زیر توضیح داده شده است.

جدول ۱- مشخصات مربوط به انتشار موج در ورق دو لایه

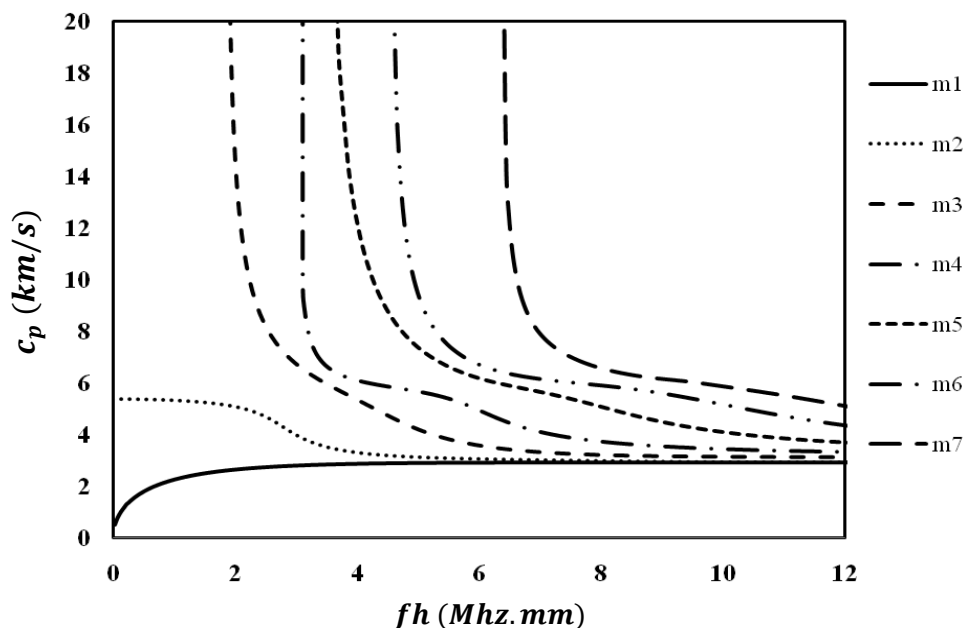
ورق دو لایه	$c_L (km / s)$	$c_T (km / s)$	$h (mm)$
آلومینیوم	۵/۹	۳/۱۹	۱/۲
فولاد	۶/۳۵	۳/۱۳	۰/۴

منحنی‌های سرعت گروه برای آن مود مقداری ثابت شود که این پدیده در شکل ۶ قابل مشاهده می‌باشد. همچنین در محدوده‌ی فرکانس‌های پایین، که این محدوده‌ی فرکانس برای ورق دو لایه فولاد-آلومینیوم برابر با  $\bar{f} \leq 1.8 \text{ Mhz.mm}$  می‌باشد، تنها دو مود در ورق دو لایه انتشار پیدا می‌کنند، لذا در این محدوده فرکانس به علت انتشار مود کمتر، پراکندگی کمتر می‌باشد. برای انتشار بقیه مودها نیاز است تا فرکانس تحریک افزایش پیدا کند تا حدی که این فرکانس بیشتر از فرکانس قطع<sup>۲۰</sup> مود مربوطه (فرکانس قطع هر مود، حداقل فرکانس مورد نیاز برای تحریک آن مود می‌باشد) شود [۵].

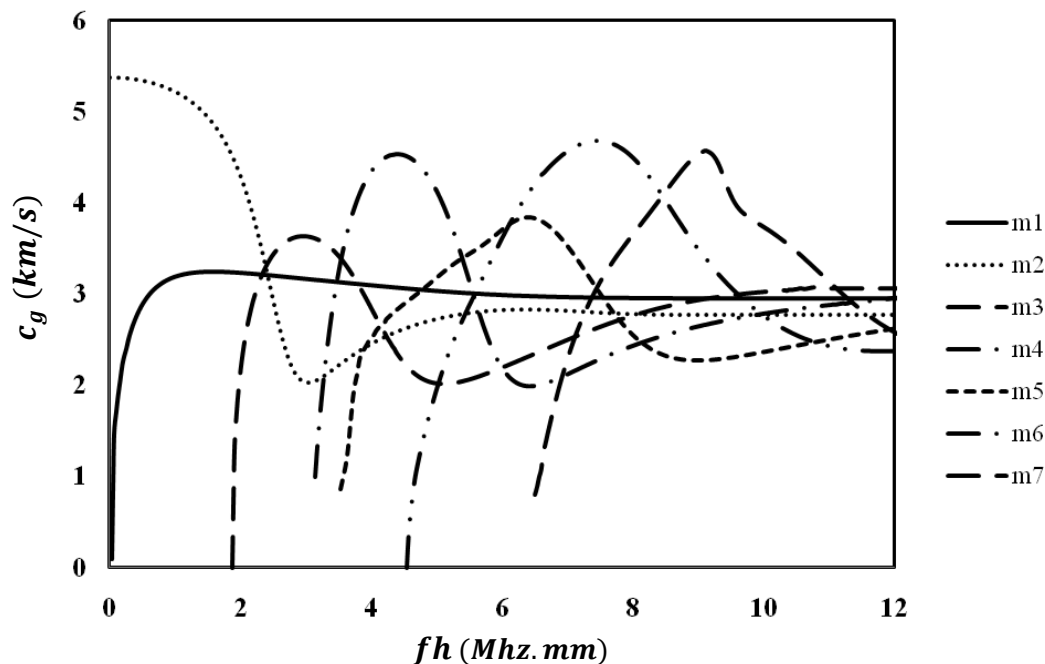
با توجه به شکل ۴ مشاهده می‌شود که برای هر مود بعد از یک عدد موج خاصی، رابطه‌ی بین فرکانس زاویه‌ای و عدد موج خطی می‌شود، بنابراین با توجه به رابطه‌ی سرعت فاز ( $c_p = \frac{\omega}{k}$ ) انتظار می‌رود که با افزایش فرکانس در هر مود سرعت فاز به یک مقدار ثابت که برابر با سرعت موج ریلی<sup>۱۹</sup> می‌باشد، میل کند این موضوع با توجه به نمودار سرعت فاز بر حسب فرکانس در شکل ۵ قابل مشاهده می‌باشد. این نتیجه به این دلیل توجیه پذیر است که معادله پراکندگی در فرکانس‌های بسیار زیاد همانند معادله‌ی پراکندگی موج ریلی در یک محیط نیمه بی‌نهایت می‌باشد. با توجه به رابطه‌ی سرعت گروه ( $c_g = \frac{d\omega}{dk}$ ) انتظار می‌رود برای هر مود، از فرکانسی که رابطه‌ی بین عدد موج و فرکانس زاویه‌ای خطی شود



شکل ۴- منحنی فرکانس بر حسب عدد موج برای انتشار موج لمب در ورق دو لایه



شکل ۵- منحنی سرعت فاز بر حسب فرکانس برای انتشار موج لمب در ورق دو لایه

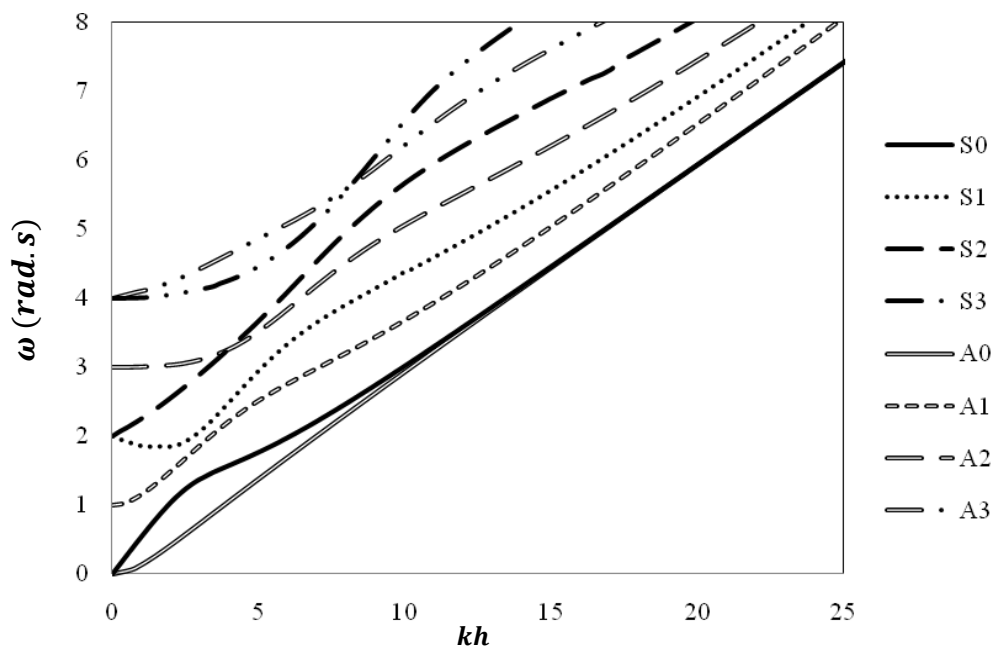


شکل ۶- منحنی سرعت گروه بر حسب فرکانس برای انتشار موج لمب در ورق دو لایه

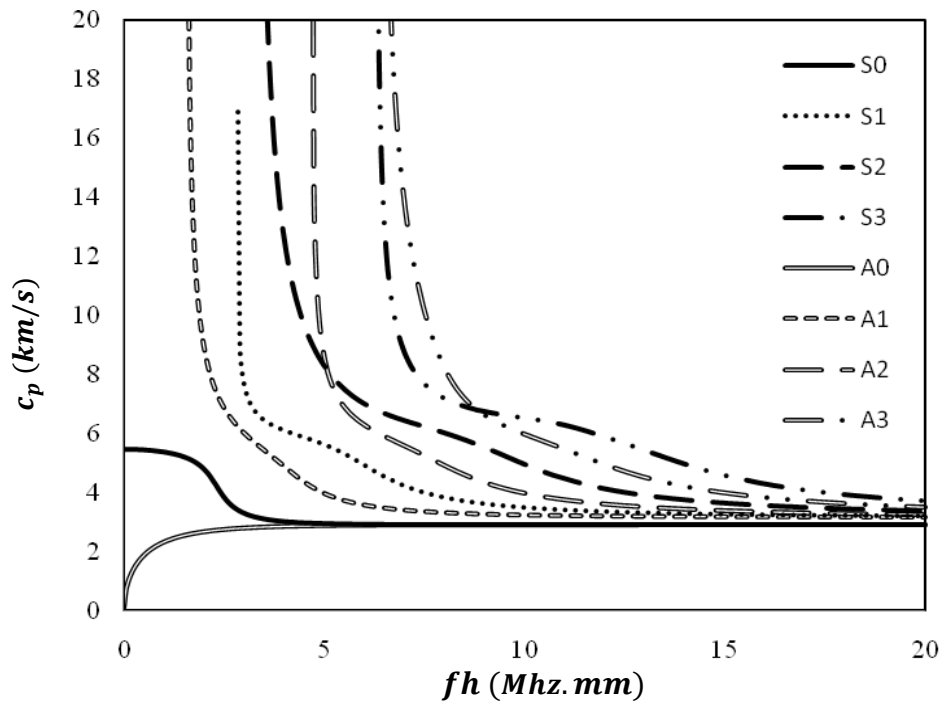
بیانگر  $i$  امین مود متقارن و پادمقارن انتشار یافته در ورق تک لایه می‌باشد [۹]. مطابق با شکل ۸ در محدوده‌ی فرکانس‌های پایین، که این محدوده‌ی فرکانس برای ورق تک لایه آلومینیوم برابر با  $\bar{f} \leq 1.6 \text{ Mhz.mm}$  می‌باشد، تنها دو مود در ورق تک لایه انتشار پیدا می‌کنند، لذا در این محدوده فرکانس به علت انتشار مود کمتر، پراکندگی کمتر می‌باشد.

برای رسم نمودارهای پراکندگی مربوط به ورق تک لایه آلومینیوم با مشخصات مربوط به لایه آلومینیومی در جدول ۱، باید ریشه‌های مربوط به معادله‌ی پراکندگی (۳۱) که بر حسب دو متغیر  $\bar{f} = fh$  و  $\bar{k} = kh$  می‌باشد را استخراج کرد. منحنی‌های پراکندگی مربوط به ورق تک لایه در شکل‌های ۷ تا ۹ رسم شده است. در نمودارهای پراکندگی مربوط به ورق تک لایه  $S_i$ ،  $A_i$  به ترتیب

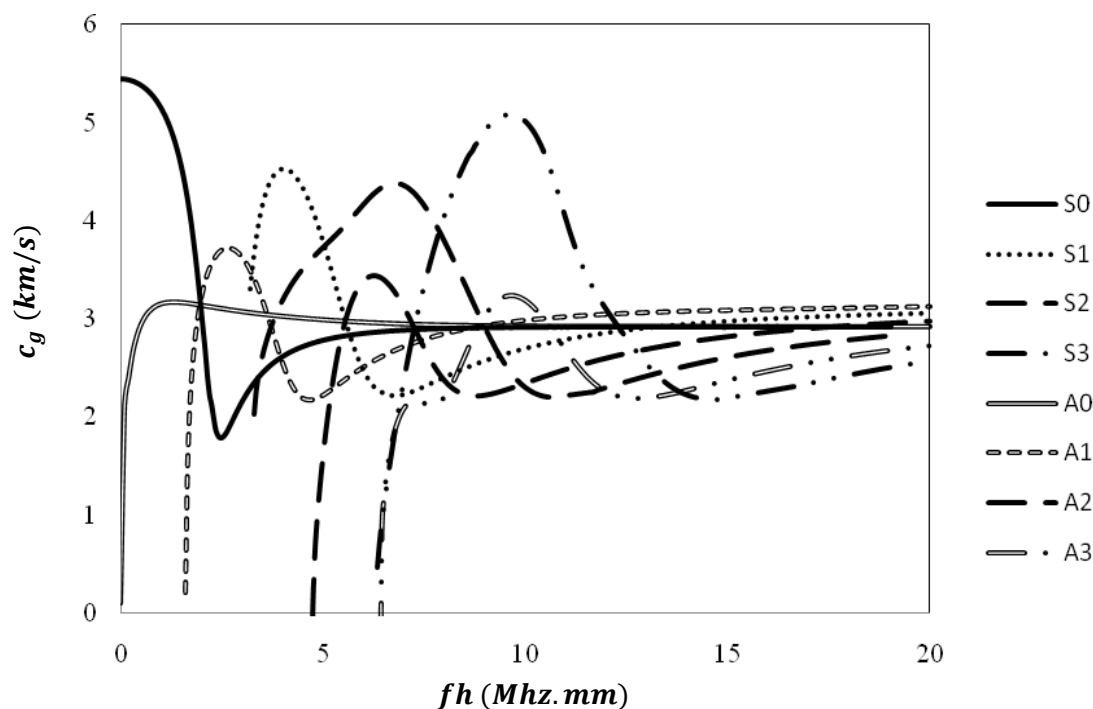




شکل ۷- منحنی فرکانس بر حسب عدد موج برای انتشار موج لمب در ورق یک لایه



شکل ۸- منحنی سرعت فاز بر حسب فرکانس برای انتشار موج لمب در ورق یک لایه



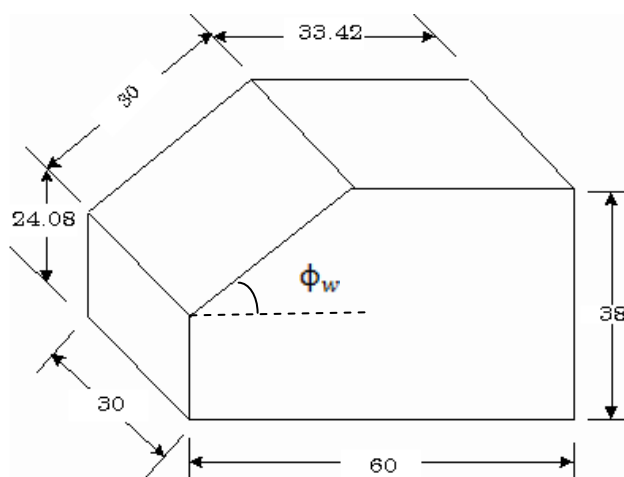
شکل ۹- منحنی سرعت گروه بر حسب فرکانس برای انتشار موج لمب در ورق یک لایه

برابر با  $c_w = 2.73 \left( \frac{km}{\mu s} \right)$  و تمام ابعاد بر حسب میلی‌متر می‌باشند.

#### ۶- مدل‌سازی روش آرایه فازی برای

#### انتشار مودی خاص از موج لمب

یک گوه از جنس پرسپکس<sup>۲۱</sup> با مشخصات هندسی در شکل ۱۰ نشان داده شده است. سرعت موج در این گوه



شکل ۱۰- هندسه‌ی گوه از جنس پرسپکس

$$\phi_w = \tan^{-1} \left( \frac{38 - 24.08}{60 - 33.42} \right) = 28^\circ \quad (33)$$

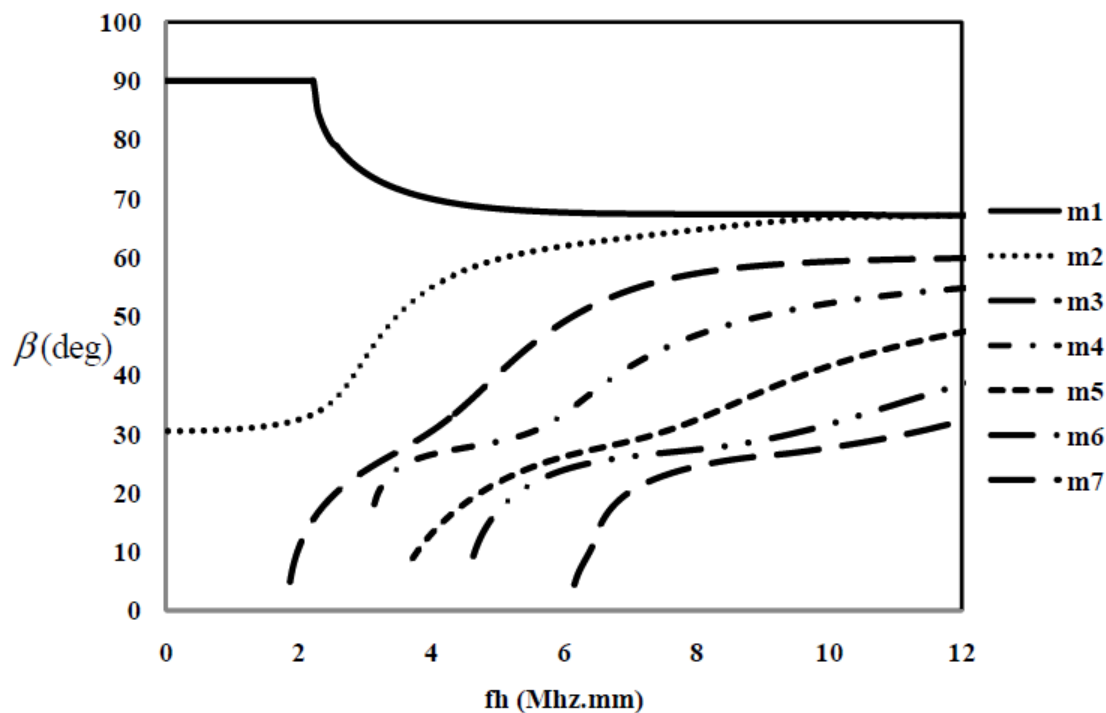
با توجه به هندسه‌ی این گوه،  $\phi_w$  به صورت زیر استخراج می‌شود:

با منحنی پراکندگی ۵ و ۸ بدست می‌آیند. با توجه به رابطه‌ی (۳۴)، منحنی زاویه‌ی برخورد سیگنال به پایه‌ی گوه بر حسب فرکانس پروب برای ورق دو لایه و تک لایه مطابق با شکل‌های ۱۱ و ۱۲ نمایش داده شده است.

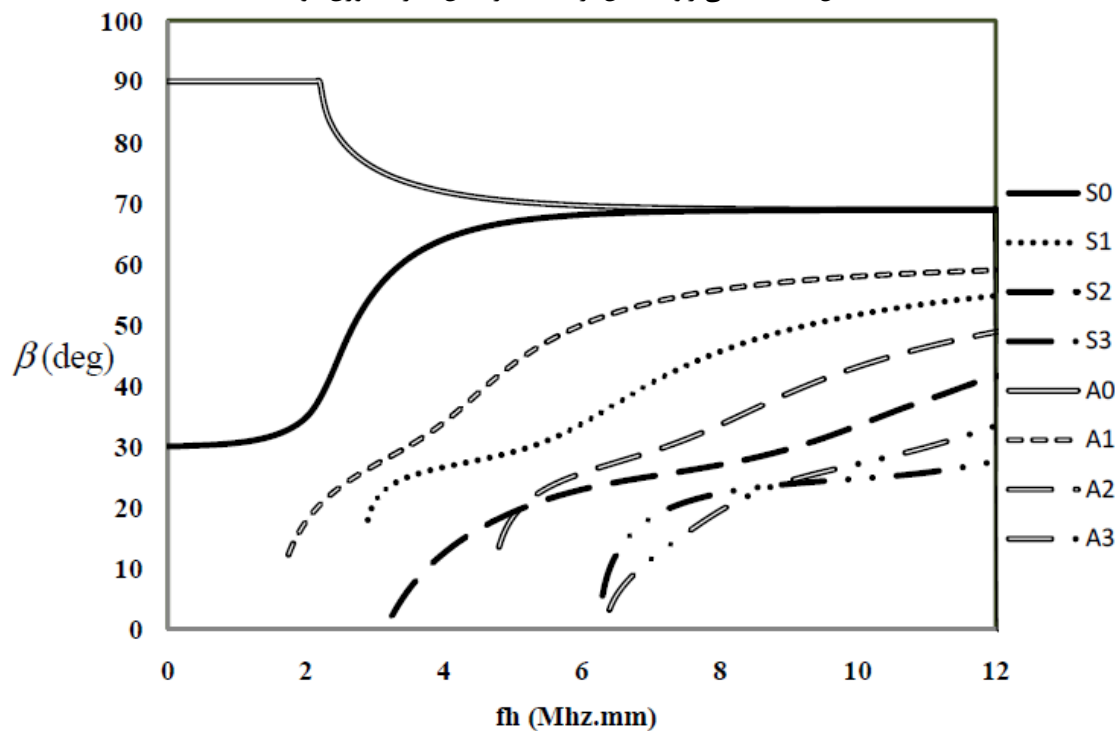
با استفاده از معادله‌ی (۳۲) زاویه‌ی  $\beta$  به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\beta = \alpha - \phi_w = \sin^{-1}\left(\frac{c_w}{c_p}\right) \quad (34)$$

در رابطه‌ی بالا سرعت فاز  $c_p$  مربوط به هر مود در فرکانس‌های مختلف برای ورق دو لایه و تک لایه مطابق



شکل ۱۱- منحنی زاویه تابش بر حسب فرکانس تحریک ورق دو لایه



شکل ۱۲- منحنی زاویه تابش بر حسب فرکانس تحریک ورق یک لایه

فرض می‌شود ضخامت کل ورق تک لایه و دو لایه برابر با ۲ میلی‌متر و فرکانس مرکزی پروب ۲ مگاهرتز باشد. با اندازه‌گیری سرعت فاز چهار مود اول مطابق با منحنی پراکندگی سرعت فاز در شکل‌های ۵ و ۸ برای

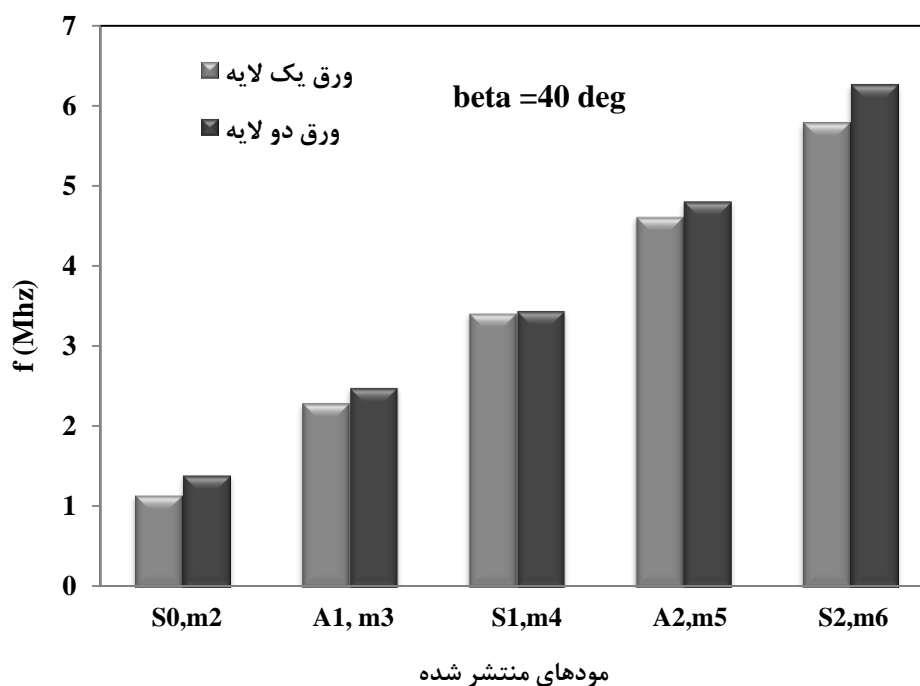
مقدار زاویه‌ی  $\beta$  ، مقدار زاویه‌ی  $\beta$  برای تولید چهار مود اول در ورق تک لایه و دو لایه در جدول ۲ آورده شده است.

جدول ۲- مشخصات مربوط به انتشار موج در ورق دو لایه

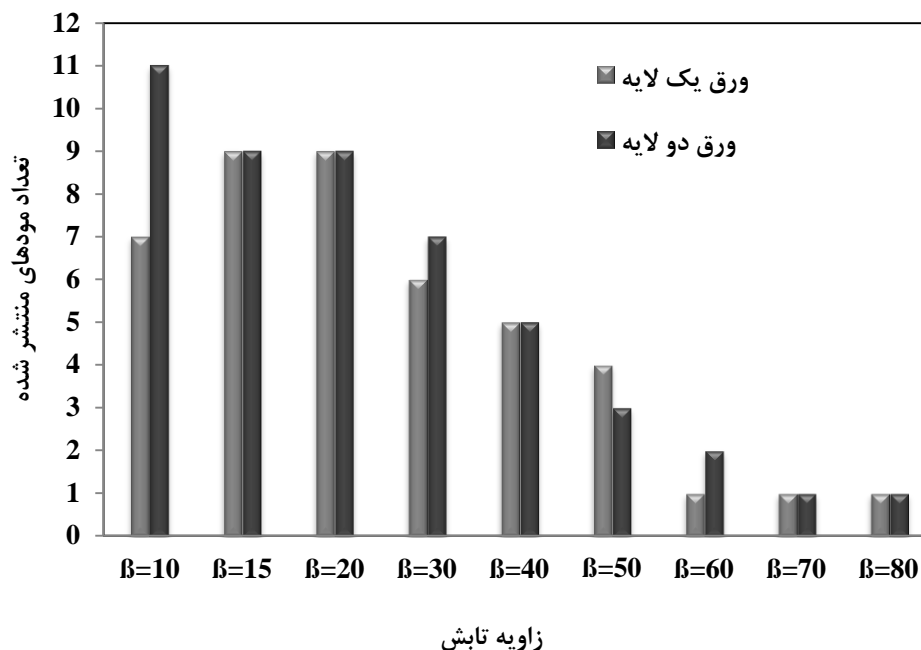
مود انتشار یافته در ورق تک لایه	$c_p \left(\frac{km}{s}\right)$	$\beta$ (deg)	$\alpha$ (deg)
A <sub>0</sub>	۲/۸۶۸	۷۲	۴۴
S <sub>0</sub>	۳/۰۳۲	۶۴	۳۶
A <sub>1</sub>	۴/۸۸۷	۳۴	۶
S <sub>1</sub>	۶/۰۹۰	۲۷	۱
مود انتشار یافته در ورق دو لایه	$c_p \left(\frac{km}{s}\right)$	$\beta$ (deg)	$\alpha$ (deg)
m <sub>1</sub>	۲/۹۰۴	۷۰	۴۲
m <sub>2</sub>	۳/۳۳۴	۵۵	۲۷
m <sub>3</sub>	۵/۳۸۷	۳۱	۳
m <sub>4</sub>	۶/۱۱۶	۲۶	۲

در یک حالت دیگر فرض می‌شود سیگنال با یک زاویه‌ی مشخص ( $\alpha$ ) به داخل گوه فرستاده می‌شود، بنابراین زاویه‌ی  $\beta$  مطابق با رابطه‌ی (۳۴) مقداری مشخص می‌باشد. در شکل ۱۳ تعداد مودها و فرکانس پروب مورد نیاز برای تحریک این مودها در زاویه  $\beta = 40^\circ$  و در بازه‌ی  $0 < fh \leq 13 Mhz.mm$  نشان داده شده است.

ضخامت ۲ میلی‌متر مشخص شده است. همچنین در شکل ۱۴ تعداد مودهای قابل انتشار در ورق دو لایه و یک لایه با ضخامت ۲ میلی‌متر برای  $\beta$  های مختلف در بازه‌ی  $0 < fh \leq 13 Mhz.mm$  نشان داده شده است.



شکل ۱۳- فرکانس پروب مورد نیاز برای تحریک مود خاص در زاویه تابش ۴۰ درجه



شکل ۱۴- تعداد مود قابل انتشار در ورق یک لایه و دو لایه در فرکانس ثابت و زوایای تابش متفاوت

تابش مشخص، باید از پروبی با فرکانس بالاتر در ورق دو لایه نسبت به ورق یک لایه استفاده نمود. این نتیجه در نمودار پراکندگی سرعت فاز بر حسب فرکانس ۵ و ۸ نیز مشاهده می‌شود.

## ۷- نتیجه‌گیری

مطابق با نتایج بدست آمده از جدول ۲، مشاهده می‌شود برای تولید یک مود خاص در ورق تک لایه سیگنال ورودی ( $\beta$ ) باید با زاویه‌ی بیشتری نسبت به حالتیکه همان مود بخواهد در ورق دو لایه تولید شود، به سطح جسم برخورد کند. همچنین با توجه به شکل ۱۳ می‌توان نتیجه گرفت که برای تولید مودی خاص در یک زاویه

## ۸- مراجع

- [1] Demcenko, A., Mazeika, L. (2002). Calculation of Lamb Waves Dispersion Curves in Multi-Layered Planar Structures, ULTRAGARSAS, Vol. 44, pp. 15-17.
- [2] Honarvar, F., Enjilela, E., Sinclair, A. N. (2009). An Alternative Method for Plotting Dispersion Curves, Ultrasonics, Vol. 49, pp. 15-18.
- [3] Rose, J. L. (2004). Ultrasonic Guided Waves in Structural Health Monitoring, Key Engineering Materials, Vol. 270-273, pp. 14-21.
- [4] Huo, S., Reis, H. (2008). Estimation of Adhesive Bond Strength in Laminated Safety Glass Using Guided Mechanical Waves: Part I. An Energy Velocity Approach, Insight: Non-Destructive Testing and Condition Monitoring, Vol. 50, pp. 146-152.
- [5] Deschamps, M., Hosten, B., Gerard, A., Uberall, H. (1994). Repulsion of Phase-Velocity Dispersion Curves and the Nature of Plate Vibrations, Journal De Physique, Vol. 4, pp. 905-908.
- [6] Jeong, H. D., Rose, J. L. (2000), "Detection of Defects in a Thin Steel Plate Using Ultrasonic Guided wave", Presented at the 15th NDT, Roma.

- [7] Graff, K. E. (1975). Wave motion in elastic solids, Oxford University Press, London.
- [8] Achenbach, J. D. (1998). Lamb waves as thickness vibration superimposed on a membrane carrier wave, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 103, pp. 2283-2286.
- [9] Rose, J. L. (1999). Ultrasonic Waves in Solid Media, New York: Cambridge University Press.

## واژه‌نامه

1. Pressure wave (P-wave)
2. Shear wave (S-wave)
3. Shear vertical wave (SV-wave)
4. Shear horizontal wave (SH-wave)
5. Lamb waves
6. Phase velocity
7. Group velocity
8. Isotropic
9. Lamé constant
10. Navier's equation
11. Helmholtz decomposition
12. Wave number
13. Anti-symmetric mode
14. Symmetric mode
15. Probe
16. Phase array
17. Transducer
18. Snell's law
19. Reileyght wave
20. Cutoff frequency
21. Perspex