کنترل ارتعاشات عرضی تیر تحت تحریک هارمونیک خارجی توسط چاه غیرخطی انرژی

علی ابراهیمی ممقانی[۱،*] و هدی سرپرست[۲]

اطلاعات مقاله

دریافت مقاله: ۱۳۹۶/۰۸/۲۹
پذیرش مقاله: ۱۳۹۶/۱۱/۲۵

واژگان کلیدی:
تیر دوسرگیردار،
چاه غیرخطی انرژی،
پاسخ مدوله قوی،
نوسانات تخفیفی،
صفحه فاز.

چکیده

در این مقاله به بررسی رفتار ارتعاشی یک تیر دوسرگیردار متصل به یک جاذب غیرخطی ارتعاشاتی که تحت بار نوسانی با دامنه‌های تحریک مختلف است، پرداخته شده است. این سیستم درواقع یک مدل ساده و محلی از سازه‌های دریایی تحت تحریک سیال خارجی را ارائه می‌دهد. برای مدل‌سازی تیر از تئوری اویلر-برنولی و برای مدل‌سازی جاذب (چاه غیرخطی انرژی)، از فنر غیرخطی و دمپر خطی استفاده شده است. پاسخ سیستم به صورت تحلیلی (روش متوسط‌گیری مختلط شونده) و عددی (روش رانگ-کوتای مرتبه چهارم)، به دست آمده است و بر این اساس محدوده مناسب پارامترهای جاذب، برای کاهش بهینه ارتعاشات استخراج شده است. علاوه بر این شرایط رخداد انشعابات زین اسبی و هاپف عام و همچنین تأثیر آنها در رخداد نوسانات تخفیفی در سیستم بررسی شده است. نتایج نشان دادند که میرایی چاه غیرخطی انرژی، تأثیر زیادی بر روی کارایی آن دارد. در ضمن با نزدیک شدن محل نصب جاذب به تکیه‌گاه‌ها احتمال رخداد پدیده نوسانات تخفیفی کاهش می‌یابد و پاسخ گذاری سیستم نیز طولانی‌تر می‌شود.

۱-مقدمه

حذف ارتعاشات نامطلوب از سامانه‌های مکانیکی، یکی از نیازهای لازم طراحان است که سال‌ها مورد بررسی قرار گرفته است [۱-۳]. از همین رو، کنترل‌گرهای غیرفعال با هدف از بین بردن ارتعاشات ناخواسته، جایگاه ویژه‌ای از نظر مهندسین داشته‌اند [۴]. با در نظر گرفتن خاصیت پایداری ذاتی این کنترل‌گرها، می‌توان آنها را به عنوان جایگزین مناسبی برای جاذب‌های فعال که پیچیده و همچنین نیازمند تأمین انرژی خارجی هستند، در نظر گرفت [۵]. شناخته شده‌ترین جاذب غیرفعال، جاذب میراگر جرمی تنظیم شده[۲] است [۶] که بزرگ‌ترین نقص آن، کوچک بودن پهنای باند محدوده بهینه کاری[۳] این جاذب خطی است [۷]. به منظور رفع این محدودیت‌ها، اخیراً مهندسین و طراحان، جاذب‌های غیرخطی را پیشنهاد کرده‌اند و تحقیقات گسترده‌ای را بر روی چاه غیرخطی انرژی[۴]، به عنوان جایگزین مناسب برای جاذب‌های خطی و غیرخطی ضعیف[۵]، بر روی سامانه‌های مختلف انجام داده‌اند. مسلماً یکی از جایگاه‌های کاربردی و اساسی جاذب‌های دینامیکی غیرفعال، سازه‌های دریایی هستند که تا به حال این کاربرد در آنها به خوبی مورد بررسی قرار نگرفته است.

پژوهشگران تاکنون پاسخ‌های گذرا و حالت پایدار را برای سامانه‌های یک یا چند درجه آزادی متصل به چاه غیرخطی انرژی را به صورت تحلیلی و عددی بررسی کرده‌اند. به‌طور مثال لونگو و زولی [۸] کارایی یک چاه غیرخطی انرژی روی کاهش ارتعاشات یک سیستم چند درجه آزادی را مورد بررسی قرار داده‌اند. آنها برای این کار از روش ترکیبی مرتبه

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: a.ebrahimimamaghani@gmail.com
۱. باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی
۲. باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی

۲ Tuned Mass Damper (TMD)
۳ Narrow band efficiency
۴ Nonlinear Energy Sink (NES)
۵ Weakly nonlinear absorber

چندگانه[۱] و توازن هارمونیک[۲] استفاده کرده‌اند. سیگالو و همکاران [۹] به بررسی کارایی چاه غیرخطی انرژی دوار که با یک سیستم یک درجه آزادی کوپل است، پرداخته‌اند و شرایط رخداد پدیده انتقال هدفمند انرژی[۳] را در این سیستم مورد بررسی قرار دادند. الشودیفت و همکاران [۱۰] به بررسی کارایی چاه غیرخطی انرژی ضربه‌ای یک و دوطرفه، بر روی کاهش ارتعاشات یک بدنه ساختمان دو درجه آزادی پرداختند. آنها معادلات سیستم را به صورت عددی حل کرده و با انجام آزمون‌های آزمایشگاهی کارایی جاذب‌ها را نیز مورد تأئید قرار دادند.

همچنین از سوی دیگر تأثیر این جاذب غیرخطی نیز بر روی سامانه‌های پیوسته گوناگون نیز تحلیل شده‌اند. گوئو و همکاران [۱۱] به بررسی کارایی چاه غیرخطی انرژی روی کاهش ارتعاشات جانبی روتور، به‌ویژه زمانی که سیستم از سرعت‌های بحرانی می‌گذرد، پرداخته‌اند. آنها چاه غیرخطی انرژی را در داخل بدنه روتور که به صورت شعاعی نوسان می‌کند، در نظر گرفته‌اند و به مقایسه کارایی چاه غیرخطی انرژی و جاذب خطی بهینه در کاهش بهینه ارتعاشات روتور با بررسی اثر پارامترهایی مانند نامیزانی و میرایی چاه پرداختند و به این نتیجه رسیدند که چاه غیرخطی انرژی در مقایسه با جاذب خطی بدون نیاز به دانستن اطلاعات اولیه از نابالانسی و زاویه آن کاراتر است. سامانی و پلیکانو [۱۲] دینامیک یک تیر اویلر-برنولی تحت بار متحرک و کوپل شده با چاه غیرخطی انرژی را مورد مطالعه قرار دادند. هدف آنها به دست آوردن پارامترهای بهینه چاه غیرخطی انرژی (یعنی مکان، سختی و میرایی جاذب) بوده است. جورجیادز و واکاکیس [۱۳] یک ورق متصل به جاذب غیرخطی را که بر روی یک بستر الاستیک قرار دارد، مورد مطالعه قرار داده‌اند. آنها معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی ورق نازک را با استفاده از روش اجزای محدود[۴] حل کردند تا ماتریس ساختار سیستم را به دست آورده و سپس انواع مختلف چاه غیرخطی انرژی را به آن اضافه کردند و پاسخ دینامیکی سیستم را مورد ارزیابی قرار دادند. گئوردیاس و همکاران [۱۴] به بررسی رفتار و کارایی چاه غیرخطی انرژی متصل به یک تیر محوری خطی دارای میرایی، تحت نیروی ضربه‌ای پرداخته‌اند و با استفاده از دو روش موجک[۵] و همچنین ترکیبی از روش‌های تجزیه مودهای تجربی[۶] و تبدیل هیلبرت[۷]، مودهای سیستم را استخراج کرده‌اند و نشان داده‌اند که با کاهش فنریت کوپلینگ و افزایش انرژی شوک واردشده به سیستم، درصد جذب انرژی توسط چاه غیرخطی افزایش می‌یابد. ابراهیمی و خادم [۱۵] به تحلیل دینامیکی یک تیر اویلر-برنولی همراه با چاه غیرخطی انرژی تحت تحریک هارمونیک پرداخته‌اند. برای مدل کردن جاذب غیرخطی از فنریت و میرایی غیرخطی محض استفاده کردند و برای تحلیل‌های عددی خود تنها از مود اول سیستم اصلی استفاده کردند. آنها برای تحلیل شرایط پایداری، شرایط لازم برای رخداد انشعابات هاپف عام[۸] و زین اسبی[۹] را مورد مطالعه قرار دادند و تأثیر پارامترهای مختلف سیستم را بر روی پاسخ فرکانسی[۱۰]، دامنه حالت ماندگار و نواحی منفصل فرکانسی[۱۱]، مورد بررسی قرار دادند.

این مقاله به عنوان پیشرفتی بر مرجع [۱۵]، یک مدل متفاوت از سازه‌های دریایی را با در نظر گرفتن میرایی (استهلاک) برای سیستم اصلی (تیر اویلر-برنولی) و همچنین لحاظ کردن مودهای بالاتر برای تیر را در حل عددی مورد مطالعه قرار می‌دهد که تا حد ممکن به شبیه-سازی واقعی و کاربردی نزدیک‌تر باشد. علاوه بر این نیز برای مدل کردن چاه غیرخطی انرژی نیز از فنریت غیرخطی و میرایی خطی استفاده شده است. همچنین در این پژوهش، علاوه بر روش‌های استفاده شده در مرجع [۱۵]، با استفاده از روش‌های تحلیلی (متوسط‌گیری مختلط شونده[۱۲] و روش مرتبه‌های چندگانه[۱۳]) و همچنین حل عددی (رانگ کوتای مرتبه چهارم[۱۴])، به بررسی و تحلیلی تأثیرات انشعابات زین اسبی و هاپف بر رخداد پدیده نوسانات تخفیف یافته[۱۵] و پاسخ مدوله قوی[۱۶] پرداخته می-شود که تأثیر دقیق و عملی چاه غیرخطی انرژی را در

[۱] Multiple scale
[۲] Harmonic balance
[۳] Targeted energy transfer
[۴] Finite element method
[۵] Wavelet
[۶] Empirical Mode Decomposition (EMD)
[۷] Hilbert transform
[۸] Generic Hopf bifurcation
[۹] Saddle-node bifurcation
[۱۰] Frequency response
[۱۱] Detached resonance curve
[۱۲] Complexification-averaging method
[۱۳] Multiple scales method
[۱۴] Runge-kutta method
[۱۵] Relaxation oscillation
[۱۶] Strongly Modulated Responses (SMR)

تحریک نوسانی خارجی به‌خوبی روشن می‌سازد. برای شبیه‌سازی نیروی سیال خارجی، یک نیروی هارمونیک خارجی با دامنه‌های مختلف در طول کل تیر اعمال خواهد شد. ضمناً برای تحلیل دقیق‌تر اثرات افزودن این جاذب خاص به سیستم مورد نظر، به رسم نمودارهای کاربردی مانند صفحه فاز، نمودار پوانکاره[۱]، طیف فرکانسی و حرکت کند سیستم پرداخته می‌شود.

۲- استخراج معادلات سیستم

در شکل (۱) یک شماتیک کلی از سیستم مورد نظر که شامل یک تیر دوسرگیردار به طول L و متصل به جاذب غیرخطی نشان داده شده است. معادلات دینامیکی سیستم نیز در رابطه (۱) بیان شده‌اند [۱۶ و ۱۷]:

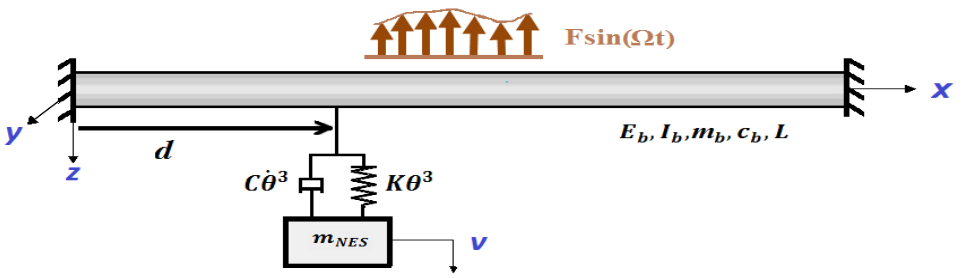
$$E_b I_b w_{xxxx}(x,t)+c_b w_t(x,t)+m_b w_{tt}(x,t)+\{C[w_t(d,t)-v_t(t)]+K[w(d,t)-v(t)]^3\}\delta(x-d)=F\sin(\Omega t) \quad (۱)$$

$$m_{NES} v_{tt}(t)+C[v_t(t)-w_t(d,t)]+K[v(t)-w(d,t)]^3=0 \quad (۲)$$

پارامتر E_b مدول الاستیسیته تیر؛ I_b ممان اینرسی سطح مقطع تیر، x مشخصه راستای طولی تیر، t مشخصه زمان، $w(x,t)$ جابجایی تیر، m_b و c_b نیز به ترتیب چگالی جرمی و میرایی خارجی در واحد طول تیر است. همچنین چاه غیرخطی انرژی با جرم m_{nes}، فنریت K با توان سوم و میرایی خطی با ثابت C در فاصله d از تکیه‌گاه سمت چپ با جابجایی مطلق v به تیر متصل است. در رابطه (۱) عبارت‌های اول، دوم و سوم به ترتیب فنریت، میرایی و اینرسی سیستم اصلی را نشان می‌دهند و عبارت‌های سوم و چهارم نیز به ترتیب نشان دهنده نیروی میرایی و سختی متمرکز از طرف جاذب غیرخطی بر سیستم اصلی است که با کمک تابع دلتای دیراک نمایش داده شده‌اند. سمت راست رابطه (۱) نیز بیانگر نیروی هارمونیک خارجی است که در تمام طول تیر اعمال می‌شود. لازم به ذکر است که در روابط (۱) و (۲) اندیس x و t نیز به ترتیب نشان‌دهنده مشتق مکانی و زمانی است. ابتدا به کمک روش گالرکین[۲] و با شکل مودهای تیرهای دوسرگیردار، می‌توان معادلات زمان و مکان را از هم جدا کرد [۱۸]:

$$\psi_i(x)=\cosh(\lambda_i x)-\cos(\lambda_i x)-\frac{\sin(\lambda_i l')+\sinh(\lambda_i l')}{\cos(\lambda_i l')+\cosh(\lambda_i l')}\{\sinh(\lambda_i x)-\sin(\lambda_i x)\} \quad (۳)$$

در رابطه (۳) که بیانگر شکل مودهای تیر دوسرگیردار است که برای مودهای مختلف، به ترتیب مقادیر $\lambda_1 l'=4.73$، $\lambda_2 l'=7.53$ و ... به عنوان مقادیر ویژه فرکانسی در نظر گرفته می‌شوند که این مقادیر نیز از رابطه فرکانسی شناخته شده $\cosh(x)\cos(x)=1$ استخراج می‌شوند. لازم به ذکر است که در مراجع [۱۹ و ۲۰] کارایی یک چاه غیرخطی انرژی در کاهش ارتعاشات سامانه‌های مختلف مورد بررسی قرار داده‌اند و به این نتیجه رسیده‌اند که اگر فرکانس‌های طبیعی سیستم به‌طور کافی مجزا و از هم دور باشند، سیستم را کلاً به‌صورت دو درجه آزادی می‌توان در نظر گرفت که شامل چاه غیرخطی انرژی و سیستم اصلی یک درجه آزادی منطبق بر فرکانس مورد نظر است. در این حالت با محاسبات انجام شده که در رابطه (۳) نشان داده شده است، سه فرکانس اول سیستم به اندازه کافی از یکدیگر جدا هستند. در محل رزونانس مود اول، فرکانس طبیعی اول برابر با ۴/۷۳ است، فرکانس طبیعی دوم و سوم به ترتیب برابر با ۷/۵۳ و ۱۰/۹۹ هستند و به اندازه کافی از مود اول جدا هستند. بر این اساس برای تیر، مود اول که مهم‌ترین مود است، مورد بررسی قرارگرفته است و سیستم تیر حول فرکانس رزونانسی اول به صورت دو درجه آزادی شامل مود اول تیر و چاه غیرخطی انرژی مدل شده است.



شکل ۱- یک تیر دوسرگیردار تحت تحریک بار هارمونیک خارجی متصل به چاه غیرخطی انرژی

[۱] Poincare map

[۲] Galerkin method

در ادامه برای سادگی، پارامترهای بدون بعد زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{w}=\frac{w}{L},\ \bar{x}=\frac{x}{L},\ \bar{v}=\frac{v}{L},\ \bar{t}=\frac{t}{\tau},\quad \bar{d}=\frac{d}{L},\ \bar{\Omega}=\Omega\tau,\ \varepsilon=\frac{m_{NES}}{m_b L} \qquad (۴)$$

که در روابط بالا متغیر τ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau=\frac{L^2}{\lambda_1^{\,2}}\sqrt{\frac{m_b}{E_b I_b}} \qquad (۵)$$

با قرار دادن روابط (۴) و (۵) در روابط (۱) و (۲) و همچنین حذف علامت بار برای سادگی، معادلات بدون بعد سیستم مورد نظر به‌صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$w_{xxxx}(x,t)+\varepsilon c_p w_t(x,t)+w_{tt}(x,t)+\varepsilon\{\alpha[w_t(d,t)-v_t(t)]+\beta[w(d,t)-v(t)]^3\}\delta(x-d)=\varepsilon A\cos(\Omega t) \qquad (۶)$$

$$\varepsilon v_{tt}(t)+\varepsilon\alpha[v_t(t)-w_t(d,t)]+\varepsilon\beta[v(t)-w(d,t)]^3=0 \qquad (۷)$$

که پارامترهای ظاهر شده بدون بعد در روابط بالا به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$c_p=\frac{2m_b\xi_b\omega_b L^3\sqrt{m_b}}{m_{NES}\lambda_1^{\,2}\sqrt{E_b I_b}},\ \alpha=\frac{CL^2\sqrt{m_b}}{\lambda_1^{\,2}m_{NES}\sqrt{E_b I_b}},\quad \beta=\frac{KL^6 m_b}{\lambda_1^{\,4}m_{NES}E_b I_b},\ A=\frac{FL^4 m_b}{\lambda_1^{\,4}m_{NES}E_b I_b} \qquad (۸)$$

در ادامه با استفاده از روش جداسازی گالرکین می‌توان معادلات سیستم را که به صورت معادلات مشتق جزئی هستند، به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل کرد. از همین رو جابجایی عرضی تیر را می‌توان به‌صورت رابطه (۹) در نظر گرفت:

$$w(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\psi_j(x)\times q_j(t) \qquad (۹)$$

که در رابطه (۹)، $q_j(t)$ و $\phi_j(x)$ به ترتیب j-امین مختصات عمومی وابسته به زمان (نرمالیزه شده) و همچنین مود j-ام مربوط به تیر دوسرگیردار (رابطه (۳)) می‌باشند که دارای خاصیت تعامد مودها نیز می‌باشند (به‌عبارت‌دیگر $\int_0^1\phi_i\phi_j dx=\delta_{ij}$). با قرار دادن رابطه تقریبی (۹) در روابط (۶) و (۷) و انتگرال‌گیری بر روی کل طول تیر و همچنین در نظر گرفتن مود اصلی برای سیستم پیوسته اصلی و لحاظ کردن خواص تابع دلتای دیراک، به دست خواهد آمد:

ضرایب رابطه پایین در پیوست (الف) آورده شده‌اند.

$$m_{11}(q_1(t))_{tt}+k_{11}q_1(t)+\varepsilon\xi(q_1(t))_t+\varepsilon\alpha\phi_1(d)\{\phi_1(d)\times(q_1(t))_t-v_t\}+\varepsilon\beta\phi_1(d)\{\phi_1(d)\times q_1(t)-v\}^3=\varepsilon A_1\cos(\Omega t) \qquad (۱۰)$$

$$\varepsilon v_{tt}(t)+\varepsilon\alpha[v_t(t)-\phi_1(d)\times(q_1(t))_t]+\varepsilon\beta[v(t)-\phi_1(d)\times q_1(t)]^3=0 \qquad (۱۱)$$

در روابط بالا عدم تقارن معادلات کوپل شده، باعث پیچیده شدن روابط تحلیلی می‌شود. به همین دلیل و به منظور استخراج روابط متقارن، با در نظر گرفتن روابط $q_1'(t)\phi_1(d)\times q_1(t)\,,\phi_1(d)=\phi_{1d}\,,m_{11}'\,m_{11}/\phi_{1d}^2$ و $k_{11}'=k_{11}/\phi_{1d}^2$ می‌توان نوشت:

$$m_{11}'(q_1'(t))_{tt}+k_{11}'q_1'(t)+\frac{\varepsilon\xi}{\phi_{1d}}(q_1'(t))_t+\varepsilon\alpha\{(q_1'(t))_t-v_t\}+\varepsilon\beta\{q_1'(t)-v\}^3=\varepsilon\frac{A}{\phi_{1d}}\cos(\Omega t) \qquad (۱۲)$$

$$\varepsilon v_{tt}+\varepsilon\alpha[v_t-(q_1'(t))_t]+\varepsilon\beta[v-q_1'(t)]^3=0 \qquad (۱۳)$$

که در روابط (۱۲) و (۱۳)، $q_1'(t)$ نشان دهنده اولین مختصه عمومی وابسته به زمان (نرمالیزه شده) است، پارامتر ξ میرایی بدون بعد تیر را نشان می‌دهد و پارامترهای α و β نیز به ترتیب نشان دهنده میرایی و سختی بی‌بعد چاه غیرخطی انرژی هستند. در ادامه روند حل برای سادگی از آوردن علامت پریم اجتناب می‌شود.

۲-۱- روش متوسط‌گیری مختلط شونده

برای به دست آوردن رفتار پاسخ حالت پایدار سیستم کوپل شده جاذب و تیر، از روش متوسط‌گیری مختلط شونده استفاده شده است [۲۱]. با استفاده از این روش، دو بخش کند و تند حرکت از یکدیگر جدا می‌شود. بخش تند مربوط به فرکانس طبیعی سیستم و بخش کند مربوط به دامنه ارتعاشات تیر و جاذب است. با در نظر گرفتن نسبت جرمی کوچک جاذب به سیستم اصلی مطابق ادبیات فنی ($\varepsilon \ll 1$) و همچنین این نکته که رفتار سیستم حول فرکانس طبیعی مورد بررسی قرار می‌گیرد ($k_{11}=m_{11}(\Omega^2+\varepsilon\sigma)$)، ابتدا معادلات را از مختصات کنونی به مختصات مرکز جرم (یعنی $u(t)=q_1(t)+\varepsilon v(t)$) و جابه‌جائی نسبی

(یعنی $w(t)=q_1(t)-v(t)$) انتقال داده خواهند شد. دلیل اصلی این تبدیل مختصات این است که برای بررسی کارایی جاذب، جابه‌جائی نسبی دارای اهمیت است و هر چه بیشتر باشد، نشان دهنده انتقال بهتر انرژی از سیستم اصلی به جاذب و نهایتاً از بین رفتن انرژی است. در روش متوسط‌گیری مختلط شونده، پاسخ سیستم به‌صورت مجموع چند پاسخ که فرکانس‌های غالب را در سیستم شامل می‌شود، به دست می‌آید. در اینجا برای هر دو جابه‌جائی تیر و جاذب، یک حرکت غالب که شامل حرکت با فرکانس طبیعی سیستم است (یعنی $u(t)=u_1(t),\ w(t)=w_1(t)$) در نظر گرفته می‌شود. بر طبق این روش با تعریف پارامترهای مختلط زیر خواهد شد $(i^2=\sqrt{-1})$:

$$\begin{aligned}\phi_1(t)e^{i\Omega t} &= \dot{u}_1(t)+i\Omega u_1(t)\\ \phi_2(t)e^{i\Omega t} &= \dot{w}_1(t)+i\Omega w_1(t)\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

در این رابطه ($e^{i\Omega t}$) مربوط به بخش سریع حرکت و فرکانس طبیعی سیستم است. $\phi_1(t)$ و $\phi_2(t)$ به ترتیب دامنه مختلط حرکت مرکز جرم تیر و چاه و همچنین حرکت نسبی تیر و چاه را نشان می‌دهد. این عبارت‌ها مربوط به قسمت کند حرکت هستند و به تدریج تغییر می‌کنند. با قرار دادن رابطه بالا در معادلات (۱۲) و (۱۳) و نگه‌داشتن بخش‌های شامل عبارت $e^{i\Omega t}$ و فاکتور گرفتن از آن عبارت، معادله حاکم بر رفتار قسمت کند حرکت به‌صورت روابط (۱۵) و (۱۶) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\phi_1(t)+\frac{\varepsilon}{8(1+\varepsilon)\Omega^3}\{4\phi_2(t)\varepsilon\xi\Omega^3\phi_{1d}\\ &+4\phi_1(t)\xi\Omega^3\phi_{1d}-4A\varepsilon\phi_{1d}\Omega^3+3i\phi_2(t)\left|\phi_2(t)\right|^2\beta\varepsilon\\ &+4\phi_2(t)\alpha\varepsilon\phi_{1d}^2\Omega^3-4A\Omega^3\phi_{1d}+4i\phi_1(t)\Omega^4\\ &+4\phi_2(t)\alpha\Omega^3\phi_{1d}^2-3i\phi_2(t)\left|\phi_2(t)\right|^2\beta\epsilon\phi_{1d}^2\\ &-4i\phi_1(t)\sigma\Omega^2+3i\phi_2(t)\left|\phi_2(t)\right|^2\beta-4\phi_2(t)\alpha\varepsilon\Omega^3\\ &-3i\phi_2(t)\left|\phi_2(t)\right|^2\beta\phi_{1d}^2-4i\phi_2(t)\Omega^4\\ &-4\phi_2(t)\alpha\Omega^3-4i\phi_2(t)\varepsilon\sigma\Omega^2\}=0\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\phi_2(t)+\frac{1}{8(1+\varepsilon)\Omega^3}\{4\phi_2(t)\varepsilon^2\xi\phi_{1d}\Omega^3\\ &+4\phi_1(t)\varepsilon\xi\phi_{1d}\Omega^3-4\varepsilon^2A\phi_{1d}\Omega^3-4i\phi_1(t)\Omega^4\\ &+4\phi_2(t)\alpha\varepsilon^2\phi_{1d}^2\Omega^3-4A\varepsilon\phi_{1d}\Omega^3+4i\phi_2(t)\Omega^4\\ &+4\phi_2(t)\alpha\varepsilon\phi_{1d}^2\Omega^3-3i\phi_2(t)\left|\phi_2(t)\right|^2\beta\\ &-4i\phi_2(t)\varepsilon^2\sigma\Omega^2-3i\phi_2(t)\left|\phi_2(t)\right|^2\beta\varepsilon\\ &+4\phi_2(t)\alpha\varepsilon\Omega^3-3i\phi_2(t)\left|\phi_2(t)\right|^2\beta\varepsilon\phi_{1d}^2\\ &-4i\phi_1(t)\varepsilon\sigma\Omega^2-3i\phi_2(t)\left|\phi_2(t)\right|^2\beta\varepsilon^2\phi_{1d}^2\\ &+4\phi_2(t)\alpha\Omega^3\}=0\end{aligned} \qquad (۱۶)$$

۲-۲- تحلیل انشعابات

ابتدا نقاط سکون مورد بررسی قرار می‌گیرند. این تحلیل دارای اهمیت فیزیکی بالائی است و در واقع نشان دهنده دامنه ماندگار حرکت نوسانی معادلات دینامیکی سیستم است. برای به دست آوردن نقاط سکون مشتقات را برابر صفر قرار داده و از رابطه (۱۶) ϕ_1 استخراج و در رابطه (۱۷) قرار داده می‌شود و معادله جبری حاکم بر تغییرات نقطه سکون جابجایی نسبی سیستم ($Z=\left|\varphi_{20}\right|^2$) به‌صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned}&[9\beta^2\left(\phi_{1d}^4\Omega^4+\phi_{1d}^2\xi^2\Omega^2-2\phi_{1d}^2\sigma\Omega^2+\sigma^2\right)]Z^3\\ &+[24\beta\Omega^4\left(-\phi_{1d}^2\xi^2\Omega^2+\phi_{1d}^2\sigma\Omega^2-\sigma^2\right)]Z^2+\\ &[16\Omega^6\begin{pmatrix}\phi_{1d}^4\alpha^2\Omega^4+2\phi_{1d}^3\alpha\xi\Omega^4+\phi_{1d}{}^2\alpha^2\xi^2\Omega^2+\\ \phi_{1d}{}^2\xi^2\Omega^4-2\phi_{1d}{}^2\alpha^2\sigma\Omega^2+\alpha^2\sigma^2+\sigma^2\Omega^2\end{pmatrix}]Z\\ &-16\phi_{1d}{}^2A^2\Omega^{10}=0\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

رابطه (۱۷) می‌تواند یک الی سه ریشه داشته باشد و بنا بر پیوستگی معادلات درجه سوم، یک سری نقاط انشعاب زین اسبی و هاپف عام در سیستم مشاهده خواهند شد. انشعابات زین اسبی زمانی در سیستم رخ خواهند داد که علاوه بر برقرار بودن رابطه (۱۷)، مشتق این عبارت نیز برابر با صفر شود [۲۲]. به منظور تعیین نواحی رخداد انشعابات هاپف، با تعریف مقادیر اغتشاشی[۱] بسیار کوچک $\delta_1(t)$ و $\delta_2(t)$ حول نقاط سکون می‌توان نوشت:

$$\phi_1(t)=\phi_{10}+\delta_1(t)\ ,\ \phi_2(t)=\phi_{20}+\delta_2(t) \qquad (۱۸)$$

با قرار دادن رابطه (۱۸) در معادلات (۱۵) و (۱۶) و صرف‌نظر از عبارات غیرخطی و نگه‌داشتن عبارات خطی نسبت به δ_i، پایداری نقاط سکون بر اساس معادله مشخصه سیستم کوپل شده به‌صورت زیر استخراج می‌شود:

$$\mu^4+\eta_1\mu^3+\eta_2\mu^2+\eta_3\mu+\eta_4=0 \qquad (۱۹)$$

ضرایب رابطه (۱۹) در پیوست (ب) آورده شده است. برای رخداد انشعاب هاپف با فرض ریشه مختلط مزدوج خالص (به‌صورت $\mu=\pm j\omega$) و جدا کردن بخش‌های حقیقی و موهومی، شرط لازم برای رخداد انشعاب هاپف به دست خواهد آمد:

[۱] Perturbation

$$\eta_3^2-\eta_2\eta_3\eta_1+\eta_4\eta_1^2=0 \tag{۲۰}$$

علاوه بر رابطه (۲۰)، دامنه نوسانات نیز باید در رابطه (۱۷) نیز باید صدق کند [۲۳].

۲-۳- تحلیل پدیده نوسانات تخفیفی

یکی از نکات مهمی که در حل تحلیلی سامانه‌های غیرخطی وجود دارد این است که، پاسخ سیستم به شرایط اولیه وابسته است. اگر شرایط اولیه به اندازه کافی به نقاط ساکن سیستم نزدیک باشد، جذب آنها می‌شود و در غیر این صورت ممکن است رفتار دینامیکی سیستم جذب رژیم‌های حرکتی دیگر که در سیستم وجود دارند، شود. به همین دلیل می‌توان گفت که تحلیل‌های بخش قبل محلی[۱] است و در صورتی برقرار است در رفتار سیستم که شرایط اولیه به این پاسخ‌های پایدار نزدیک باشد. برای انجام تحلیل پاسخ مدوله قوی از معادلات مرتبه اول کوپل شده (۱۵) و (۱۶)، استفاده می‌شود. بدین منظور از رابطه (۱۶)، $\phi_1(t)$ را برحسب $\phi_2(t)$ و مشتق زمانی آن، استخراج کرده و با قرار دادن در معادله اول، یک معادله مرتبه دوم برحسب $\phi_2(t)$ که حاکم بر رفتار ارتعاشی کند سیستم است، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\varphi_2}{dt^2}-\frac{3i\,\beta(\varepsilon\phi_{1d}^2+1)}{8\Omega^3}\frac{d}{dt}\{\varphi_2|\varphi_2|^2\}-\frac{i\Omega\varepsilon\phi_{1d}A}{4}\\
&+\{\frac{3i\,\varepsilon\zeta\beta\phi_{1d}}{16\Omega^3}-\frac{3\varepsilon\sigma\beta}{16\Omega^4}+\frac{3\phi_{1d}\,\varepsilon\beta}{16\Omega^2}\}\varphi_2|\varphi_2|^2\\
&+\{\frac{\alpha(\varepsilon\phi_{1d}^2+1)+\zeta\,\varepsilon\phi_{1d}+i\Omega}{2}-\frac{i\,\varepsilon\sigma}{2\Omega}\}\frac{d\varphi_2}{dt}\\
&+\{\frac{i\Omega\varepsilon\phi_{1d}(\alpha\phi_{1d}+\zeta)+\phi_{1d}\,\varepsilon\zeta\alpha+\varepsilon\sigma}{4}-\frac{i\,\varepsilon\sigma\alpha}{4\Omega}\}\varphi_2=0
\end{aligned} \tag{۲۱}$$

برای بررسی تحلیلی این معادله، از روش مرتبه چندگانه، با معرفی مرتبه‌های زمانی به‌صورت $\tau_r=\varepsilon^r t,\ r=0,1,\ldots$ استفاده‌شده است. τ_0 مرتبه زمانی اول و سریع‌ترین آنها است و با نسبت پارامتر کوچک تعیین شده (یعنی (ε))، τ_1 زمان کندتری است و زمان‌های بعدی نیز به همین صورت کندتر می‌شوند. مشتقات زمانی نیز به‌صورت زیر با مرتبه‌های زمانی رابطه پیدا می‌کنند:

$$\begin{aligned}
&\varphi_2=\varphi_2(\tau_0,\tau_1,\ldots),\\
&\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial\tau_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau_1}+\ldots,\\
&\frac{d^2}{dt^2}=\frac{\partial^2}{\partial\tau_0^2}+2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial\tau_0\partial\tau_1}+\ldots
\end{aligned} \tag{۲۲}$$

با قرار دادن روابط بالا در رابطه (۲۱) و مرتب کردن عبارت‌های معادله برحسب ضرایب ε، مرتبه‌های متفاوت زمانی معادله به صورت زیر استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned}
&O(\varepsilon^0):\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\tau_0^2}+[\frac{i\Omega+\alpha}{2}]\frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau_0}-\frac{3i\beta}{8\Omega^3}\frac{\partial}{\partial\tau_0}[\varphi_2|\varphi_2|^2]=0\\
&O(\varepsilon^1):2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\tau_0\partial\tau_1}-[\frac{i\sigma}{2\Omega}-\frac{\phi_{1d}(\alpha\phi_{1d}+\zeta)}{2}]\frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau_0}\\
&\quad-\frac{3i}{8\Omega^3}\frac{\partial}{\partial\tau_0}[\varphi_2|\varphi_2|^2]+[\frac{i\Omega+\alpha}{2}]\frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau_1}\\
&\quad-\frac{3i\beta\phi_{1d}^2}{8\Omega^3}\frac{\partial}{\partial\tau_1}[\varphi_2|\varphi_2|^2]-\frac{i\Omega\phi_{1d}A}{4}\\
&\quad+[\frac{i\Omega\phi_{1d}(\zeta+\alpha\phi_{1d})}{4}+\frac{\sigma+\phi_{1d}\alpha\zeta}{4}-\frac{i\sigma\alpha}{4\Omega}]\varphi_2\\
&\quad+[\frac{3\beta\phi_{1d}}{16\Omega^2}-\frac{3(\sigma+\zeta\Omega\phi_{1d})\beta}{16\Omega^4}]\varphi_2|\varphi_2|^2=0\\
&O(\varepsilon^2):\ \ldots
\end{aligned} \tag{۲۳}$$

رابطه اول مربوط به سریع‌ترین زمان است که با انتگرال‌گیری از این رابطه به دست خواهد آمد:

$$D_0\varphi_2+\{\frac{i\Omega+\alpha}{2}\}\varphi_2-\frac{3i\beta}{8\Omega^3}\varphi_2|\varphi_2|^2=C(\tau_1,\tau_2,\ldots) \tag{۲۴}$$

با محدود کردن پاسخ سیستم به مرتبه‌های زمانی τ_0 و τ_1، رابطه نقاط تعادل پاسخ سیستم به دست می‌آید:

$$\{\frac{i\Omega+\alpha}{2}\}\varphi(\tau_1)-\frac{3i\beta}{8\Omega^3}\varphi(\tau_1)|\varphi(\tau_1)|^2=C(\tau_1) \tag{۲۵}$$

با نوشتن رابطه (۲۵) به‌صورت قطبی یعنی $\phi(\tau_1)=N(\tau_1)e^{i\theta(\tau_1)}$، عبارت جبری مربوط به اندازه پارامترها به‌صورت رابطه (۲۶) به دست می‌آید (با فرض $S(\tau_1)=N^2(\tau_1)$):

$$[\frac{\alpha}{2}]^2S(\tau_1)+[\frac{\Omega}{2}-\frac{3\beta S(\tau_1)}{8\Omega^3}]^2S(\tau_1)=|C(\tau_1)|^2 \tag{۲۶}$$

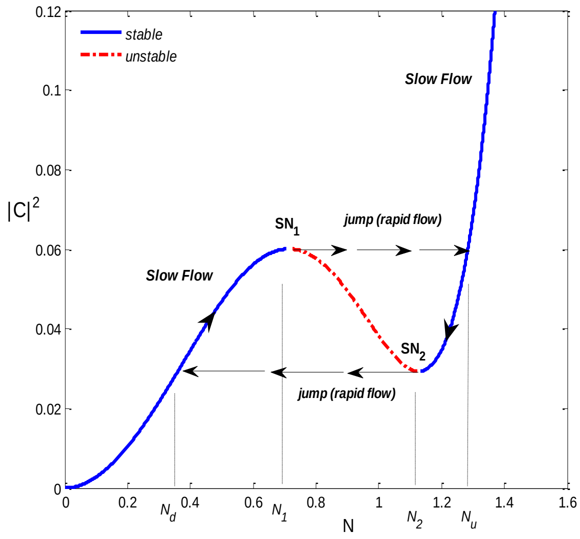
تعداد پاسخ‌های معادله (۲۶) بستگی به مقادیر $|C(\tau_1)|$، Ω، α و β دارد. پارامترهای $|C(\tau_1)|$ و N به ترتیب نشان دهنده انرژی سیستم و همچنین دامنه حرکت نسبی سیستم می‌باشند. قسمت همگن رابطه (۲۶) مطابق با خواص توابع درجه سه، ممکن است که یکنواخت و یا این‌که دارای ماکزیمم و مینیمم باشد. در حالت اول بدون وابستگی به میزان $|C(\tau_1)|$، معادله فقط دارای یک ریشه است. اما در حالت دوم بسته به میزان $|C(\tau_1)|$ دارای یک یا سه ریشه است. در این حالت تغییرات $|C(\tau_1)|$ ایجاد گره‌های زین اسبی می‌کند و بر اثر آن متعاقباً مجموعه‌ای از نقاط تعادل پایدار و ناپایدار ایجاد می‌شود. در صورتی که مشتق قسمت همگن دارای پاسخ حقیقی باشد، حالت دوم رخ داده و در

[۱] Local

غیر این صورت سیستم به‌صورت یکنواخت است. مقدار اکسترمم حالت دوم را می‌توان به از رابطه (۲۷) استخراج کرد:

$$\frac{d}{dS}\{[\frac{\alpha}{2}]^2 S(\tau_1)+[\frac{\Omega}{2}-\frac{3\beta S(\tau_1)}{8\Omega^3}]^2 S(\tau_1)\}=0$$
$$\Rightarrow N_{1,2}=\sqrt{S_{1,2}}=\sqrt{\frac{4\Omega^3[2\Omega\pm\sqrt{\Omega^2-3\alpha^2}]}{9\beta}} \qquad (۲۷)$$

از رابطه (۲۷) مشخص است که به ازای $(\alpha<\Omega/\sqrt{3})$ (میرایی نسبتاً پایین) سیستم دارای یک جفت ریشه و بالطبع انشعابات زین اسبی است و به ازای $(\alpha>\Omega/\sqrt{3})$ سیستم دارای یک پاسخ است. به عبارت دیگر در مرتبه τ_0، در صورتی که سیستم دارای یک پاسخ باشد، پایدار است، اما در صورتی که دارای سه پاسخ باشد، دارای دو پاسخ پایدار و یک پاسخ ناپایدار است. در این مرتبه زمانی سیستم نهایتاً جذب یکی از این گره‌ها می‌شود. نمودار منیفولد آهسته نامتغیر سیستم با پارامترهای $\Omega=1$، $\beta=1$ و $\alpha=0.3$ در شکل (۲) نشان داده شده است.



شکل ۲- تصویر نمودار منیفولد آهسته نامتغیر در صفحه $|C|^2$ و $N(\tau_1)$ (رخداد پرش و همچنین انشعاب زین اسبی)

پدیده پرش که در واقع قسمت سریع حرکت کند است و پاسخ‌های پایدار و ناپایدار سیستم و انشعاب زین اسبی نشان داده شده‌اند. در این نمودار چون دو ناحیه پایدار برای پاسخ سیستم وجود دارد، امکان پدیده پرش بین این دو ناحیه وجود دارد که باعث ایجاد نوسانات تخفیفی در رفتار سیستم می‌شود [۲۳]. برای این منظور باید رفتار سیستم را در اطراف قسمت پایدار منیفولد نامتغیر آهسته[۱] را وقتی $\tau_0\to\infty$، است، را بررسی کرد. با توجه به این نکته، $\Phi(\tau_1)=\lim_{\tau_0\to\infty}\varphi_2(\tau_0,\tau_1)$ است و مرتبه ε^1 معادلات سیستم، به صورت رابطه (۲۸) می‌شود:

$$[\frac{i\Omega+\alpha}{2}-\frac{3i\beta}{4\Omega^3}|\Phi|^2]\frac{\partial\Phi}{\partial\tau_1}-\frac{3i\beta|\Phi|^2}{8\Omega^3}\frac{\partial\Phi^*}{\partial\tau_1}=G$$
$$G=[\frac{3\beta\phi_{1d}}{16\Omega^2}-\frac{3(\sigma+\zeta\Omega\phi_{1d})\beta}{16\Omega^4}]\Phi|\Phi|^2 \qquad (۲۸)$$
$$-[\frac{i\Omega^2\phi_{1d}(\zeta+\alpha\phi_{1d})-i\sigma\alpha-\sigma\Omega}{4\Omega}]\Phi+\frac{i\Omega\phi_{1d}A}{4}$$

که در رابطه (۲۸) علامت ستاره، نشانگر مقدار مزدوج یک پارامتر است. با انجام محاسبات ریاضی، مقدار تغییرات پاسخ کند سیستم به شکل زیر به دست خواهد آمد:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tau_1}=$$
$$\frac{8\Omega^3[[4\alpha\Omega^3-4i\Omega^4+6i\,\beta|\Phi|^2]G+3i\,\beta\Phi^2G^*]}{16\alpha^2\Omega^6+16\Omega^8-48\Omega^4\beta|\Phi|^2+27\beta^2|\Phi|^4} \qquad (۲۹)$$

با فرض رابطه قطبی $(\Phi=N(\tau_1)e^{i\gamma(\tau_1)})$، قسمت‌های حقیقی و مجازی این رابطه جبری مختلط درجه اول، هرکدام به‌صورت یک رابطه جبری مرتبه اول حقیقی بیان می‌شود که با حل این دو معادله دیفرانسیل کوپل شده، $\partial\theta(\tau_1)/\partial\tau_1$ و $\partial N(\tau_1)/\partial\tau_1$ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial N(\tau_1)}{\partial\tau_1}=-\phi_{1d}[16\phi_{1d}N(\tau_1)\alpha\Omega^8-16A\cos(\theta)\Omega^8-$$
$$16A\sin(\theta)\alpha\Omega^7+16N(\tau_1)\alpha^2\xi\Omega^6+16N(\tau_1)\xi\Omega^8$$
$$+9N(\tau)^5\beta^2\xi-24N(\tau_1)^3\beta\xi\Omega^4+12A\cos(\theta)N(\tau_1)^2\beta\Omega^4] \qquad (۳۰)$$
$$/\{32\alpha^2\Omega^6+32\Omega^8-96N(\tau_1)^2\beta\Omega^4+54N(\tau)^4\beta^2\}$$

$$\frac{\partial\theta(\tau_1)}{\partial\tau_1}=-[16\phi_{1d}A\sin(\theta)\Omega^9-16N(\tau_1)\sigma\Omega^8-27N(\tau_1)^5\beta^2\sigma-$$
$$16\phi_{1d}A\cos(\theta)\alpha\Omega^8-16N(\tau)\alpha^2\sigma\Omega^6+48N(\tau)^3\beta\sigma\Omega^4$$
$$+16\phi_{1d}{}^2N(\tau_1)\alpha^2\Omega^8-12\phi_{1d}{}^2N(\tau_1)^3\beta\Omega^6+27\phi_{1d}{}^2N(\tau_1)^5\beta^2\Omega^2 \qquad (۳۱)$$
$$+24\phi_{1d}N(\tau_1)^3\alpha\beta\xi\Omega^4-36\phi_{1d}A\sin(\theta)N(\tau_1)^2\beta\Omega^5]$$
$$/\{2N(\tau_1)\Omega(16\alpha^2\Omega^6+16\Omega^8-48N(\tau_1)^2\beta\Omega^4+27N(\tau_1)^4\beta^2)\}$$

در صورتی که سیستم تحت نیروی خارجی نباشد، پرش از دامنه بالا به پائین رخدادی بدیهی است (شکل (۲)). اما برای اینکه نوسانات تخفیفی رخ دهد، سیستم باید توانایی پرش از دامنه پائین به بالا را داشته باشد. این پدیده زمانی رخ می‌دهد که در دامنه بحرانی کوچک‌تر سیستم که معادل با دامنه نقطه SN_1 در شکل (۲) است، در صفحه فاز $N(\tau_1)-\theta(\tau_1)$ انشعاب زین اسبی رخ دهد. این بدان معنا است که احتمال رخداد پرش از شاخه پایدار پائین به بالا و

[۱] The slow invariant manifold

نوسانات تخفیفی وجود خواهد داشت. برای محاسبه میزان تحریک خارجی بحرانی که در دامنه SN_1 انشعاب زین اسبی رخ داده و احتمالاً نوسانات تخفیفی وجود خواهد داشت، صفر بودن صورت رابطه (۲۹)، شرط دامنه بحرانی تحریک خارجی خواهد بود [۲۳]:

$$\begin{aligned}&[\frac{i\Omega+\alpha}{2}-\frac{3i\beta}{4\Omega^3}N(\tau_1)^2][(\frac{\partial N(\tau_1)}{\partial\tau_1}+iN(\tau_1)\frac{\partial\theta(\tau_1)}{\partial\tau_1})e^{i\theta(\tau_1)}]\\&-\frac{3i\beta N(\tau_1)^2}{8\Omega^3}[(\frac{\partial N(\tau_1)}{\partial\tau_1}-iN(\tau_1)\frac{\partial\theta(\tau_1)}{\partial\tau_1})e^{-i\theta(\tau_1)}]\\&=[\frac{3\beta\phi_{1d}}{16\Omega^2}-\frac{3(\sigma+\zeta\Omega\phi_{1d})\beta}{16\Omega^4}]N(\tau_1)^3e^{i\theta(\tau_1)}+\frac{i\Omega\phi_{1d}A}{4}\\&-[\frac{i\Omega^2\phi_{1d}(\zeta+\alpha\phi_{1d})-i\sigma\alpha-\sigma\Omega}{4\Omega}]N(\tau_1)e^{i\theta(\tau_1)}\end{aligned} \qquad (۳۲)$$

با فرض رابطه قطبی $(\Phi=N(\tau_1)e^{i\theta(\tau_1)})$ و همچنین ساده‌سازی‌های مثلثاتی، رابطه مختلط (۳۲)، به صورت دو معادله حقیقی زیر نوشته خواهد شد:

$$\begin{aligned}&12AN(\tau)^2\beta\Omega^5\cos(\theta)-16\cos(\theta)\Omega^9A\\&-16\sin(\theta)A\alpha\Omega^8+16\Omega^9\phi_{1d}\alpha N(\tau)\\&+16\alpha^2N(\tau)\xi\Omega^7+16\Omega^9N(\tau)\xi\\&-24N(\tau)^3\beta\xi\Omega^5+9N(\tau)^5\beta^2\xi\Omega=0\end{aligned} \qquad (۳۳)$$

$$\begin{aligned}&16\phi_{1d}A\sin(\theta)\Omega^9-16N(\tau)\sigma\Omega^8+27\phi_{1d}^2N(\tau)^5\beta^2\Omega^2\\&-36\phi_{1d}A\sin(\theta)N(\tau)^2\beta\Omega^5-16\phi_{1d}A\cos(\theta)\alpha\Omega^8\\&+24\phi_{1d}N(\tau)^3\alpha\beta\xi\Omega^4+48N(\tau)^3\beta\sigma\Omega^4\\&+16\phi_{1d}^2N(\tau)\alpha^2\Omega^8-12\phi_{1d}^2N(\tau)^3\beta\Omega_0{}^6-27N(\tau)^5\beta^2\sigma\\&-16N(\tau)\alpha^2\sigma\Omega^6-27N(\tau)^5\beta^2\sigma=0\end{aligned} \qquad (۳۴)$$

با حل معادلات بالا برای $\sin(\theta)$ و $\cos(\theta)$ مقدار زاویه θ طبق رابطه (۳۵) به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}&\theta_{[i]}=\sin^{-1}(\frac{4\alpha\Omega^3}{(16\alpha^2\Omega^6+16\Omega^8-24N_{[i]}^2\beta\Omega^4+9N_{[i]}^4\beta^2)^{1/2}})\pm\\&\cos^{-1}(\frac{N_{[i]}\phi_{1d}(16\phi_{1d}\alpha^2\zeta\Omega^6+16\Omega^8\alpha+16\Omega^8\zeta-24N_{[i]}^2\beta\zeta\Omega^4+9N_{[i]}^4\beta^2\zeta)}{4\Omega^4\phi_{1d}A(16\alpha^2\Omega^6+16\Omega^8-24N_{[i]}^2\beta\Omega^4+9N_{[i]}^4\beta^2)^{1/2}})\end{aligned} \qquad (۳۵)$$

با قرار دادن دو مقدار دامنه بحرانی SN_1 و SN_2 در رابطه بالا، زوایایی که در آن انشعاب زین اسبی در دامنه‌های بحرانی رخ می‌دهد، به دست می‌آید. میزان دامنه بحرانی نوسانات سیستم، ریشه مخرج رابطه (۲۹) و همچنین برابر با ریشه‌های رابطه (۲۷) است.

دامنه بحرانی تحریک خارجی از روی رابطه (۳۵)، زمانی که عبارت داخل عبارت $\cos^{-1}$ برابر با یک باشد، به دست می‌آید [۲۳ و ۲۴]:

$$\begin{aligned}A_{[i]c}&=N_i(16\phi_{1d}\alpha\Omega^8+16\alpha^2\xi\Omega^6+16\xi\Omega^8\\&-24N_i{}^2\beta\xi\Omega^4+9N_i{}^4\beta^2\xi)\\&/4\Omega^4\sqrt{16\alpha^2\Omega^6+16\Omega^8-24N_i{}^2\beta\Omega^4+9N_i{}^4\beta^2}\end{aligned} \qquad (۳۶)$$

به بیان دیگر، شرط لازم برای اینکه در سیستم نوسانات تخفیفی رخ دهد، پرش از پائین به بالا است $(A>A_{[1]c})$. این موضوع در ادبیات فنی به اثبات رسیده است که اگر جریان‌های دینامیکی که از نقاط با دامنه N_1 و فاز بین θ_1 و θ_2 شروع به حرکت می‌کنند و در نهایت پس از پرش‌های متوالی (یعنی جریان‌های سریع دینامیکی) و حرکت‌های کند دینامیکی، به این ناحیه برگردند، نشان دهنده این موضوع است که در سیستم قطعاً پدیده نوسانات تخفیف یافته رخ می‌دهد [۲۳].

پدیده پرش به دلیل اینکه بسیار سریع رخ می‌دهد، می‌توان گفت که انرژی موجود در سیستم $|C|$ ثابت باقی می‌ماند و طبق رابطه (۲۶)، زمانی که سیستم از نقطه‌ای با دامنه N_1 به نقطه‌ای با دامنه N_u پرش می‌کند، می‌توان با برابر قرار دادن انرژی‌ها رابطه (۳۷) را نیز استخراج کرد:

$$\begin{aligned}&[\frac{\alpha}{2}]^2S_1(\tau_1)+[\frac{\Omega}{2}-\frac{3\beta S_1(\tau_1)}{8\Omega^3}]^2S_1(\tau_1)=|C(\tau_1)|^2\\&=[\frac{\alpha}{2}]^2S_u(\tau_1)+[\frac{\Omega}{2}-\frac{3\beta S_u(\tau_1)}{8\Omega^3}]^2S_u(\tau_1)\\&\Rightarrow S_u=|N_u|^2=\frac{8\Omega^3}{9\beta}[\Omega+\sqrt{\Omega^2-3\alpha^2}]\end{aligned} \qquad (۳۷)$$

به همین صورت اندازه دامنه و زاویه در محل انتهای پرش در دامنه پایین‌تر (N_d) از روی برابری انرژی بین این نقطه با محل با دامنه (N_2) به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$S_d=|N_d|^2=\frac{8\Omega^3}{9\beta}[\Omega-\sqrt{\Omega^2-3\alpha^2}] \qquad (۳۸)$$

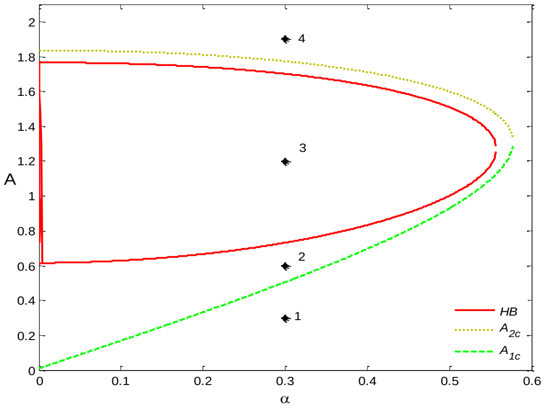
$$\theta_u=\theta_1+\tan^{-1}(\frac{9\alpha\sqrt{\Omega^2-3\alpha^2}}{15\alpha^2-\Omega\sqrt{\Omega^2-3\alpha^2}-\Omega^2}) \qquad (۳۹)$$

$$\theta_d=\theta_2-\tan^{-1}(\frac{9\alpha\sqrt{\Omega^2-3\alpha^2}}{15\alpha^2+\Omega\sqrt{\Omega^2-3\alpha^2}-\Omega^2}) \qquad (۴۰)$$

۳- بحث و نتایج

به منظور بررسی صحت راه حل ارائه شده، ابتدا یک تیر دوسرگیردار با سطح مقطع دایروی با مشخصات هندسی و مادی m_b=200Kg/m، L=15m، D=0.5m، E_b=207Gpa و C_b=30N.s.m^{-2} در نظر گرفته می‌شود. مقدار پارامتر میرایی بی‌بعد تیر ξ=0.02 به دست می‌آید. همچنین مقدار فرکانس رزونانس مود اول نیز بر اساس

رابطه (۱۲)، $\omega_1=\sqrt{k_{11}/m_{11}}=1$ به دست خواهد آمد. به دلیل تقارن در شرایط تکیه‌گاهی، در مقاطع متفاوت تیر از تکیه‌گاه تا وسط تیر، شرایط وجود جاذب بهینه بررسی می-شود. این کار با بررسی نمودارهای انشعاب هاپف، زین اسبی و همچنین دامنه بحرانی در صفحه A و α شروع شده است. این نمودارها در سه مقطع تیر (d=0.5، d=0.24 وd=0.12) که می‌توان جاذب را متصل کرد، بررسی شده است. سپس در پارامترهای مناسب انتخاب شده، دیاگرام فاز، نمودار پرش‌های مداوم[۱]، نمودار مسیر حرکت کند سیستم در صفحه فاز و همچنین برای صحه‌سازی نتایج به بررسی نتایج راه حل عددی و رسم نمودارهای پاسخ زمانی، نمودار پوانکاره و طیف فرکانسی پرداخته می‌شود و در انتها محدوده رخداد پاسخ مدوله قوی که به عنوان معیار کارایی چاه غیرخطی انرژی است، مورد بررسی قرار گرفته است. مقطع اول در وسط تیر انتخاب شده است.



شکل ۳- محدوده‌های رخداد انشعابات زین اسبی، هاپف و نیروی بحرانی به ازای d=0.5 و σ=1

اگر جاذب در وسط تیر متصل شده باشد، پارامترهای مکانی سیستم به‌صورت d=0.5 و $\phi_{1d}=1.972$ است و محاسبات برای σ=1 انجام شده است. نمودارهای محل رخداد انشعاب هاپف (HB)، زین اسبی (SN) و دامنه تحریک بحرانی (A_{ic}) به عنوان شرط لازم رخداد پاسخ مدوله قوی، در صفحه A و α (دامنه نیروی خارجی و میرایی جاذب) برای این مقطع در شکل (۳) رسم شده است [۲۳ و ۲۵]. همان‌طور که مشخص است اگر جاذب در وسط تیر و σ=1 باشد، انشعاب زین اسبی در سیستم رخ نمی‌دهد. بر اساس اینکه پارامترهای سیستم در این فضای پارامترها، در کدام ناحیه قرار گرفته است، رفتار ارتعاشی تیر و جاذب غیرخطی دارای خصوصیات متفاوت است. به همین دلیل رفتار ارتعاشی سیستم در چهار نقطه ۱، ۲، ۳ و ۴ که در چهار ناحیه متفاوت از صفحه A و α قرار دارند، مورد بررسی قرار گرفته است. چون تحریک در نقطه ۱ پایین‌تر از تحریک بحرانی است، در صفحه فاز مربوط به این نقطه فقط یک گره وجود دارد که با توجه به روش متوسط‌گیری و عددی، سیستم حرکت متناوب نوسانی تک‌فرکانسه خواهد داشت. چون در این حالت تحریک خارجی وارد به سیستم کمتر از تحریک بحرانی است، شرط لازم نوسانات تخفیف یافته ارضا نمی‌شود و نیاز به بررسی شرط کافی هم در سیستم وجود ندارد. دیاگرام‌های فاز چهار نقطه مختلف سیستم در شکل (۴) رسم شده است. تحریک در نقاط ۲ و ۳ بالاتر از مرز تحریک بحرانی است و همچنین نقطه ۳ در محدوده انشعاب هاپف قرار دارد، در نتیجه در صفحه فاز مربوط به این نقطه، گره که نشان دهنده حرکت متناوب تک‌فرکانسه در سیستم است، حذف شده است و علاوه بر آن شرایط پرش بین دامنه بالا و پائین وجود خواهد داشت، که شرط لازم نوسانات تخفیف یافته است. در نمودار صفحه فاز این نقطه دیده می‌شود که علاوه بر پرش از بالا به پائین، به دلیل ایجاد انشعاب در دامنه پائین، شرایط پرش از پائین به بالا وجود دارد. برای اینکه مشخص شود که پدیده نوسانات تخفیف یافته قطعاً رخ می‌دهد، نیاز به بررسی شرط کافی وجود آن و ادامه‌دار بودن پدیده پرش‌ها است. در نقطه ۴ برخلاف نقطه ۳، یک گره بالاتر از دامنه بحرانی بزرگ‌تر (N_2) وجود خواهد داشت و سیستم جذب گره‌های دامنه بالاتر از دامنه بحرانی N_2 می‌شود.

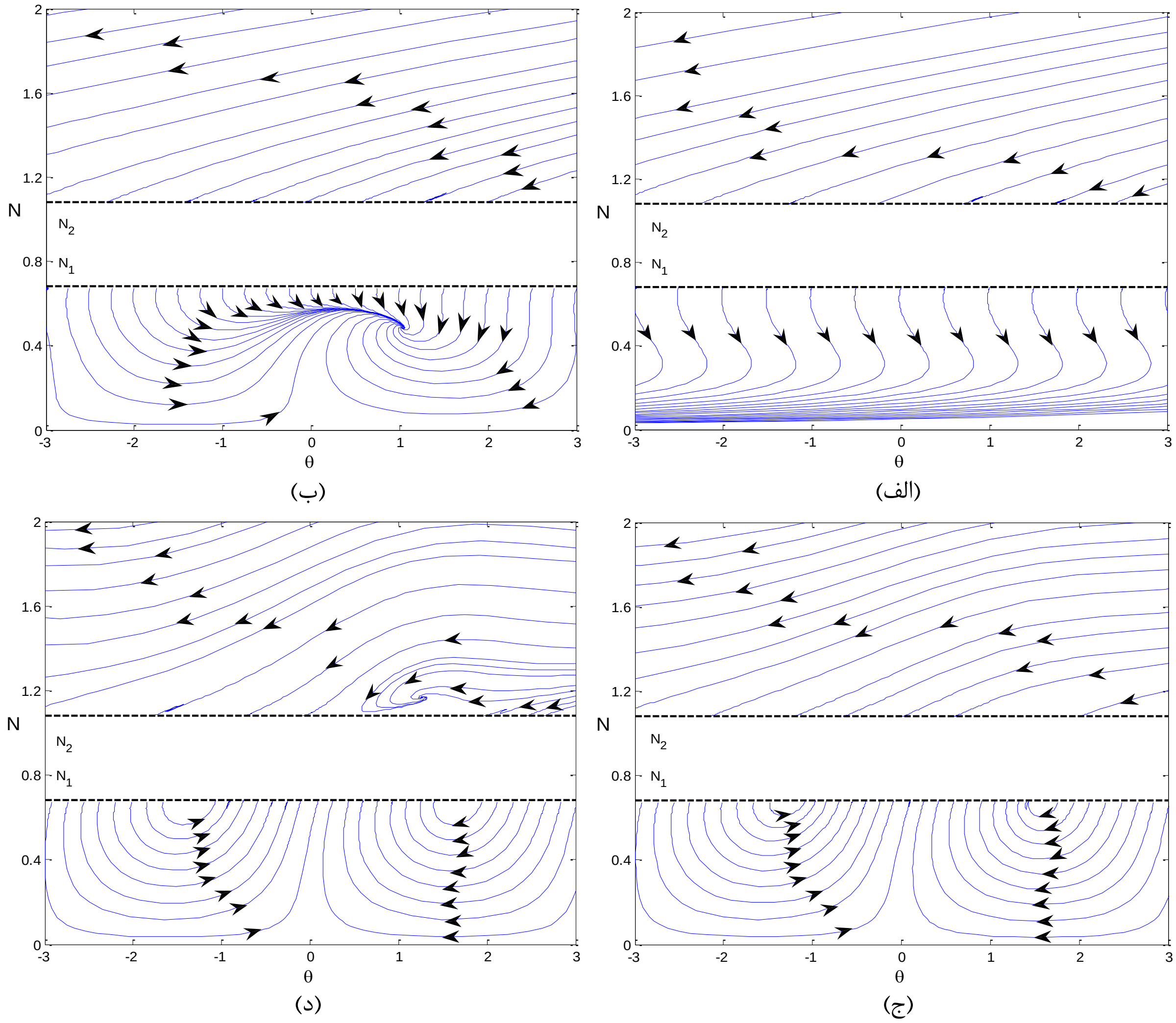
مطابق شکل (۵-الف)، سیستم بعد از تعداد نوسانات زیاد، تمام مسیرهای بسته که نشان دهنده وقوع پاسخ مدوله قوی هستند، به یک زاویه $(\theta=-0.48\,radian)$ می‌رسند. این نکته از اینکه جریان دینامیکی اگر از تمام نقاطی که بین زاویه θ_1 و θ_2 و روی دامنه N_1 قرار دارند، حرکت کنند به یک نقطه و معادل آن یک مسیر می‌رسند، اثبات شده است [۲۳]. اما اگر پارامترهای سیستم تغییر کند، مثلاً پارامتر میزان[۲]، ممکن است زاویه نهایی سیستم به خارج از بازه θ_1 و θ_2 منتهی شود (شکل (۵-ب)).

برای اینکه به صورت شماتیک رخداد نوسانات تخفیفی نشان داده شود، مسیر حرکت نمودار رفتار سیستم در

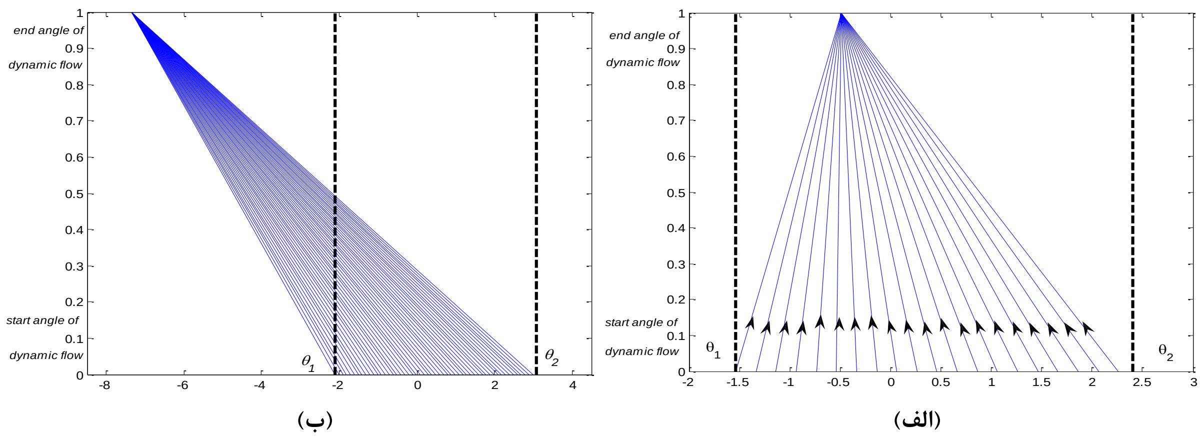
۱ Sustained jumping map

۲ Detuning parameter

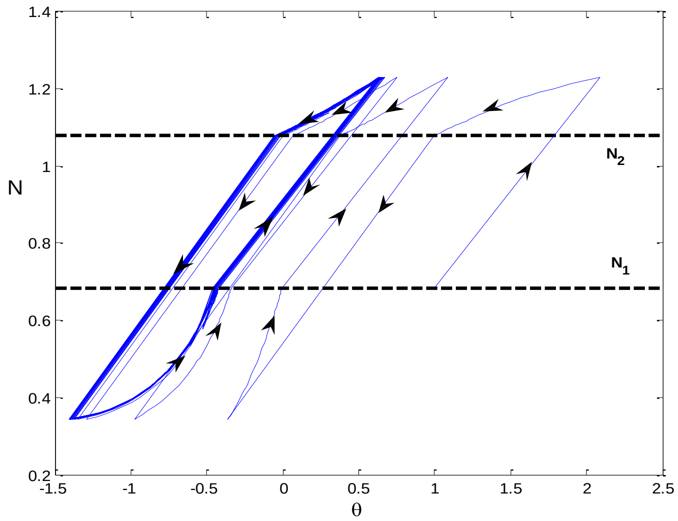
صفحه فاز مربوط به حرکت کند سیستم که نهایتاً جذب مدار بسته چهار مرحله‌ای و معادل با آن نوسانات تخفیف یافته می‌شود، در شکل (۶) نشان داده شده است. همان‌طور که از این شکل مشخص است، سیستم از محل $\theta=1$ و $N=N_1$ رها شده و پس از دو بار نوسان به سمت چپ حرکت کرده و به حلقه بسته پایدار که نشان دهنده نوسانات تخفیف یافته در پاسخ سیستم است، می‌رسد (شکل(۶)).



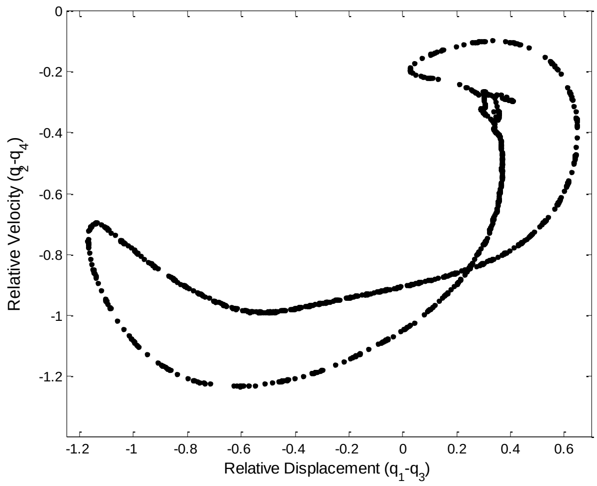
شکل ۴ - صفحه فاز حرکت کند سیستم در گستره تغییرات زاویه به ازای d=0.5، σ=1، α=0.3 (الف) A=0 (ب) A=0.3 (ج) A=1.2 (د) A=1.8



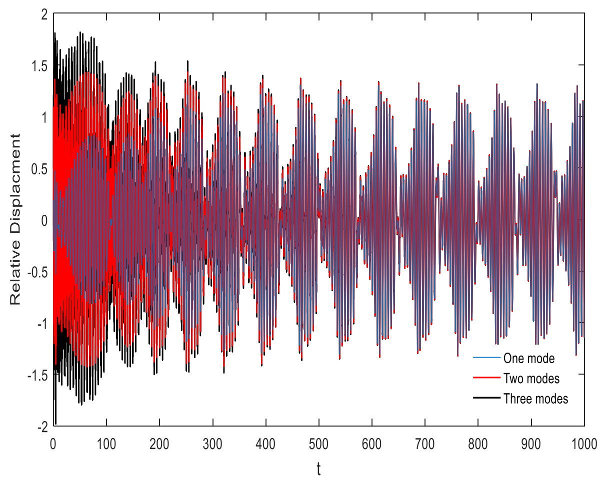
شکل ۵ - نمودار تغییرات زاویه در فضای کند به ازای d=0.5، A=1.2، α=0.3 (الف) σ=1 (ب) σ=5



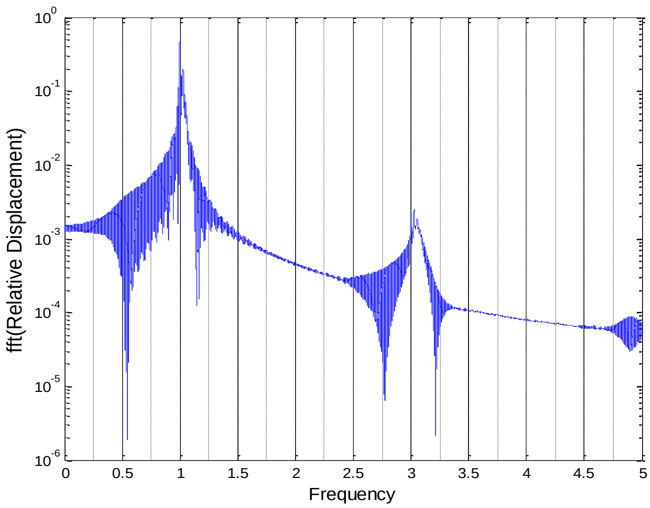
شکل ۶- نمودار حرکت سیستم در صفحه فاز مربوط به حرکت کند به ازای d=0.5، A=1.2، α=0.3 و σ=1



(ب)



(الف)



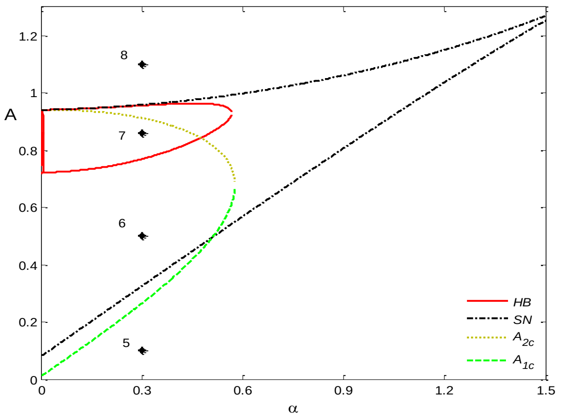
(ج)

شکل ۷ - رخداد پاسخ مدوله قوی (الف) پاسخ زمانی (ب) نمودار پوانکاره (ج) طیف فرکانسی به ازای d=0.5، A=1.2، α=0.3 و σ=1

به منظور اطمینان از نتایج حاصل از روش تحلیلی، با بررسی شرایط اولیه متفاوت در حل عددی سیستم فقط جذب پاسخ مدوله قوی می‌شود (شکل (۷)). همان‌طور که مشاهده می‌شود سیستم جذب پاسخ مدوله قوی می‌شود و

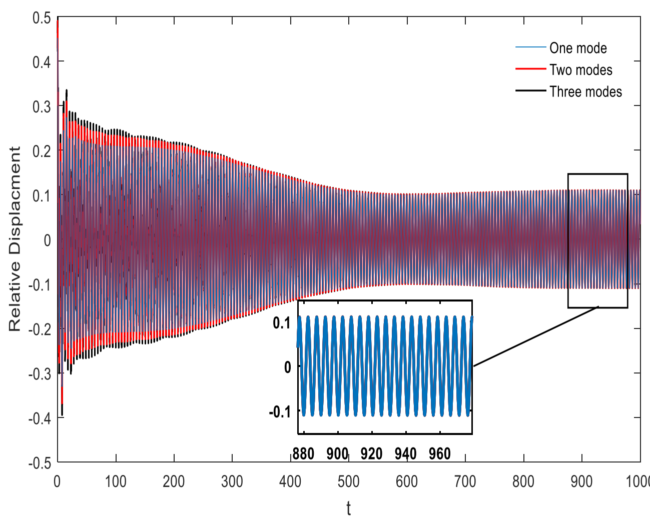
همچنین در حالت پایدار پاسخ سیستم با یک، دو یا سه مود یکسان است و فقط در پاسخ گذرا تفاوت وجود دارد. از آنجایی‌که بررسی کارایی چاه غیرخطی انرژی در حالت پایدار مدنظر بوده است، مدل‌سازی تیر با یک مود کافی و دقیق است. همان‌طور که بیان شد، به خاطر اینکه در این سیستم، فرکانس‌های طبیعی تیر از هم فاصله داشته و تحریک نوسانی است، درست و کارا بودن مدل‌سازی با یک مود تیر مورد انتظار بوده است (شکل (۷ –الف)). علاوه بر این به منظور ارزیابی بهتر رفتار سیستم، نمودار پوانکاره و طیف فرکانسی برای سیستم رسم شده است (شکل (۷–ب و ج)). همان‌طور که مشاهده می‌شود نمودار پوانکاره با پاسخ زمانی سیستم مطابقت دارد و به شکل حلقه بسته متشکل از تعداد نقاط زیاد است و نشان از حرکت شبه‌پریودیک[۱] دارد. همچنین در طیف فرکانسی پاسخ سیستم، سه قله فرکانسی در Ω، 3Ω و 5Ω مشاهده می‌شود که این نتیجه با نتایج موجود در ادبیات فنی مطابقت دارد [۲۶ و ۲۷].

مقطع بعدی در پارامترهای مکانی سیستم که جاذب در آن قرار داده شده است، به‌صورت $d=0.24$ و $\phi_{1d}=0.8146$ است و محاسبات برای $\sigma=1$ انجام شده است. نمودارهای محل رخداد انشعاب هاپف، زین اسبی و دامنه تحریک بحرانی به عنوان شرط لازم رخداد پاسخ مدوله قوی، در صفحه A و α رسم شده‌اند. در این حالت و برخلاف مقطع قبلی، در محدوده‌ای از پارامترها، انشعاب زین اسبی رخ می‌دهد. در این مقطع نیز چهار نقطه کاری (نقاط ۵ الی ۸) برای سیستم انتخاب و بررسی می‌شوند.



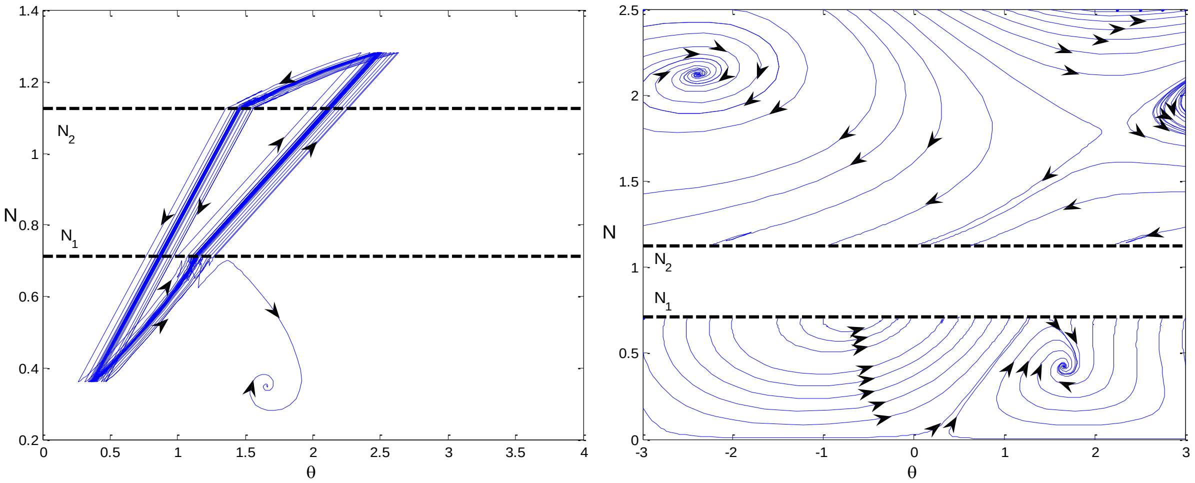
شکل ۸ - محدوده‌های رخداد انشعابات زین اسبی، هاپف و نیروی بحرانی به ازای $d=0.24$ و $\sigma=1$

تحریک در نقطه ۵ مانند تحریک در نقطه ۱، چون پایین‌تر از تحریک بحرانی است، در صفحه فاز مربوط به این نقطه فقط یک گره وجود دارد که نشان دهنده جذب سیستم به حرکت نوسانی تک‌فرکانسه است. با استفاده از تحلیل عددی و طبق انتظار سیستم کوپل شده جاذب و تیر با پارامترهای نقطه ۸ از هر شرایط اولیه‌ای رها شود، جذب حرکت نوسانی ساده با دامنه پایین‌تر از مقدار بحرانی می‌شود. به منظور ارزیابی مجدد نتایج حاصل از روش تحلیلی پاسخ سیستم به ازای شرایط نقطه ۵ در شکل (۹) آورده شده است که نشان دهنده حرکت نوسانی ساده (تک-فرکانسه) در پاسخ ماندگار سیستم، حتی با در نظر گرفتن سه مود اول برای سیستم اصلی است.



شکل ۹ - پاسخ زمانی به ازای $d=0.5$، $A=1.2$، $\alpha=0.3$ و $\sigma=1$ (رخداد پاسخ نوسانی ساده (تک‌فرکانسه))

[۱] Quasi-periodic



شکل ۱۰ - (الف) صفحه فاز با دو گره (ب) حرکت کند سیستم در صفحه فاز به ازای d=0.24، σ=1، A=0.5 و α=0.3

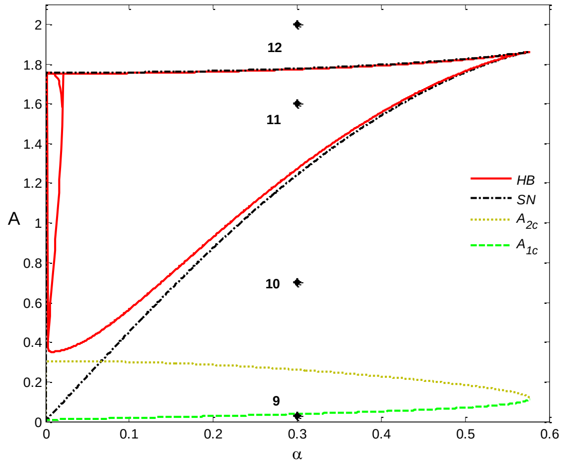
دامنه تحریک در نقطه ۶ بالاتر از تحریک بحرانی و پایین‌تر از ناحیه انشعاب هاپف است و همچنین در محدوده انشعاب زین اسبی قرار دارد. به دلیل رخداد انشعاب زین اسبی، در صفحه فاز مربوط به پارامترهای این نقطه، علاوه بر یک گره دامنه پائین، یک گره دامنه بالا وجود دارد (شکل ۱۰-الف). این بدان معنا است که علاوه بر یک حرکت متناوب نوسانی دامنه کوچک، یک حرکت متناوب نوسانی دامنه بالا نیز وجود خواهد داشت. برای بررسی رخداد پدیده نوسانات تخفیفی، نیاز به بررسی شرط کافی وجود آن و ادامه‌دار بودن پدیده پرش‌ها است. با بررسی مشخص شده است که بعد از تعداد نوسانات زیاد تمام مسیرها به یک زاویه θ=1.6radian می‌رسند که این زاویه انتهایی بین زوایای θ_1 و θ_2 قرار ندارد و نشان دهنده احتمالی عدم رخداد پاسخ مدوله قوی است. با بررسی مسیر رفتار سیستم در صفحه فاز کند مشخص می‌شود که رفتار سیستم در این حالت جذب نوسانات تخفیف یافته نمی‌شود و پس از چند بار حرکت در مسیر بسته چهار مرحله‌ای پرش و حرکت کند، جذب گره دامنه پائین می‌شود و در این سیستم فقط رفتار نوسانی خواهد داشت. مسیر حرکت رفتار کند سیستم در صفحه فاز که نهایتاً جذب گره دامنه پائین می‌شود، در شکل (۱۰-ب) نشان داده شده است. همان‌طور که از این شکل مشخص است، سیستم پس از چند بار نوسان در مسیر بسته جذب گره دامنه پائین می‌شود که معادل با یک حرکت نوسانی ساده تک‌فرکانسه است.

در نقطه ۷، سیستم در ناحیه انشعاب زین اسبی و همچنین انشعاب هاپف قرار دارد و علاوه بر آن بالاتر از نیروی تحریک بحرانی است. در ادامه با رسم نمودار پرش‌های مداوم، رخداد نوسانات تخفیف یافته تأئید شد. به ازای پارامترهای نقطه ۸، سیستم بیرون از ناحیه زین اسبی است، دارای یک گره دامنه بالا و معادل با آن یک حرکت متناوب تک-فرکانسه است. در نقطه ۸ برای سیستم نوسانات تخفیف یافته رخ می‌دهد اما نسبت به مقطع قبلی (d=0.5)، در محدوده فرکانسی کمتری پدیده نوسانات تخفیف یافته رخ می‌دهد.

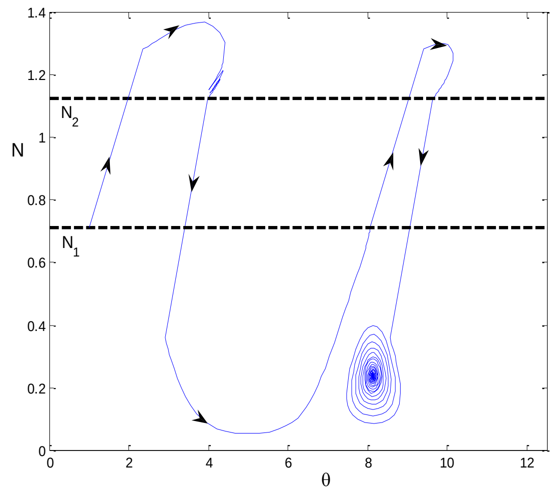
مقطع سومی و انتهائی که جاذب غیرخطی در آن به تیر متصل می‌شود، در نزدیکی تکیه‌گاه تیر $d = 0.12$، $\phi_{1d} = 0.2624$ است. در این حالت نیز محاسبات برای σ=1 انجام شده است. نمودارهای محل رخداد انشعاب هاپف، زین اسبی و دامنه تحریک بحرانی به عنوان شرط لازم رخداد پاسخ مدوله قوی، در صفحه A و α برای این حالت در شکل (۱۱) رسم شده است. نقطه ۹، مانند نقاط ۱ و ۵، چون پایین‌تر از دامنه بحرانی اول است، فقط یک گره دامنه پائین در سیستم وجود دارد که پاسخ سیستم به آن جذب می‌شود و دارای حرکت نوسانی تک‌فرکانسه است. نمودار حرکت سیستم در صفحه فاز مربوط به حرکت کند سیستم به ازای پارامترهای نقطه ۱۰، در شکل (۱۲) رسم شده است.

همان‌طور که مشخص است رفتار سیستم به کندی جذب نود شده و این بدان معناست که رفتار گذرای سیستم طولانی‌تر است. توجیه فیزیکی این موضوع می‌تواند این نکته باشد که زمانی که جاذب در ریشه تیر قرار گرفته است و محدوده نوسانات تیر کوچک است، جاذب زمانی طولانی‌تری نیاز دارد تا بتواند سیستم را به سمت رژیم

حرکتی مطلوب ببرد. به ازای پارامترهای نقطه ۱۱ و ۱۲، به هیچ عنوان پاسخ مدوله قوی رخ نمی‌دهد.



شکل ۱۱ - محدوده‌های رخداد انشعابات زین اسبی، هاپف و نیروی بحرانی به ازای d=0.12 و σ=1



شکل ۱۲ - نمودار حرکت سیستم در صفحه فاز مربوط به حرکت کند به ازای d=0.12، A=0.7، α=0.3 و σ=1

در مجموع می‌توان گفت که برای این مقطع پاسخ مدوله قوی در محدوده بسیار کوچکی از پارامترها رخ می‌دهد. با محاسبات انجام شده مشخص شده است که مجموعه پارامترهای مقطع وسط تیر، ازآنجاکه رخداد پاسخ مدوله قوی در محدوده پارامتر میزان، به عنوان معیار کارایی چاه غیرخطی انرژی در آن از همه نقاط کاری دیگر بیشتر است، به عنوان مکان بهینه چاه غیرخطی انرژی تعیین شده است.

۴- نتیجه‌گیری

در این پژوهش اثر چاه غیرخطی انرژی روی کاهش ارتعاشات یک تیر دوسرگیردار که مدل ساده‌ای از سازه‌های دریایی است، تحت بررسی قرار گرفت. رفتار سیستم با نصب جاذب در محل‌های متفاوت در طول تیر مورد بررسی قرار گرفته است و نشان داده شده است که با انتخاب پارامترهای مناسب، چاه غیرخطی انرژی را قادر به حذف کامل رژیم‌های پریودیک خطرناک در همسایگی مود تحریک شده می‌کند، به این صورت که پاسخ مدوله قوی در همسایگی مودهای طبیعی سیستم تحریک شده و پدیده رزونانس‌گیری رخ می‌دهد و انرژی را از سیستم اصلی جذب می‌نماید. برای بررسی رفتار سیستم ابتدا در فضای دامنه نیرو و میرایی جاذب، نمودارهای محل رخداد انشعابات هاپف، زین اسبی و نیروی بحرانی برای شروع رخداد پدیده نوسانات تخفیف یافته مورد بررسی قرار گرفته‌اند و نقاط مناسب در این نواحی انتخاب شده‌اند. سپس به بررسی نتایج تحلیل‌های تحلیلی و عددی در نمودارهای مختلفی از جمله دیاگرام فاز، پاسخ زمانی و نمودار پوانکاره پرداخته شده است. مهم‌ترین نکته برای به دست آوردن جاذب بهینه و محل آن، این است که بیشترین محدوده‌ای که پدیده نوسانات تخفیف یافته در سیستم رخ می‌دهد، به دست آورده شود. با بررسی‌های انجام شده مشخص شد که میزان نیروی تحریک خارجی بحرانی به عنوان شرط اولیه رخداد پدیده نوسانات تخفیف یافته در محل‌های متفاوت نصب جاذب تغییر می‌کند. به عنوان مثال اگر جاذب در وسط تیر باشد، محدوده آن $0<A<1.8$ است و اگر جاذب در نزدیک تکیه‌گاه تیر باشد، محدوده آن $0<A<0.2$ است. این نکته یکی از فواید استفاده از چاه غیرخطی انرژی است، که می‌توان با جابه‌جا کردن آن در طول تیر برای شرایط متفاوت استفاده کرد. همچنین انشعاب هاپف با نصب جاذب در طول کل تیر به ازای پارامترهای میزان نرمال رخ می‌دهد. علاوه بر این مشخص شده است که انشعاب زین اسبی با نصب جاذب در کل طول تیر رخ نمی‌دهد. از سوی دیگر، با بررسی رفتار سیستم در پارامترهای متفاوت سیستم و مقایسه نقاط بهینه در فضای پارامترهای $A-\alpha$ مشاهده می‌شود که بهترین محدوده تحریک خارجی، ناحیه تحریک متوسط است. همچنین در مقاطع نزدیک به تکیه‌گاه، ناحیه پاسخ مدوله قوی بسیار کوچک و در مواردی کلاً حذف شده است. به طور کلی می‌توان گفت که بهترین ناحیه برای قرارگیری جاذب، ناحیه‌ای از پارامترها است که همزمان پاسخ مدوله قوی و انشعابات هاپف رخ می‌دهند. در این موارد سیستم جذب پاسخ مدوله قوی می‌شود. همچنین با بررسی‌های صورت گرفته مشخص شده است که حتی در نواحی که همزمان حرکت نوسانی دامنه بالا،

دامنه پایین و پاسخ مدوله ضعیف و قوی وجود دارند، سیستم جذب رژیم حرکتی پاسخ مدوله قوی می‌شود. درنهایت نیز نتایج نشان دادند که هر چه جاذب به وسط تیر نزدیک باشد، محدوده رخداد پاسخ مدوله قوی بزرگ‌تر می‌شود و هر چه جاذب به سمت ریشه تیر نزدیک شود، پاسخ گذرای جاذب طولانی‌تر می‌شود. به عبارت دیگر چون در ریشه تیر، دامنه ارتعاشات کوچک‌تر است، جاذب فرصت بیشتری می‌خواهد تا با اثر متقابل با سیستم اصلی، آن را به رژیم حرکتی نهایی برساند.

پیوست (الف)

$$m_{11}=\int_0^1 \phi_1^2(x)dx\ ,\ k_{11}=\int_0^1 \phi_1(x)(\phi_1(x))_{xxxx}dx\ ,$$

$$\xi=\int_0^1 c_p\phi_1^2(x)dx\ ,\ \mathrm{A}=\int_0^1 A\phi_1(x)dx$$

پیوست (ب)

$$\eta_1=\phi_{1d}^2\alpha\varepsilon+\phi_{1d}\,\varepsilon\xi+\alpha$$

$$\begin{aligned}\eta_2=\frac{1}{64\Omega^6}&(16\phi_{1d}^4\alpha^2\varepsilon^2\Omega^6+32\phi_{1d}^3\alpha\varepsilon^2\xi\Omega^6+27\beta^2{\phi_{2f}}^4\\&16\phi_{1d}^2\varepsilon^2\xi^2\Omega^6+32\phi_{1d}^2\alpha^2\varepsilon\Omega^6+16\Omega^8+-48\beta\Omega^4\phi_{2f}^2\\&16\alpha^2\Omega^6+48\phi_{1d}^2\beta\varepsilon^2\sigma\Omega^2\phi_{2f}^2+64\phi_{1d}\alpha\varepsilon\xi\Omega^6\\&+27\phi_{1d}^4\beta^2\varepsilon^2\phi_{2f}^4+16\varepsilon^2\sigma^2\Omega^4+54\phi_{1d}^2\beta^2\varepsilon\phi_{2f}^4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_3=\frac{\varepsilon}{64\Omega^6}&(16\phi_{1d}^3\alpha^2\varepsilon\xi\Omega^6+16\phi_{1d}^2\alpha\varepsilon\xi^2\Omega^6+16\phi_{1d}^2\alpha\Omega^8\\&+27\phi_{1d}^3\beta^2\varepsilon\xi\phi_{2f}^4+16\phi_{1d}\xi\Omega^8+16\alpha\varepsilon\sigma^2\Omega^4\\&+16\phi_{1d}\,\alpha^2\xi\Omega^6-48\phi_{1d}\,\beta\xi\Omega^4\phi_{2f}^2+27\phi_{1d}\,\beta^2\xi\phi_{2f}^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_4=\frac{\varepsilon^2}{256\Omega^8}&(16\phi_{1d}^4\alpha^2\Omega^{10}+32\phi_{1d}^3\alpha\xi\Omega^{10}+16\sigma^2\Omega^8\\&27\phi_{1d}^4\beta^2\Omega^4\phi_{2f}^4+16\phi_{1d}^2\alpha^2\xi^2\Omega^8-48\phi_{1d}^2\beta\xi^2\Omega^6\phi_{2f}^2\\&+48\phi_{1d}^2\beta\sigma\Omega^6\phi_{2f}^2-48\beta\sigma^2\Omega^4\phi_{2f}^2+27\beta^2\sigma^2\phi_{2f}^4\\&+16\phi_{1d}^2\xi^2\Omega^{10}-32\phi_{1d}^2\alpha^2\sigma\Omega^8+16\alpha^2\sigma^2\Omega^6\\&+27\phi_{1d}^2\beta^2\xi^2\Omega^2\phi_{2f}^4-54\phi_{1d}^2\beta^2\sigma\Omega^2\phi_{2f}^4)\end{aligned}$$

مراجع

[1] J.C. Snowdon, Vibration and shock in damped mechanical systems, Wiley, New York, 1968.

[2] D.E. Newland, E.E. Ungar, "Mechanical vibration analysis and computation", The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 88, No. 5, 1990, pp. 2506–2506.

[3] S. Shakeri, F. Sheykh Samani, "Micro-milling self-excited vibrations reduction using vibration absorbers", Journal of Modeling in Engineering, Vol. 15, No. 50, 2017, pp. 5–10.

[4] M. Franchek, M. Ryan, R. Bernhard, "Adaptive passive vibration control", Journal of Sound and Vibration, Vol. 189, No. 5, 1996, pp. 565–585.

[5] J.Q. Sun, M.R. Jolly, M.A. Norris, "Passive, adaptive and active tuned vibration absorbers-a survey", Journal of Mechanical Design, Vol. 117, Issue B, 1995, pp. 234–242.

[6] H. Frahm, Device for damping vibrations of bodies, Google Patents, 1911.

[7] J.P. Den Hartog, Mechanical vibrations: Courier Corporation, 1985.

[8] A. Luongo, D. Zulli, "Dynamic analysis of externally excited NES-controlled systems via a mixed Multiple Scale/Harmonic Balance algorithm", Nonlinear Dynamics, Vol. 70, No. 3, 2012, pp. 2049–2061.

[9] G. Sigalov, O. Gendelman, M. Al-Shudeifat, "Resonance captures and targeted energy transfers in an inertially-coupled rotational nonlinear energy sink", Nonlinear dynamics, Vol. 69, No. 4, 2012, pp. 1693–1704.

[10] M.A. Al-Shudeifat, N. Wierschem, D.D. Quinn, A.F. Vakakis, L.A. Bergman, B.F. Spencer, "Numerical and experimental investigation of a highly effective single-sided vibro-impact non-linear energy sink for shock mitigation", International journal of non-linear mechanics, Vol. 52, 2013, pp. 96–109.

[11] Ch. Guo, M.A. AL-Shudeifat, A.F. Vakakis, L.A. Bergman, D.M. McFarland, J. Yan, "Vibration reduction in unbalanced hollow rotor systems with nonlinear energy sinks", Nonlinear Dynamics, Vol. 79, No. 1, 2015, pp. 527–538.

[12] F.S. Samani, F. Pellicano, "Vibration reduction on beams subjected to moving loads using linear and nonlinear dynamic absorbers", Journal of Sound and Vibration, Vol. 325, No. 4, 2009, pp. 742–754.

[13] F. Georgiades, A.F. Vakakis, "Passive targeted energy transfers and strong modal interactions in the dynamics of a thin plate with strongly nonlinear attachments", International Journal of Solids and Structures, Vol. 46, No. 11, 2009, pp. 2330–2353.

[14] F. Georgiades, A.F. Vakakis, G. Kerschen, "Broadband passive targeted energy pumping from a linear dispersive rod to a lightweight essentially non-linear end attachment", International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 42, No. 5, 2007, pp. 773–788.

[15] A. Ebrahimi, S. Khadem, "Vibration analysis of a beam under external periodic excitation using a nonlinear energy sink", Modares Mechanical Engineering, Vol. 16, No. 9, 2016, pp. 186–194.

[16] F. Georgiades, A.F. Vakakis, "Dynamics of a linear beam with an attached local nonlinear energy sink", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 12, No. 5, 2007, pp. 643–651.

[17] Z.N. Ahmadabadi, S. Khadem, "Nonlinear vibration control of a cantilever beam by a nonlinear energy sink", Mechanism and Machine Theory, Vol. 50, 2012, pp. 134–149.

[18] S.M. Pourkiaee, S.E. Khadem, M. Shahgholi, "Nonlinear vibration and stability analysis of an electrically actuated piezoelectric nanobeam considering surface effects and intermolecular interactions", Journal of Vibration and Control, Vol. 23, No. 12, 2017, pp. 1873–1889.

[19] S. Bab, S.E. Khadem, M. Shahgholi, "Lateral vibration attenuation of a rotor under mass eccentricity force using non-linear energy sink", International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 67, 2014, pp. 251–266.

[20] Y. Starosvetsky, O. Gendelman, "Dynamics of a strongly nonlinear vibration absorber coupled to a harmonically excited two-degree-of-freedom system", Journal of Sound and Vibration, Vol. 312, No. 1, 2008, pp. 234–256.

[21] L.I. Manevitch, "The description of localized normal modes in a chain of nonlinear coupled oscillators using complex variables", Nonlinear Dynamics, Vol. 25, Issue 1–3, 2001, pp. 95–109, Springer.

[22] A.H. Nayfeh, B. Balachandran, Applied nonlinear dynamics: analytical, computational and experimental methods, John Wiley & Sons, 2008.

[23] A.F. Vakakis, O.V. Gendelman, L.A. Bergman, D.M. McFarland, G. Kerschen, Y.S. Lee, Nonlinear targeted energy transfer in mechanical and structural systems, Springer Science & Business Media, 2009.

[24] M. Rafeeyan, R. Nourouzi, "complete modelling of a rotor-bearing-housing system", Journal of Modeling in Engineering, Vol. 14, No. 44, 2016, pp. 79–92.

[25] M.M. Ettefagh, D. Behkam Kia, "Exact uncertainty analysis of the bridge dynamic response during random vehicle crossing by statistical methods", Journal of Modeling in Engineering, Vol. 14, No. 47, 2017, pp. 77–93.

[26] M. Parseh, M. Dardel, M.H. Ghasemi, M.H. Pashaei, "Steady state dynamics of a non-linear beam coupled to a non-linear energy sink", International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 79, 2016, pp. 48–65.

[27] M.H. Velayati, "Evaluation of Generators' Participation Factor Capability to Identify the Small Signal Oscillations Type of Power System using Analytical Method and Simultaneous Prediction by Neural Network", Journal of Modeling in Engineering, Vol. 13, No. 42, 2015, pp. 119–133.