فصلنامه مدلسازی اقتصادسنجی – سال سوم، شماره چهارم (پیاپی ۱۱)، پاییز ۱۳۹۷ (صفحات ۱۱ تا ۳۵)

بررسی معیارهای نوسان‌پذیری و ریسک در مدل‌های بهینه‌سازی مقید با استفاده از الگوریتم رقابت استعماری

لعیا نشاطی زاده
دکتری اقتصاد مالی، دانشکده اقتصاد و مدیریت، دانشگاه ارومیه
neshati.economic@gmail.com

حسن حیدری (نویسنده مسئول)
استاد اقتصاد، دانشکده اقتصاد و مدیریت، دانشگاه ارومیه
h.heidari@urmia.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۲/۰۵ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۲/۲۹

چکیده

یکی از مهم‌ترین عوامل مؤثر بر رشد اقتصادی هر کشوری، رونق بازارهای سرمایه آن کشور است. مسئله انتخاب مجموعه بهینه‌ای از دارایی‌ها، یکی ازنظریه‌های بازار سرمایه می‌باشد که از اهمیت خاصی در مباحث اقتصادی برخوردار است. هدف اصلی پژوهش حاضر، حل مسئله بهینه‌سازی مقید پرتفوی سهام با استفاده از الگوریتم رقابت استعماری می‌باشد. الگوهای مورداستفاده در این مقاله، مدل توسعه‌یافته‌ای از رویکردهای میانگین- واریانس، میانگین – نیم واریانس، میانگین- انحرافات مطلق و میانگین – ارزش در معرض ریسک شرطی است که محدودیت‌هایی به آن‌ها اضافه‌شده است. به‌منظور حل مسئله بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری از اطلاعات روزانه ۲۵ سهم پذیرفته‌شده در بورس اوراق بهادار تهران در بازه زمانی ۱۳۹۵-۱۳۸۸، استفاده‌شده است. نتایج مقایسه پرتفوی‌های چهار الگوی تحقیق، نشان می‌دهد که نتایج مقایسه پرتفوی‌های چهار الگوی تحقیق، نشان می‌دهد که در الگوریتم رقابت استعماری مدل میانگین – ارزش در معرض ریسک شرطی نسبت به سایر مدل‌ها از دقت بهینه‌سازی بالاتری برخوردار است.

طبقه‌بندی JEL: G40, G11, C61

واژگان کلیدی: الگوریتم رقابت استعماری، بهینه‌سازی سبد سهام، واریانس، نیم واریانس، انحرافات مطلق، ارزش در معرض ریسک شرطی

۱. مقدمه

تشکیل سبد سهام بهینه یکی از تصمیم‌گیری‌های مهم برای شرکت‌ها می‌باشد. به همین دلیل، انتخاب یک سبد سهام با نرخ بازدهی بالا و ریسک کنترل‌شده یکی از مباحثی است که مورد توجه سرمایه‌گذاران قرار گرفته است. در بهینه‌سازی پرتفوی، مسئله اصلی انتخاب بهینه دارایی‌ها و اوراق بهاداری است که با مقدار مشخصی سرمایه می‌توان تهیه کرد. چگونگی تخصیص منابع و انتخاب نوع سرمایه‌گذاری از اهمیت بالایی برخوردار است. این تخصیص بهینه، بالأخص در بازارهای مالی که عامل رشد و توسعه کشورها می‌باشند، بسیار حائز اهمیت می‌باشد.

انتشار نظریه پرتفوی سهام هری مارکویتز[1]، اصلی‌ترین و مهم‌ترین موفقیت در این راستا بود (افشار کاظمی و دیگران، ۱۳۹۳). از زمانی که وی مدل خود را منتشر کرد. این مدل تغییرات و بهبودهای فراوانی را در شیوه نگرش افراد به سرمایه‌گذاری و سبد سهام ایجاد کرد و به‌عنوان ابزاری کارا برای بهینه‌سازی سبد سهام به کار گرفته‌شد (سینایی و زمانی، ۱۳۹۳). در حالت کلی می‌توان چنین بیان کرد مسئله بهینه‌سازی مارکویتز و تعیین مرز کارآی سرمایه‌گذاری، زمانی که تعداد دارایی‌های قابل سرمایه‌گذاری و محدودیت‌های موجود در بازار کم باشد، توسط مدل‌های ریاضی حل‌شدنی است (اسلامی بیدگلی و طیبی ثانی، ۱۳۹۳). تکامل مدل مارکویتز موجب پیچیدگی بسیار و به‌موازات آن‌وقت گیر شدن حل مدل گشت. ازاین‌رو محققان مالی بر آن شدند تا جهت سرعت بخشیدن به تصمیم‌گیری‌های حساس و بااهمیتی هم‌چون انتخاب پرتفوی، راهی برای حل سریع مدل‌های این‌چنینی بیابند (سینایی و زمانی، ۱۳۹۳).

با توجه به عدم اطمینانی که بر بورس اوراق بهادار حاکم است و کارا نبودن مدل پایه‌ای میانگین – واریانس در بازارهای امروزی به نظر می‌رسد طراحی یک سیستم خبره با استفاده از تکنیک‌های هوشمند که صحت و دقت مدل را افزایش می‌دهند، برای ارائه سبد سهام بهینه ضروری باشد تا در نهایت سود بیشتری برای سرمایه‌گذاران فراهم گردد (زمانی و همکاران،۱۳۹۳). از جمله روش‌هایی که در سال‌های اخیر در حل بسیاری مسائل بهینه‌سازی، گره‌گشای ابهامات بشر بوده است و در پاسخ به مسائل پیچیده رویکردی موفق داشته است، روش‌ها و الگوریتم‌های موسوم به متاهیوریستیک می‌باشد (افشار کاظمی و همکاران،۱۳۹۳).

---

[1]. Harry Markowitz

روش‌های متاهیوریستیک که باهدف رفع کاستی‌های روش‌های کلاسیک بهینه‌سازی معرفی‌شده‌اند با جستجوی جامع و تصادفی، احتمال دستیابی به نتایج بهتر را تا حد زیادی تضمین می‌کنند (زمانی و همکاران، ۱۳۹۳). بنابراین با توجه به مباحث فوق الذکر این ذهنیت شکل می‌گیرد که آیا با حل الگوهای بهینه‌سازی مقید و با در نظر گرفتن محدودیت تعداد سهام پرتفوی و محدودیت سقف و کف برای هر دارایی، با استفاده از اطلاعات پیش‌بینی‌شده توسط الگوریتم‌های متاهیوریستیک می‌توان به سبد سهام بهینه دست‌یافت؟ سازگاری این روش‌ها با مسئله پرتفوی چگونه است؟ لذا در این تحقیق، با به‌کارگیری الگوریتم رقابت استعماری، بهینه‌سازی مجموعه سهام فعال عرضه‌شده در بورس اوراق بهادار تهران را موردبررسی قرار می‌دهیم.

۲. پیشینه تحقیق

۲-۱. مرور ادبیات از دیدگاه نظری

هدف از حل مسائل سبد پرتفوی آن است که از بین یک مجموعه دارایی‌های در دسترس، پرتفوی‌ای انتخاب شود که افزون بر کمینه‌سازی ریسک پرتفوی، یک سطح حداکثری از بازده پرتفوی را نیز برای سرمایه‌گذار برآورده کند. برای انتخاب پرتفوی بهینه، میانگین به‌عنوان معیاری از بازده و واریانس به‌عنوان معیاری از ریسک می‌باشد. به‌بیان‌دیگر، مارکویتز فرض نمود که هر چه واریانس یک سرمایه‌گذاری بالاتر باشد، احتمال تفاوت بازده واقعی از بازده انتظاری نیز بالاتر است. وی چنین بیان می‌کند که سرمایه‌گذار علاوه بر حداکثر سازی بازده خواستار مطمئن بودن بازدهی نیز می‌باشد. مارکویتز برای توجیه این استدلال خود، چنین می‌گوید «اگر سرمایه‌گذاران فقط در پی به حداکثر رساندن بازده مورد انتظار بودند، تنها در یک نوع دارایی که دارای بیشترین بازده مورد انتظار است سرمایه‌گذاری می‌کردند». درصورتی‌که با یک نگاه گذرا می‌توان مشاهده کرد که سرمایه‌گذاران، صاحب مجموعه‌ای از اوراق بهادار پرتفوی هستند. وی با این دیدگاه، موفق به تبدیل، مسئله پیچیده و چندبعدی پرتفوی، به تجزیه‌وتحلیل مسئله دوبعدی رویکرد میانگین – واریانس شد (هاگین[1]، ۲۰۰۴).

در اینجا لازم است به این نکته اشاره شود که ریسک پرتفوی، برخلاف بازدهی‌اش، به‌طورمعمول با میانگین وزنی ریسک اوراق بهادار تشکیل‌دهنده‌اش برابر نیست. ریسک

[1]. Hagin

پرتفوی، نه‌تنها به ریسک اوراق بهادار تشکیل‌دهنده‌اش به‌صورت جداگانه مربوط است بلکه به مقداری که این اوراق از رویدادهای کلان اقتصادی، به‌طور مشابه تأثیر می‌پذیرند، نیز بستگی دارد (مولایی و طالبی، ۱۳۸۹). نکته اساسی دیگر این است که مارکویتز در مدل خود فرض می‌کند که بازده مورد انتظار، متغیری تصادفی با توزیع نرمال است. فرض نرمال بودن بازده مورد انتظار در بسیاری از مواقع درست نیست، زیرا بسیاری از پژوهش‌ها نشان می‌دهند که تابع توزیع داده‌ها دارای دو انتهای ضخیم‌تر نسبت به تابع نرمال است یا توزیع بازده چوله است. مشکل دیگر استفاده از واریانس می‌باشد. به‌عبارت‌دیگر در استفاده از این معیار سودهایی که فاصله زیادی از میانگین دارند و برای سرمایه‌گذار مطلوب هستند نیز به‌عنوان ریسک شناخته می‌شوند و در فرآیند بهینه‌سازی به سهام با تابع توزیع کشیده‌تر، وزن بیشتری داده می‌شود (مارکویتز، ۱۹۵۹). این مشکلات سبب شد تا بعد از الگوی استاندارد مارکویتز تحقیقات جدیدی در زمینه‌ی تشکیل سبد سهام بهینه انجام شود؛ ازجمله خود مارکویتز که بعدها بیان می‌کند که تحلیل‌های مبتنی بر نیم واریانس نسبت به آن‌هایی که به واریانس متکی هستند، سبدهای سهام بهتری ایجاد می‌کنند (مارکویتز، ۱۹۵۹).

کونو و یامازاکی[1] در سال ۱۹۹۱ برای بهینه‌سازی سبد پرتفوی بر مبنای معیار اندازه‌گیری ریسک، مدل میانگین – انحراف مطلق را که از طریق برنامه‌ریزی خطی قابل‌حل بود، توسعه دادند. در الگوی آن‌ها انحراف مطلق به‌نوعی بیانگر ریسک‌پذیری می‌باشد. این الگوها به دلیل عدم توجه به محدودیت‌های کارکردی در بسیاری شرایط پاسخ گوی نیازهای سرمایه‌گذاران نمی‌باشند (کونو و یامازاکی، ۱۹۹۱).

با توجه به دیدگاه مانسینی و اسپرانزا[2] مدل استاندارد مارکویتز محدودیت مربوط به تعداد سهام منتخب پرتفوی و هم‌چنین محدودیت‌های مربوط به سقف و کف نسبت سرمایه‌گذاری برای وزن هر دارایی در سبد را در برندارد (مانسینی و اسپرانزا، ۱۹۹۹). درنهایت فرناندز و گومز[3] (۲۰۰۷) با اعمال این محدودیت‌ها، الگوی اصلاح‌شده مارکویتز را با عنوان مدل میانگین – واریانس با مؤلفه‌های مقید به کار گرفتند (فرناندز و گومز، ۲۰۰۷). تاکنون در سطح جهان تحقیقات متعددی در مورد بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از تکنیک‌های متاهیوریستیک صورت گرفته که در ادامه به برخی از آن ها اشاره می‌کنیم.

---

1. Konno & Yamazaki
2. Mansini & Speranza
3. Fernandez & Gomez

۲-۲. مرور ادبیات از دیدگاه تجربی

هانن و فوزی[1] (۲۰۱۴) در پژوهشی با عنوان مدل میانگین – ارزش در معرض ریسک با نوسانات تصادفی مسئله تصمیم‌گیری برای انتخاب ترکیبی بهینه از یک دارایی ریسکی و یک دارایی خاص با استفاده از ماکزیمم کردن تابع مطلوبیت با محدودیت VaR را که با یک ضرر متناسب با بازده جاری محدودشده است، بررسی کردند. نتایج این پژوهش بیانگر این بود که محدودیت VaR، مقادیر سرمایه‌گذاری شده در دارایی ریسکی را رفته‌رفته در طول زمان کاهش می‌دهد و نوسانات تأثیر مهمی بر جواب بهینه دارند (هانن و فوزی، ۲۰۱۴). ین[2] و همکاران (۲۰۱۵) در مطالعه‌ای یک الگوریتم بهینه‌سازی ذرات جمعیت چندگانه ناهمگن[3] را برای حل یک مدل نمونه انتخابی میانگین- واریانس مارکویتز ارائه می‌دهد. در این تحقیق، به جهت پیدا کردن راه‌حل بهینه برای مدل و مقایسه عملکرد الگوریتم پیشنهادی با چندین نوع الگوریتم بهینه‌سازی توده ذرات کلاسیک، استفاده‌شده است. نتایج محاسباتی نشان می‌دهد که الگوریتم پیشنهادی بسیار مؤثر و قوی است، به‌ویژه برای مشکلات با ابعاد بالا، بنابراین یک راه‌حل مؤثر برای مشکل بهینه‌سازی پرتفوی را فراهم می‌کند (ین و همکاران، ۲۰۱۵). لیو و همکاران[4] (۲۰۱۶) در مطالعه‌ای با عنوان "اعتبار چند دوره‌ای مدل بهینه‌سازی پرتفوی با کنترل ورشکستگی و استفاده مجدد" به مسئله انتخاب سبد سهام با کنترل ورشکستگی در محیط سرمایه‌گذاری فازی پرداختند و در بهینه‌سازی سبد سهام از الگوریتم توده ذرات ترکیبی استفاده نموده‌اند. نتایج حاکی از آن است که الگوریتم توده ذرات در حل مسئله انتخابی مؤثر بوده است (لیو و همکاران، ۲۰۱۶). تایلاهن و اناچو[5] (۲۰۱۷) در تحقیقی با عنوان "الگوریتم کرم شب‌تاب برای مسائل بهینه‌سازی گسسته" به بررسی دقیق تغییرات انجام‌شده در الگوریتم کرم شب‌تاب به‌منظور حل مسائل بهینه‌سازی با متغیرهای گسسته اختصاص دارد. در این تحقیق الگوریتم‌های کرم شب‌تاب، اصلاح‌شده و برای مسائل بهینه‌سازی با متغیرهای گسسته مورداستفاده قرارگرفته است. بر اساس فضایی که در آن به‌روزرسانی انجام می‌شود، این اصلاحات به‌طورکلی می‌تواند به دودسته تقسیم شود. دسته اول زمانی است که

---

1. Hanen & Faouzi
2. Yin
3. Heterogeneous Multiple Population Particle Swarm Optimization Algorithm (HMPPSO)
4. Liu et al.
5. Tilahun & Ngnotchouye

به‌روزرسانی در فضای پیوسته انجام می‌شود و یک مکانیزم اختیاری برای تغییر مقادیر به اعداد گویا استفاده می‌شود. درحالی‌که دسته دوم زمانی است که به‌روزرسانی در فضای گسسته انجام می‌شود. بر اساس نتایج به‌دست‌آمده در رده دوم نیازی نیست که بین فضاهای پیوسته و گسسته را تغییر داد. در این رده، روش به‌روزرسانی الگوریتم کرم شب‌تاب استاندارد مورداستفاده قرار می‌گیرد و نتایج به مقادیر گسسته تبدیل می‌شوند. مکانیسم‌های به‌روزرسانی سیستماتیک، مانند مبادله، به‌روزرسانی‌های متوالی و ورودی‌های کپی، به‌طور عمده بر اساس رفتار متغیر مسئله استفاده می‌شود. جدا از این برای اصلاح عملکرد الگوریتم، تغییرات پارامتر نیز پیشنهادشده است. ضمن آن‌که تعدادی از مسیرهای تحقیق احتمالی نیز موردبحث قرارگرفته است (تایلاهن و اناچو، ۲۰۱۷).

در ایران عبدالعلی‌زاده شهیر و عشقی (۱۳۸۲)، در مطالعه‌ای تحت عنوان "کاربرد الگوریتم ژنتیک در انتخاب یک مجموعه دارایی از سهام بورس اوراق بهادار" با استفاده از الگوی خاصی از الگوریتم ژنتیک به انتخاب مجموعه‌ای از دارایی‌ها از بین سهم‌های گوناگون پرداخته‌اند (عبدالعلی‌زاده شهیر و عشقی،۱۳۸۲) و طالبی (۱۳۸۹) در مطالعه‌ای با عنوان "انتخاب و بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از روش‌های متاهیوریستیک و مقایسه‌ی آن با سبدهای تشکیلی خبرگان و تازه‌کارها در بورس اوراق بهادار تهران "به اعمال چهار الگوریتم متاهیوریستیک جدید و پرکاربرد ژنتیک، ترکیب ژنتیک و نلدر- مید، توده ذرات و رقابت استعماری بر مسئله بهینه‌سازی پرتفوی از بین سهام ۵۰ شرکت برتر در بورس اوراق بهادار می‌پردازند. ضمن آن‌که در این پژوهش جهت دستیابی به نتایجی در زمینه چگونگی گزارشگری نرخ بازدهی، برای اثربخشی و کارایی بالاتر بازدهی ماهانه در مقابل بازدهی سالانه به تشکیل دو پرتفوی مختلف با استفاده از هر الگوریتم و به کمک ورودی‌های سالانه و ماهانه پرداخته می‌شود. در ادامه جهت سنجش و مقایسه‌ی عملکرد سه گروه الگوریتم‌ها، خبرگان و نیز تازه‌کارهای بورس با یکدیگر، به جمع‌آوری سبدهای منتخب آن‌ها توسط پرسشنامه، پرداخته‌شده است. نتایج حاکی از آن است که تفاوت معنی‌داری بین متوسط عملکرد سبدهای منتخب و متوسط عملکرد الگوریتم‌ها وجود ندارد، هم‌چنین هردو رویکرد، در دوره آزمون، به‌طور متوسط بهتر از پرتفوی بازار عمل نموده، به بازدهی بالاتری دست‌یافته‌اند. قاسمی و نجفی (۱۳۹۱) جهت بهینه‌سازی پرتفوی سهام از مدل نوینی استفاده کرده‌اند که در آن افزون بر مجاز شمردن فروش استقراضی، برخی محدودیت‌های کاربردی بازار سرمایه (حداکثر میزان فروش استقراضی، حداکثر تعداد دارایی در پرتفوی، حد بالا و پایین هر دارایی، حفظ تنوع‌بخشی پرتفوی)

نیز به مدل افزوده شده است (قاسمی و نجفی، ۱۳۹۱). مروتی شریف آبادی و همکاران در سال ۱۳۹۴ به حل مسئله بهینه سازی پرتفوی با استفاده از الگوریتم رقابت استعماری می پردازد و نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که الگوریتم رقابت استعماری در تشکیل پرتفوی به گونه ای موفق عمل می‌کند (مروتی شریف آبادی و همکاران، ۱۳۹۴). سروش و همکاران (۱۳۹۶) در تحقیق خود مسئله بهینه‌سازی سبد سهام را در چارچوب مدل معرفی شده مارکویتز، با استفاده از الگوریتم مبتنی بر آموزش و یادگیری حل نموده نتایج بدست آمده از این پژوهش نشان می دهد این الگوریتم نسبت به سایر الگوریتم‌ها برای یافتن مرز کارآ و بهینه‌سازی سبد سهام عملکرد بهتری دارد (سروش و همکاران، ۱۳۹۶) و در نهایت تهرانی و همکاران (۱۳۹۷) در پژوهش خود با کمک الگوریتم دسته‌های میگو مسئله بهینه‌سازی سبد سهام را حل نموده و هم چنین ریسک با سه معیار واریانس، نیم واریانس و ریزش مورد انتظار بررسی شده است. نتایج حاکی از آن است که الگوریتم دسته‌های میگو در یافتن مرز کارآی پرتفوی بهینه در مقایسه با الگوریتم‌های تجمعی ذرات و رقابت استعماری نتایج مطلوب تری به دست می‌آورد (تهرانی و همکاران، ۱۳۹۷).

۳. روش تحقیق

در این تحقیق، با به‌کارگیری الگوریتم رقابت استعماری، بهینه‌سازی مجموعه سهام فعال عرضه‌شده در بورس اوراق بهادار تهران را مورد بررسی قرار می‌دهیم. بدین جهت برای به دست آوردن وزن سهام سرمایه‌گذاری به‌منظور حداکثر نمودن بازده سرمایه‌گذاری و به حداقل رساندن ریسک به‌صورت هم‌زمان، از یک مدل تک هدفه تحقیق در عملیات استفاده شده است. الگوهای مورداستفاده در این پژوهش، میانگین – واریانس با مؤلفه‌های مقید[۱]، میانگین – نیم واریانس با مؤلفه‌های مقید[۲]، میانگین – انحرافات مطلق[۳] و میانگین – ارزش در معرض ریسک شرطی[۴] است که محدودیت‌هایی به آن‌ها اضافه‌شده است که مهم‌ترین آن‌ها محدودیت تعداد دارایی در پرتفوی، محدودیت حد پایین و حد بالا از هر سهم می‌باشند که این تحقیق را متمایز از تحقیقات قبلی نموده و جنبه نوآوری این پژوهش می‌باشد. این پژوهش در بورس اوراق بهادار اجراشده است و جامعه آماری آن شرکت‌های پذیرفته‌شده در بورس اوراق بهادار تهران می‌باشد. هم‌چنین در این تحقیق از

[1]. Cardinality Constrained Mean – Variance (CCMV)
[2]. Cardinality Constrained Mean – Semi -Variance (CCMSV)
[3]. Mean – Absolute Deviation (MAD)
[4]. Mean - Conditional Value - at – Risk (CVaR)

۲۵ شرکت فعال از ۵۰ شرکت برتر سه‌ماهه چهارم سال ۱۳۹۴ اعلام‌شده توسط بورس که داده‌های کافی برای تخمین را در بازه زمانی مربوط به سال‌های ۱۳۹۵-۱۳۸۸ داشته باشند، به‌عنوان نمونه استفاده‌شده است و به‌منظور انجام این پژوهش، داده‌های روزانه مربوط به قیمت پایانی شرکت‌های حاضر در تحقیق طی دوره زمانی تعیین شده انتخاب می‌شوند. در ادامه این مبحث الگوهای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با ابزارهای مختلف سنجش ریسک شرح داده می‌شود.

۴. الگوهای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری

بازدهی سهام در دوره‌های متفاوت، متغیر است و روند ثابت و یکنواختی ندارد بنابراین نوسان و تغییرپذیری جز جدانشدنی بازدهی سهام در طی زمان است. باتوجه به تغییرپذیری و نوسان بازده، دوره‌های آتی نیز دارای عدم اطمینان می‌باشند که این خود سرمایه‌گذاری را با ریسک همراه می‌کند. در بسیاری از مدل‌های ارائه شده در الگوی پرتفوی فرامدرن سعی شده است که از سنجه‌ای برای ریسک استفاده شود که همخوانی بیشتری با ادراک سرمایه‌گذاران داشته باشد. در این پژوهش از چهار معیار مختلف برای اندازه گیری ریسک استفاده شده است که شامل واریانس، نیم واریانس، انحرافات مطلق و ارزش در معرض ریسک شرطی است.

۴-۱. مدل میانگین – واریانس با مؤلفه‌های مقید

در مدل استاندارد مارکویتز، هدف بیشینه‌سازی بازدهی قابل‌انتظار، همراه با کمینه‌سازی ریسک انتظاری که به‌عنوان انحراف معیار اندازه‌گیری می‌شود (مرینگر[1]، ۲۰۰۵).

بازده پرتفوی (R_p) از مجموع حاصل‌ضرب میانگین بازده در وزن هر سهم به دست می‌آید (راسمیسن[2]،۲۰۰۳) که به‌صورت رابطه (۱) بیان می‌گردد:

$$E(R_P) = \sum_{i=0}^{n} W_i\, E(R_i) \qquad (۱)$$

که در آن $E(R_P)$، نرخ بازده انتظاری پرتفوی؛ W_i، وزن هر سهم حاضر در پرتفوی است که توسط الگوریتم تعیین می‌گردد؛ $E(R_i)$، نرخ بازده انتظاری دارایی iام و n، تعداد دارایی‌های منتخب برای تشکیل پرتفوی می‌باشد.

---

[1]. Maringer

[2]. Rasmussen

سهامی که در پرتفوی قرار دارند ممکن است که با یکدیگر رابطه مستقیم یا غیرمستقیم داشته باشند. این رابطه توسط ضریب همبستگی سهام بیان و برای محاسبه ریسک پرتفوی استفاده می‌گردد (راسمیسن،۲۰۰۳). ریسک پرتفوی موردنظر نیز از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} W_i W_j \sigma_i \sigma_j p_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} W_i W_j \sigma_{ij} \qquad (۲)$$

p_{ij}=1 for i=j

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \qquad (۳)$$

$$0 \le W_i \le 1 \qquad (۴)$$

که در آن σ_P^2، واریانس پرتفوی؛ σ_i، انحراف معیار دارایی i ام ؛ σ_j، انحراف معیار دارایی j ام؛ p_{ij} ، ضریب همبستگی میان دارایی‌های i و j؛ W_i، وزن دارایی i ام در پرتفوی؛ W_j، وزن دارایی j ام در پرتفوی؛ و σ_{ij}، بیانگر کوواریانس بین بازده دارایی‌های i و j می‌باشد به‌طوری‌که $\sigma = (\sigma_{ij}) \,.\, i = 1 \,.\,.\,.\,.\, n \;.\; j = 1 \,.\,.\,.\,.\, n$ ؛ بنابراین $i \,.\, j \in \{1.\,.\,.\,.\, n\}$ بیانگر ماتریس واریانس – کوواریانس n.n بازده دارایی‌ها و n، تعداد دارایی‌های منتخب برای تشکیل پرتفوی می‌باشد.

با توجه به این‌که بازده مورد انتظار و واریانس پرتفوی از رابطه (۱) و (۲) قابل‌محاسبه می‌باشند؛ بنابراین مدل مارکویتز به‌صورت یک مسئله تابع دو هدفه به‌صورت الگوی زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} Max: \sum_{i=0}^{n} W_i \, E(R_i) \\ Min: \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} W_i W_j \sigma_i \sigma_j p_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} W_i W_j \sigma_{ij} \end{cases} \qquad (۵)$$

$$\text{s.t:} \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

$$0 \le w_i \le upper\ (i) \;.\; i = 1 \,.\,.\,.\,.\, n$$

شایان‌ذکر است که در مدل (۱)، تابع هدف اول یک تابع خطی برحسب W است درصورتی‌که تابع هدف دوم به‌صورت یک تابع درجه دوم برحسب W می‌باشد که در پژوهش حاضر این مدل به صورت تک هدفه مطرح می‌گردد. با اعمال محدودیت‌های تعداد سهام منتخب و حد بالا و پایین برای دارایی‌ها، مدل استاندارد مارکویتز اصلاح

گردیده و الگوی "میانگین – واریانس با مؤلفه‌های مقید" به وجود می‌آید. در ادامه به شرح کامل این محدودیت‌های کاربردی می‌پردازیم:

-محدودیت تعداد سهام منتخب پرتفوی[1]

تعداد دارایی‌های موجود در پرتفوی اغلب، با یک مقدار داده‌شده تعیین می‌شوند یا محدود شده هستند. از طریق معرفی یک متغیر دودویی z_i این محدودیت می‌تواند به شکل رابطه زیر بیان گردد:

$$\text{Where} \quad \text{Z}=\begin{cases}1 & if\ w_i > 0\\ 0 & if\ w_i = 0\end{cases} \quad \sum_{i=1}^{n} Z_i \le \text{K} \qquad (۶)$$

شکل نامساوی فوق کاملاً رایج است (مرینگر، ۲۰۰۵). ضمن آن‌که یک حد پایین نیز می‌توان به شکل رابطه زیر معرفی گردد (چیام و دیگران[2]، ۲۰۰۸):

$$K_{min} \le \sum_{i=1}^{n} Z_i \le K_{max} \qquad (۷)$$

ضمن آن‌که این محدودیت می‌تواند به شکل تساوی نیز بیان شود (آرمان انذز و لوزانو[3]، ۲۰۰۵) که در مقاله حاضر نیز از حالت تساوی این محدودیت استفاده گردیده است:

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = \text{k} \qquad (۸)$$

- محدودیت کف و سقف[4]

با اعمال این محدودیت‌ها، سرمایه‌گذار عقلایی مجاز است که یک حد پایین و حد بالا نسبت به سرمایه‌گذاری برای وزن هر دارایی در پرتفوی نگهداری نماید، به‌طوری‌که (i= 1,…,k) $W_i \ge 0. \varepsilon_i \le W_i \le \gamma_i$. به‌بیان‌دیگر، سهم پرتفوی برای یک دارایی خاص، در یک بازه‌ی داده شده تغییر می‌کند (چیام و دیگران، ۲۰۰۸).

$$\varepsilon_i \le W_i \le \gamma_i \ .(\text{i} = 1. \dots . \text{n}) \qquad (۹)$$

حال با اضافه کردن محدودیت‌ها به مسئله فوق، مدل مربوطه به شکل زیر درمی‌آید.

$$Min: \lambda\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \text{Z}_i W_i \text{Z}_j W_j \sigma_{ij}\right] - (1-\lambda)\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \text{Z}_i W_i R_P\right] \quad (۱۰)$$

---

[1]. Cardinality Constraint
[2]. Chiam et al.
[3].Armananzas & Lozano
[4]. Floor & Ceiling Constraint

$$\text{s.t: } \sum_{i=1}^{k} w_i = 1,$$
$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = \mathrm{K},$$
$$\varepsilon_i \le W_i \le \gamma_i \ .(\mathrm{i} = 1. \dots . \mathrm{k})$$
$$0 \le \varepsilon_i < \gamma_i \le 1$$
$$Z_i \in [0.1] \ .(\mathrm{i} = 1. \dots . \mathrm{n})$$
$$W_i \ge 0 \ .(\mathrm{i} = 1. \dots . \mathrm{k})$$

z_i متغیر تصمیم در مورد سرمایه‌گذاری در هر سهم است. اگر z_i برابر با یک باشد؛ یعنی سهم i در سبد قرار خواهد گرفت. مجموع تعداد سهامی که در سبد خواهند بود، بنا به این محدودیت مسئله، k تا خواهد بود و ε_i و γ_i به ترتیب حد پایین و بالای متغیر i ام (نسبت سهم i در سبد سرمایه‌گذاری) می‌باشند.

در رابطه (۱۰)، λ پارامتری است که مقدار آن در فاصله $[0.1]$ تغییر می‌کند؛ به‌طوری‌که اگر $\lambda=0$ باشد، آنگاه جواب معادله پرتفوی بهینه بدون در نظر گرفتن ریسک، حداکثر بازدهی مورد انتظار را خواهد داشت و اگر $\lambda=1$ باشد، آنگاه جواب بهینه حداقل ریسک را دارد و سرمایه‌گذار در این حالت محافظه‌کار تلقی می‌شود درواقع با تغییر λ از صفرتا یک و حل مدل‌بالا می‌توان مرز کارآ را تعیین کرد. برای هر λ ما یک نقطه جدید درروی مرز کارآ به دست می‌آوریم که با وصل کردن این نقاط به هم‌مرز کارآ تشکیل می‌شود (فرناندز و گومز، ۲۰۰۷).

۴-۲. مدل میانگین – نیم واریانس با مؤلفه های مقید

مارکویتز در سال ۱۹۵۹ معیار جدیدی برای محاسبه ریسک نامطلوب با عنوان نیم واریانس ارائه نمود. روش نیم واریانس، که از مجذورات انحرافات نامطلوب (انحرافات کم‌تر از میانگین نرخ بازده) حول میانگین نرخ بازدهی به دست می‌آید و به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\Delta_{\mathrm{P}-}{}^{2} = \mathrm{E}\left\{\left(\mathrm{R}_{\mathrm{P(t)}} - \mu_{\mathrm{P}}\right)^{2} \middle| \mathrm{R}_{\mathrm{P(t)}} < \mu_{\mathrm{P}}\right\} =$$
$$\delta_{P-}{}^{2} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \delta_{i-}\delta_{j-}\rho_{ij} \qquad (۱۱)$$

حال اگر نیم واریانس جایگزین واریانس شود، الگوی پیش‌گفته در رابطه (۱۰) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$Min: \lambda\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Z}_i W_i \mathrm{Z}_j W_j \sigma_{ij}\right] - (1-\lambda)\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Z_i W_i Z_j W_j\ \delta_i\text{-}\delta_j\text{-}\rho_{ij}\right]$$

s.t: $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1,$

$W_i \geq 0$

$\sum_{i=1}^{n} Z_i \leq \mathrm{K}$

$\varepsilon_i \leq W_i \leq \gamma_i$.

$0 \leq \varepsilon_i < \gamma_i \leq 1$

$Z_i \in [0.1]$. (i = 1. …. n)

۴-۳. مدل میانگین – قدرمطلق انحرافات

برای بیان مفهوم این شاخص ابتدا باید مفهومی به نام S_i تعریف شود. البته می توان با علامت‌های دیگری هم نمایش داد. S_i مقدار انحراف مطلق برای سهام i می‌باشد که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S_i = E\{|r_{i(t)} - \mu_i|\} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}|r_{i(t)} - \mu_i| \qquad (۱۳)$$

همان طوری که مشاهده می‌شود در این جا به جای توان ۲ از قدرمطلق انحراف استفاده شده است و طبیعتاً انحراف مطلق مربوط به پرتفوی برابر خواهد بود با:

$$\mathrm{S_P} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{W_i S_i} \qquad (۱۴)$$

حال اگر قدر مطلق جایگزین واریانس شود، الگوی پیش‌گفته در رابطه (۱۰) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$Min: \lambda\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Z}_i W_i \mathrm{Z}_j W_j \sigma_{ij}\right] - (1-\lambda)\left[\sum_{i=1}^{n} Z_i W_i S_i\right] \qquad (۱۵)$$

s.t: $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1,$

$W_i \geq 0$

, $\sum_{i=1}^{n} Z_i \leq \mathrm{K}$

$\varepsilon_i \leq W_i \leq \gamma_i$.

$0 \leq \varepsilon_i < \gamma_i \leq 1$

$Z_i \in [0.1]$. (i = 1. …. n)

۴-۴. مدل میانگین – ارزش در معرض ریسک شرطی

برای تعریف ارزش در معرض ریسک شرطیٔ ابتدا باید مفهوم ارزش در معرض ریسک را بررسی کرد. ارزش در معرض ریسک، معیار جدیدی بود که در دهه ۹۰ میلادی توسعه‌یافت. این معیار، یک معیار ریسک نامطلوب است که با درک افراد نسبت به ریسک تطابق بیشتری دارد. هم‌چنین در آن الزامی به نرمال فرض کردن توزیع داده‌ها وجود ندارد و بسیاری از روش‌های اندازه‌گیری این معیار ریسک، مشکلاتی که سایر معیارهای اندازه‌گیری ریسک، در مواجه با دنباله‌های ضخیم داشتند را ندارد. در روش ارزش در معرض ریسک برای انتخاب پرتفوی بهینه، اصول کار شبیه به مدل مارکویتز است، با این تفاوت که سرمایه‌گذار به دنبال ارزش در معرض ریسک کم‌تر و بازده بیشتر می‌باشد. این معیار در کنار نقاط قوتش دارای ضعف‌هایی است، ازجمله توانایی محاسبه مقادیر ریسک بیش‌تر و فراتر از ارزش در معرض ریسک را ندارد، کاهش ارزش در معرض ریسک ممکن است منجر به امتداد یافتن دنباله‌های فراتر از ارزش در معرض ریسک شود و سرانجام این‌که ویژگی عدم جمع‌پذیری ریسک در مورد آن مصداق دارد. در نتیجه، تنوع‌زایی نه‌فقط موجب کاهش ریسک، بلکه موجب افزایش ریسک می‌شود. ویژگی عدم تحدب در مورد آن مصداق دارد، یعنی دارای اکسترمم‌های (حداقل و حداکثر) محلی زیادی است و در نتیجه کمینه کردن آن بسیار مشکل است و برای توزیع‌های غیر نرمال، کنترل و بهینه‌سازی آن بسیار دشوار می‌باشد (آنکا، ۲۰۰۳).

با توجه به کاستی‌ها و نقاط ضعف ارزش در معرض ریسک، آرتزنر[1] با معرفی معیار در معرض ریسک شرطی، معیاری را معرفی کرد که نارسایی‌های ارزش در معرض ریسک را پوشش دهد. این الگو و معیار که نام‌های ریسک مورد انتظار و واریانس دنباله‌دار نیز شهرت دارد، تمام ویژگی‌هایی که ارزش در معرض ریسک را با کاستی‌هایی مواجه می‌کرد، به‌خوبی در برمی‌گیرد (آرتزنر و همکاران[2]، ۱۹۹۹). این معیار به‌صورت میانگین وقوع ریسک‌هایی که بزرگ‌تر و فراتر از ارزش در معرض ریسک می‌باشند، تعریف‌شده است. به‌عبارت‌دیگر $\alpha\%$ از میانگین توزیع بازده متغیر تصادفی بزرگ‌تر از ارزش در معرض ریسک (یامای و یوشیبا[3]، ۲۰۰۰).

---

[1]. Artzner
[2]. Artzner et al.
[3]. Yamai & Yoshiba

در یک تحلیل کلی می‌توان چنین بیان کرد که ارزش در معرض ریسک شرطی یک معیار دیگر ریسک نامطلوب است که نسبت به ارزش در معرض ریسک، محافظه‌کارانه‌تر بوده و دارای خاصیت جمع‌پذیری بوده و جز معیارهای منسجم محسوب می‌شود. این معیار، میانگین α درصد از بدترین زیان‌هاست و با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathrm{CVaR}_{\alpha}(\mathrm{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Z}\mathrm{dF_X}^{\alpha}(\mathrm{Z}) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\mathrm{VaR}_{\alpha}(\mathrm{X})}^{+\infty} \mathrm{Z}\mathrm{F_X}(\mathrm{Z})\mathrm{dZ} \qquad (۱۶)$$

$$\mathrm{F_X}^{\alpha}(\mathrm{Z}) = \begin{cases} 0 & \mathrm{Z} < \mathrm{VaR}_{\alpha}(\mathrm{X}) \\ \dfrac{\mathrm{F_X}(\mathrm{Z}) - \alpha}{1-\alpha} & \mathrm{Z} \geq \mathrm{VaR}_{\alpha}(\mathrm{X}) \end{cases}$$

$$\mathrm{CVaR}_{\alpha}(\mathrm{X}) \approx \mathrm{E}\{\mathrm{X}|\mathrm{X} \geq \mathrm{VaR}_{\alpha}(\mathrm{X})\}$$

حال اگر ارزش در معرض ریسک شرطی جایگزین واریانس شود، الگوی پیش‌گفته در رابطه (۱۰) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$Min: \lambda\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Z}_i W_i \mathrm{Z}_j W_j \sigma_{ij}\right] - (1-\lambda)\left[\frac{1}{1-\alpha}\int_{VaR_{\alpha}(X)}^{+\infty} ZF_X(Z)dZ\right] \qquad (۱۷)$$

$$\text{s.t: } \sum_{i=1}^{k} w_i = 1,$$

$$W_i \geq 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} Z_i \leq \mathrm{K}$$
$$\varepsilon_i \leq W_i \leq \gamma_i \ .$$
$$0 \leq \varepsilon_i < \gamma_i \leq 1$$
$$Z_i \in [0.1] \ . \ (\mathrm{i} = 1. \ \ldots . \ \mathrm{n})$$

در این پژوهش باهدف تشکیل پرتفوی بهینه و شناسایی مرز کارآی سرمایه‌گذاری، به بررسی امکان شناسایی و تشکیل پرتفوی بهینه توسط تکنیک‌های متاهیوریستیک مختلف پرداخته می‌شود. ازجمله این الگوریتم‌های متاهیوریستیک می‌توان به الگوریتم رقابت استعماری[1] اشاره کرد که در ادامه به شرح مختصر این الگوریتم می‌پردازیم.

۵. الگوریتم رقابت استعماری

الگوریتم رقابت استعماری با الهام گیری از یک فرایند اجتماعی سیاسی، در سال ۲۰۰۷ توسط اسماعیل آتشپزگرگری و همکاران ارائه شد. از این جهت در نوع خود یک الگوریتم جدید و قابل رقابت با سایر الگوریتم های تکاملی از جمله الگوریتم ژنتیک، الگوریتم توده

[1]. Imperialist Competitive Algorithm (ICA)

ذرات و ... می‌باشد از جهت کارایی نیز تاکنون در حل مسائل زیادی در زمینه بهینه‌سازی در مهندسی برق، کامپیوتر، صنایع، مکانیک، اقتصاد، مدیریت و ... استفاده شده است. دلیل استقبال بسیار زیاد از این الگوریتم در کنار کارایی بالای آن بیشتر به جنبه نوآوری ُ جدید و جذاب بودن آن برای متخصصین حوزه بهینه سازی می‌باشد. در الگوریتم رقابت استعماری، برای حل مسئله بهینه‌سازی مفروض، N کشور در نظر گرفته می‌شود که هرکدام با یک بردار نمایش داده‌شده و نشان‌دهنده یک نقطه در فضای n بُعدی می‌باشد. در حقیقت کشورها جواب‌های ممکن مسئله هستند. همه‌ی کشورها، به دو دسته تقسیم می‌شوند: امپریالیست و مستعمره. کشورهای استعمارگر با اعمال سیاست جذب (همگون سازی[1]) در راستای محورهای مختلف بهینه‌سازی، کشورهای مستعمره را به سمت خود می‌کشند. رقابت امپریالیستی در کنار سیاست همگون‌سازی، هسته‌ی اصلی این الگوریتم را تشکیل می‌دهد و باعث می‌شود که کشورها به سمت مینیمم مطلق تابع حرکت کنند. با توجه به توضیحات ارائه‌شده می‌توان گام‌های اصلی در پیاده‌سازی الگوریتم پیشنهادی رقابت استعماری را در هفت مرحله، به‌صورت زیر بیان نمود:

گام صفر: ثبت ورودی‌های موردنیاز

تعریف توابع هدف و محدودیت‌ها، تعیین تعداد تکرار یا شرط توقف الگوریتم و هم‌چنین تعیین پارامترهای موردنیاز برای اجرای الگوریتم رقابت استعماری.

گام اول: شکل‌دهی امپراطوری اولیه

در بهینه‌سازی، هدف یافتن یک جواب بهینه برحسب متغیرهای مسئله است. ما یک آرایه از متغیرهای مسئله را که باید بهینه شوند، ایجاد می‌کنیم. در الگوریتم رقابت استعماری جمعیت اولیه، یک کشور می‌باشد. برای شروع الگوریتم، تعداد $N_{country}$ کشور اولیه را ایجاد می‌کنیم. N_{imp} تا از بهترین اعضای این جمعیت که دارای کم‌ترین مقدار تابع هزینه می‌باشند را به‌عنوان امپریالیست انتخاب می‌کنیم. باقیمانده N_{col} تا از کشورها، مستعمراتی را تشکیل می‌دهند که هرکدام به یک امپراطوری تعلق دارند. درواقع در گام اول، چند نقطه تصادفی بر روی تابع انتخاب کرده و امپراطوری اولیه را تشکیل می‌دهیم.

[1]. assimilation

گام دوم: مدل‌سازی سیاست جذب

در گام بعدی مستعمرات را به سمت کشور امپریالیست حرکت می‌دهیم (سیاست همگون سازی)

گام سوم: جابه‌جایی موقعیت مستعمره و امپریالیست

اگر مستعمره‌ای در یک امپراطوری وجود داشته باشد که هزینه‌ای کم‌تر از امپریالیست داشته باشد، جای مستعمره و امپریالیست را باهم عوض می‌کنیم.

گام چهارم: قدرت کل یک امپراطوری

قدرت یک امپراطوری برابر است باقدرت کشور استعمارگر، به‌اضافه درصدی از قدرت کل مستعمرات آن. در این مرحله، هزینه کل یک امپراطوری را با در نظر گرفتن هزینه‌ی امپریالیست و مستعمراتش حساب می‌کنیم.

گام پنجم: رقابت استعماری

هر امپراطوریی که نتواند بر قدرت خود بیفزاید و قدرت رقابت خود را از دست بدهد، در جریان رقابت‌های امپریالیستی، حذف خواهد شد. امپراطوری در حال حذف، ضعیف‌ترین امپراطوری موجود است. بدین ترتیب، در تکرار الگوریتم، یکی یا چند تا از ضعیف‌ترین مستعمرات، ضعیف‌ترین امپراطوری را برداشته و برای تصاحب این مستعمرات، رقابتی را میان کلیه امپراطوری‌ها ایجاد می‌کنیم. مستعمرات مذکور، لزوماً توسط قوی‌ترین امپراطوری تصاحب نخواهد شد، بلکه امپراطوری قوی‌تر، احتمال تصاحب بیش‌تری دارد. درنتیجه در مرحله پنجم، یک مستعمره از ضعیف‌ترین امپراطوری را انتخاب کرده و آن را به امپراطوریی که بیش‌ترین احتمال تصاحب را دارد، می‌دهیم.

گام ششم: سقوط امپراطوری ضعیف

در این مرحله امپراطوری ضعیف را حذف می‌کنیم. در الگوریتم پیشنهادشده برای این رساله، یک امپراطوری زمانی حذف‌شده تلقی می‌شود که مستعمرات خود را ازدست‌داده باشد.

گام هفتم: همگرایی

تکرار از گام دوم تا رسیدن به شرایط توقفی که از پیش تعیین کرده‌ایم، شرایط توقف می‌تواند بر اساس زمان الگوریتم، تعداد دفعات تکرار، میزان جمعیت، تغییر در تابع هدف و ... تعیین شود.

۶. یافته‌های تحقیق

در این مقاله از قیمت روزانه سهام ۲۵ شرکت فعال از ۵۰ شرکت برتر سه‌ماهه چهارم سال ۱۳۹۴ استفاده‌شده است. جهت برآورد الگوهای میانگین – واریانس با مؤلفه‌های مقید، میانگین – نیم واریانس با مؤلفه‌های مقید، میانگین – انحرافات مطلق و تعیین سبد بهینه سهام لازم است بازدهی سهام شرکت‌ها محاسبه شود.

ریسک که به‌عنوان نوسانات احتمالی منفی بازدهی اقتصادی در آینده تعریف می‌شود نیز با توجه به چهار معیار ذکرشده به ترتیب به‌صورت واریانس، نیم واریانس، انحرافات مطلق و ارزش در معرض ریسک شرطی موردبررسی قرار می‌گیرد. علاوه بر مواردی که ذکر آن رفت، پرتفوی کارآ به معنای ترکیب بهینه اوراق بهادار در یک سبد است به‌نحوی‌که ریسک آن پرتفوی، درازای بازده معینی حداقل و بازده آن در سطح مشخصی از ریسک حداکثر می‌شود. با توجه به این توضیح مرز کارآ تعریف می‌شود. ریسک و بازده ۲۵ شرکت فعال در بازار بورس اوراق بهادار تهران، ورودی‌های الگوریتم‌های مورداستفاده در تحقیق بودند. با اعمال ۲۰۰ تکرار در اجرای الگوریتم رقابت استعماری برای هر چهار مدل به نتایج قابل‌قبولی دست‌یافتیم. برای بررسی کارایی و دقت الگوریتم پیشنهادی، مرزهای کارآی به‌دست‌آمده از چهار تابع را رسم کردیم. شایان‌ذکر است که الگوریتم پیشنهادی مقاله با استفاده از نرم‌افزار MATLAB R2016b برنامه‌نویسی و اجرا گردیده و درنهایت پیاده‌سازی و نتایج آن‌ها به‌صورت نمودار و جدول نشان داده شده است. همان‌طوری که ملاحظه می‌گردد جداول (۱)، پارامترهای الگوریتم رقابت استعماری سازگار با مسئله پرتفوی مقاله حاضر را نشان می‌دهد.

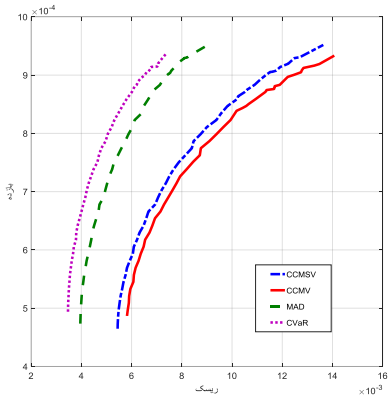
جدول ۱. پارامترهای الگوریتم رقابت استعماری (ICA) سازگار با مسئله پرتفوی

پارامترها	مقدار
تعداد کشورها	۶۰
تعداد امپراطوری ها	۵
ضریب همگون سازی یا ضریب جذب(β)	۰/۹
ضریب زاویه جذب (نرخ انقلاب)	۰/۰۵
γ	۰/۱
حداکثر تکرار	۲۰۰

منبع: محاسبه‌شده توسط مؤلف

نتایج الگوریتم رقابت استعماری با بهره‌گیری از الگوهای پیشنهادی در نمودارهای (۱) نشان داده‌شده است. در این نمودار محور افقی نشان‌دهنده ریسک و محور عمودی نشان‌دهنده بازده است. هرکدام از این اشکال صرفاً در تابع هدف و در بخش کمینه‌سازی خطرپذیری با یکدیگر تفاوت دارند. نمودارها برحسب درصد رسم شده‌اند. در این نمودار مرز کارآی به‌دست‌آمده از الگوریتم رقابت استعماری برای الگوهای میانگین – واریانس با مؤلفه‌های مقید (CCMV)، میانگین – نیم واریانس با مؤلفه‌های مقید (CCMSV)، میانگین – انحرافات مطلق (MAD) و میانگین – ارزش در معرض ریسک شرطی (CVaR) مقایسه می‌شود. مرز کارآی مربوط به الگوی CCMV با خط قرمزرنگ، مرز کارآی مربوط به الگوی CCMSV با خطوط ستاره‌دار آبی‌رنگ، مرز کارآی مربوط به الگوی MAD با خط چین های سبز رنگ و مرز کارآی مربوط به الگوی CVaR با رنگ بنفش مشخص‌شده است. در این نمودار با توجه به مقادیر به‌دست‌آمده، می‌توان سبد بهینه سهام را تعیین نمود و تعاریف مختلف ریسک را نیز مشاهده کرد. با توجه به این نکته که توابع موردبررسی در این تحقیق صرفاً در تابع هدف و در بخش کمینه‌سازی ریسک‌پذیری با یکدیگر تفاوت دارند، بحث کارایی الگوهای بهینه‌سازی مورداستفاده در پژوهش حاضر با معیار سنجش ریسک موردبررسی قرار می‌گیرد. نتایج حاصل از نمودار (۱) نشان می دهد که الگوی CVaR با دقت بهتری پرتفوی بهینه را تعیین می‌کند. هم چنین با توجه به این نکته که واریانس به‌عنوان یک عامل خطرپذیری عمومی شناخته می‌شود و نیم واریانس تخمین زننده ریسک‌پذیری نامطلوب پرتفوی است در نتیجه الگوی CCMSV، فقط ریسک نامطلوب پرتفوی را اندازه‌گیری می نماید و در بازه‌های یکسان ریسک‌پذیری کم‌تری را نسبت به الگوی CCMV نشان می‌دهد به همین دلیل منحنی مربوط به الگوی میانگین – نیم واریانس با مؤلفه‌های مقید برای الگوریتم رقابت استعماری، در سمت چپ منحنی مربوط به الگوی میانگین – واریانس با مؤلفه‌های مقید قرار می‌گیرد.

نمودار ۱. مقایسه مرز کارآی سرمایه‌گذاری با استفاده از الگوی CCMV و CCMSV و MAD و CVaR– الگوریتم ICA



الگوریتم رقابت استعماری (ICA)، بر اساس اندازه جمعیتشان، ۶۰ سبد کارآ طراحی و آن‌ها را براساس اهداف ریسک و بازده رتبه‌بندی می‌کند، نمایش چندین رتبه همسان در طبقه‌بندی‌ها، نشان می‌دهد که سبدهای مذکور نسبت به یکدیگر نه غالب بوده و نه مغلوب، بنابراین انتخاب هریک از اولویت‌های هم‌رتبه بر اساس ترجیحات ریسک‌پذیری و یا ریسک‌گریزی مدیران می‌باشد. با توجه به این‌که تعداد سبدهای طراحی‌شده زیاد است (۶۰ سبد)، در اینجا یکی از سبدهای سهام بهینه به‌طور تصادفی انتخاب و در جدول (۲) به ترتیب مدل‌های به‌کاررفته در تحقیق پیشنهاد می‌شود. اعداد جدول اولاً بیانگر سهامی که باید در پرتفوی انتخاب شود و ثانیاً مقدار هر سهم در پرتفوی می‌باشند

جدول ۲. سهام و نسبت سهام در پرتفوی‌ها بر اساس الگوریتم رقابت استعماری (ICA) و مدل‌های مورداستفاده در تحقیق

نام شرکت	مقدار هر سهم در پرتفوی بر اساس چهار مدل مورداستفاده در تحقیق			
	CCMV	CCMSV	MAD	CVaR
بانک کارآفرین	۰/۰۵۱۱۲۵	۰/۰۵۳۵۸۱	۰/۰۵۴۲۳۶	۰/۰۵۲۱۴۷
بانک اقتصاد نوین	۰	۰	۰	۰
بانک پارسیان	۰/۰۵۵۰۱۵	۰/۰۵۵۲۵۸	۰/۰۶۸۵۴	۰/۰۶۰۱۴
بانک سینا	۰	۰	۰	۰
فولاد خراسان	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۲	۰	۰
فولاد مبارکه اصفهان	۰/۰۸۶۶۹۶	۰/۰۸۵۴۱۸	۰/۰۷۶۲۵	۰/۰۷۰۸۷۴
گروه مدیریت سرمایه‌گذاری امید	۰/۰۰۲۱	۰/۰۰۵۴	۰/۰۰۸	۰/۰۰۷۱

گروه مپنا۱	۰/۰۶۵۸۷۱	۰/۰۶۱۸۷۹	۰/۰۶۲۸۷۹	۰/۰۶۵۸۱۴
ایران‌خودرو	۰/۰۵۷۴۵۳	۰/۰۶۶۸۷۹	۰/۰۶۱۴۷۸	۰/۰۶۸۷۵۹
ایران‌خودرو دیزل	۰/۰۱۵۶۹	۰/۰۱۴۸۷	۰/۰۲۰۵۴۲	۰/۰۲۴۷۸۵
ایران ترانسفو	۰/۰۴۲۵۴۷	۰/۰۴۰۲۵۸	۰/۰۳۸۷۴۱	۰/۰۳۷۵۹۴
کشتی رانی جمهوری اسلامی ایران	۰/۰۲۸۷۴۱	۰/۰۲۵۱۷۱	۰/۰۲۹۲۱۴	۰/۰۳۱۴۷۸
خدمات انفورماتیک	۰/۰۸۷۱۱۵	۰/۰۸۸۲۵۴	۰/۰۸۷۱۴۵	۰/۰۸۸۵۴۲
لیزینگ رایان سایپا	۰/۰۳۱۴۵۸	۰/۰۳۵۸۴۷	۰/۰۴۱۲۸۵	۰/۰۳۸۴۱۷
معدنی و صنعتی گل گهر	۰/۰۸۳۱۱۱	۰/۰۸۰۲۵۴	۰/۰۸۱۱۴۵	۰/۰۸۲۹۴۶
معدنی و صنایع چادرملو	۰/۰۷۶۵۵۲	۰/۰۷۵۸۴۲	۰/۰۷۷۳۶۶	۰/۰۷۷۷۷۵
صنایع ملی مس ایران	۰/۰۷۰۸۷۴	۰/۰۷۱۸۸۸	۰/۰۶۹۸۷۲	۰/۰۷۱۸۷۴
پالایش نفت اصفهان	۰/۰۵۱۲۵۹	۰/۰۵۲۵۹۷	۰/۰۴۷۴۱۱	۰/۰۴۵۰۱۴
پارس‌خودرو	۰	۰	۰/۰۰۲	۰/۰۰۱
پتروشیمی خارک	۰/۰۹۷۵۱	۰/۰۸۴۵۸	۰/۰۹۴۷۲۳	۰/۰۹۱۱۲
سایپا	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۱	۰
سرمایه‌گذاری گروه توسعه ملی	۰/۰۳۹۲۹۱	۰/۰۳۱۳۵۴	۰/۰۲۸۴۷۲	۰/۰۲۱۶۵۴
سرمایه‌گذاری رنا هولدینگ	۰	۰	۰	۰
سرمایه‌گذاری صندوق بازنشستگی	۰/۰۴۵۴۵	۰/۰۴۱۳۳۳	۰/۰۴۲۵۸۷	۰/۰۴۳۱۴۹
توسعه معدن و فلزات	۰	۰	۰	۰

منبع: محاسبه‌شده توسط مؤلف

در یک تحلیل کلی با عنایت به مباحث مطرح‌شده ابتدا بایستی توجه داشت که تابع هدف و قیود یکسانی در ساخت سبدهای سهام مؤثر بوده که در مباحث قبلی به‌طور مفصل به بیان آن‌ها پرداخته شد. نکته اساسی دیگر این است که در الگوریتم‌های متاهیوریستیک جمعیت اولیه به‌صورت تصادفی ایجاد می‌شود و هم‌چنین عملگرهای موجود در این روش‌ها باعث ایجاد جواب‌های تصادفی در طی فرآیند اجرای هر الگوریتم می‌شوند، جواب‌های حاصل از هر الگوریتم در اجراهای مختلف، متفاوت خواهد بود؛ به همین دلیل با خوب یا بد شدن نتیجه در یک اجرا نمی‌توان به‌راحتی در مورد توانایی الگوریتم به‌درستی اظهارنظر کرد؛ بنابراین بایستی هر الگوریتم بیش از یک‌بار اجرا گردد. در این مقاله پس از مدل‌سازی و تعیین پارامترهای بهینه الگوریتم به کار گرفته، ۱۰ اجرای مختلف با ۲۰۰ تکرار برای الگوریتم رقابت استعماری در نظر گرفته شد. یکی از معیارهای

مقایسه روش‌های متاهیوریستیک نزدیک بودن جواب‌های حاصل از یک الگوریتم در اجراهای مختلف است. نتایج گویای تفاوت ناچیزی میان جواب‌های حاصل از تکرارهای مختلف است که نشان‌دهنده ثبات بالای الگوریتم در اجراهای مختلف است.

به‌طورکلی معیارهایی که در تعیین کارایی یک الگوریتم در فرآیند بهینه‌سازی سبد سهام استفاده می‌شود، عبارت‌اند از کیفیت و دقت جواب ارائه‌شده و زمان سپری‌شده به‌منظور دستیابی به جواب بهینه. به‌منظور مقایسه و ارزیابی دقت در بهینه‌سازی سبد سهام از دو معیار زمان و واریانس برای هر یک از مدل‌ها در مقاله حاضر، محاسبه‌شده و نتایج آن در جدول (۳) ارائه‌شده است.

جدول ۳. مقایسه الگوریتم‌پیشنهادی در مدل‌های مورداستفاده در تحقیق با استفاده از معیار زمان (به ثانیه) و واریانس

الگوریتم رقابت استعماری (ICA)							
MV		MSV		MAD		CVaR	
Time	Variance	Time	Variance	Time	Variance	Time	Variance
۱۰۳۸/۴۲	۲/۴۷-E۱۱	۲۱۷۱/۶۳	۲/۴۰-E۱۴	۱۲۰۲/۹	۱/۰۳ – E۱۴	۱۴۳۰/۷	۲/۰۹ – E۳۷

منبع: محاسبه‌شده توسط مؤلف

با استناد به تئوری‌های اقتصادی، هرچقدر مقدار بهترین واریانس کوچک‌تر باشد و هم‌چنین سرعت همگرایی و زمان دسترسی به جواب بهینه کوتاه‌تر باشد، آنگاه میزان دقت در پیش‌بینی مدل‌های برآورد شده بیش‌تر خواهد بود. بر اساس نتایجی که برای داده‌های مجموعه‌ای از ۲۵ سهام، به‌دست‌آمده بهترین واریانس موجود برای الگوریتم رقابت استعماری از بین ۱۰ تکرار، به ترتیب مربوط به مدل میانگین- ارزش در معرض ریسک شرطی، میانگین – انحرافات مطلق، مدل میانگین – نیم واریانس با مؤلفه‌های مقید و در نهایت مدل میانگین – واریانس با مؤلفه‌های مقید می باشد. در واقع رویکرد میانگین – ارزش در معرض ریسک شرطی نسبت به سه مدل دیگر از واریانس کم‌تری برخوردار است. هم‌چنین در این مقاله بالاترین سرعت همگرایی مربوط به مدل CCMV می‌باشد. درواقع مدل میانگین – واریانس با مؤلفه های مقید در این الگوریتم می‌تواند در زمان کم‌تری به راه‌حل‌های بهتر برسد و در مقایسه با سه مدل دیگر سریع‌تر به جواب بهینه دست پیدا می‌کند.

۷. نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در بهینه‌سازی پرتفوی، مسئله اصلی انتخاب بهینه دارایی‌ها و اوراق بهاداری است که با مقدار مشخصی سرمایه می‌توان تهیه کرد. چگونگی تخصیص منابع و انتخاب نوع سرمایه‌گذاری از اهمیت بالایی برخوردار است. این تخصیص بهینه، بالأخص در بازارهای مالی که عامل رشد و توسعه کشورها می‌باشند، بسیار حائز اهمیت می‌باشد. در این مقاله، با توجه به اهمیت روزافزون سرمایه‌گذاری در سبدهای مالی، کاربرد الگوریتم رقابت استعماری در حل مسائل بهینه‌سازی سبد سهام با محدودیت تعداد سهام پرتفوی و هم‌چنین محدودیت سقف و کف برای هر دارایی با رسم مرز کارآ نشان داده شد. علاوه بر این، پژوهش حاضر مسئله بهینه‌سازی مارکویتز را با استفاده از تعاریف مختلف ریسک یعنی واریانس، نیم واریانس، انحرافات مطلق و ارزش در معرض ریسک شرطی به کار گرفته است؛ بنابراین امکان مقایسه پرتفوی بهینه با توجه به تعاریف مختلف ریسک فراهم‌شده است. در یک جمع‌بندی کلی می‌توان چنین بیان کرد که الگوریتم به‌کاررفته دریافتن جواب‌های بهینه و مرز کارآی سرمایه‌گذاری در تعاریف متفاوتی از ریسک به‌طور کارایی اقدام به حل مسئله نموده است. با در نظر گرفتن هر دو معیار ارزیابی دقت در بهینه‌سازی سبد سهام به‌طور هم‌زمان، در الگوریتم رقابت استعماری، مدل میانگین – ارزش در معرض ریسک نسبت به سایر مدل ها از دقت بهینه‌سازی بالاتری برخوردار است. این نتایج همگی مطابق مبانی نظری تحقیق حاضر و اکثر مطالعات پژوهشی انجام‌یافته در زمینه‌ی بهینه‌سازی سبد سهام می‌باشد. در حالت کلی با توجه به این‌که این مطالعات، به‌منظور نزدیک کردن شرایط مسئله به واقعیت و هم‌چنین دستیابی به جواب بهینه با استفاده از تکنیک‌های هوشمند انجام‌شده‌اند می‌توان گفت نتایج مقاله حاضر با نتایج تحقیقات فوق هم‌خوانی دارد. البته با این تفاوت که در پژوهش حاضر، پرتفوی بهینه بر اساس تعاریف مختلف ریسک به‌دست‌آمده است و سرمایه‌گذار می‌تواند با توجه به ریسک‌پذیری خود یکی از سبدهای سهام بهینه را انتخاب کند. در اینجا لازم است به این نکته اشاره شود با توجه به این‌که مطالعات انجام‌شده در زمینه بهینه‌سازی سبد سهام ازنظر مدل‌های مورداستفاده، نگرش به مسئله انتخاب پرتفوی، متغیرهای به کار گرفته، افق زمانی، داده‌های مورداستفاده، تفاوت در محدودیت‌های اعمال‌شده و طراحی و برنامه‌نویسی الگوریتم‌های به‌کاررفته، با پژوهش حاضر متفاوت می‌باشند. درنتیجه عدم هم‌خوانی نتایج برخی تحقیقات با پژوهش حاضر نیز دور از انتظار نیست.

در این پژوهش حوزه‌های زیر برای تحقیقات آتی به محققین پیشنهاد می‌گردد:

۱. با توجه به یافته‌های این پژوهش، این گونه به نظر می رسد که رویکرد میانگین- نیم واریانس برای افراد ریسک پذیر، سبد بهتری نسبت به دیگر الگوها ارائه می‌دهد. ضمن آن که الگوی ارزش در معرض ریسک شرطی نیز ملاک بهتری برای انتخاب سبد بهینه افراد ریسک گریز می‌باشد.

۲. در این تحقیق، سهام عرضه‌شده در بورس اوراق بهادار به‌عنوان دارایی‌های موجود مورداستفاده قرارگرفته است. برای مطالعات آتی پیشنهاد می‌گردد یک مجموعه دارایی مختلط از سهام و سایر دارایی‌ها نظیر سپرده‌گذاری در بانک‌ها، اوراق مشارکت، ارز، طلا و زمین را نیز در نظر گرفته شود.

۳. برای مطالعات آتی پیشنهاد می‌شود به‌منظور کارایی بیش‌تر الگوریتم‌های متاهیوریستیک در کنار عامل ریسک و بازده، که در این پژوهش صرفاً از اطلاعات این دو استفاده‌شده است، میزان نقد شوندگی اوراق بهادار را نیز در نظر گیرند.

فهرست منابع:

آتشپزگرگری، اسماعیل (۱۳۸۷)، توسعه الگوریتم بهینه‌سازی اجتماعی و بررسی کارایی آن، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تهران.

افشار، کاظمی، محمدعلی، فلاح، شمس لیالستانی، میر فیض و مرضیه، کارگر (۱۳۹۳)، تدوین مدلی جدید برای بهینه‌سازی پرتفوی بورس با استفاده از روش مارکویتز و اصلاح آن توسط مدل کسینوس‌ها و حل آن توسط الگوریتم ژنتیک، مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، ۵(۱۸): ۸۱-۱۰۴.

تهرانی، رضا، فلاح تفتی، سیما و سپهر، آصفی (۱۳۹۷)، بهینه‌سازی سبد سهام به کمک الگوریتم فرابتکاری دسته‌های میگو با استفاده از معیارهای مختلف از ریسک در بورس اوراق بهادار تهران، نشریه تحقیقات مالی، ۱۹(۲): ۲۶۳-۲۸۰.

زمانی، محسن، افسر، امیر، ثقفی، سید وحید و الهام، بیات (۱۳۹۳)، سیستم خبره پیش‌بینی قیمت سهام و بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از شبکه‌های عصبی فازی، مدل‌سازی فازی و الگوریتم ژنتیک، مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، ۶(۲۱): ۱۰۷-۱۳۰.

سروش، ابوذر، عطرچی، رومینا و شاهین، رامتین نیا (۱۳۹۶)، بهینه سازی سبد سهام با استفاده از الگوریتم بهینه سازی مبتنی بر آموزش و یادگیری(TLBO) در بورس اوراق بهادار تهران، نشریه تحقیقات مالی، ۲۰(۴): ۴۲۶-۴۰۹.

سینایی، حسنعلی و سعید، زمانی (۱۳۹۳)، تصمیم‌گیری برای انتخاب سبد سهام؛ مقایسه‌ی الگوریتم‌های ژنتیک و زنبورعسل، پژوهشنامه علمی پژوهشی مدیریت اجرایی، ۶(۱۱): ۸۳-۱۰۲.

طالبی، آرش (۱۳۸۹)، انتخاب و بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از روش‌های فرا ابتکاری و مقایسه‌ی آن با سبدهای تشکیلی خبرگان و تازه‌کارها در بورس اوراق بهادار تهران، پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی صنایع و مدیریت دانشگاه صنعتی شاهرود.

عبدالعلی‌زاده شهیر، سیمین و کوروش، عشقی (۱۳۸۲)، کاربرد الگوریتم ژنتیک در انتخاب یک مجموعه دارایی از سهام بورس اوراق بهادار، فصلنامه پژوهش‌های اقتصادی ایران، ۴(۱۷): ۱۹۲-۱۷۵.

قاسمی، حمیدرضا و امیرعباس، نجفی (۱۳۹۱)، بهینه‌سازی پرتفوی سهام در شرایط مجاز بودن فروش استقراضی و برخی محدودیت‌های کاربردی بازار سرمایه، مجله تحقیقات مالی، ۱۴(۲): ۱۱۷-۱۳۲.

موشخیان، سیامک و امیرعباس، نجفی (۱۳۹۴)، بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از الگوریتم چندهدفه ازدحام ذرات برای مدل احتمالی چند دوره‌ای میانگین – نیم واریانس – چولگی، مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، ۲(۲۳): ۱۳۳-۱۴۷.

مولایی، محمدعلی و آرش، طالبی (۱۳۸۹)، بررسی کاربرد الگوریتم ابتکاری- ترکیبی ژنتیک و نلدر-مید در بهینه‌سازی پرتفوی، دو فصلنامه علمی- پژوهشی جستارهای اقتصادی، ۷(۱۴): ۱۷۱-۲۰۴.

Ali, H. O. & Jilani, F. (2014), Mean-VAR model with stochastic volatility, Procedia-Social and Behavioral Sciences, 109: 558-566.

Armãnanzas, R. & Lozano, J.A. (2005), A multiobjective approach to the portfolio optimization problem, In Proceedings of the 2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation: 1388–1395.

Chiam, S. C., Tan, K. C. & Al Mamum, A. (2008), Evolutionary multi-objective portfolio optimization in practical context, International Journal of Automation and Computing, 5(1): 67-80.

Estrada, J. (2002), Systematic risk in emerging markets: The D-CAPM, Emerging Markets Review, 3(4): 365-379.

Fernandez, A. & Gomez, S. (2007), Portfolio selection using neural networks, Computers & Operations Research, 34(4): 1177-1191.

Hagin, R.L. (1979), The Dow Jones-Irwin Guide to Modern Portfolio Theory: 1st ed. Dow Jones-Irwin, Homewood, Illinois, U.S.A.

Hagin, R.L. (2004), Investment Management-Portfolio Diversification, Risk, and Timing-Fact and Fiction: New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Konno, H. & Yamazaki, H. (1991), Mean – Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market, Management Science, 37(5): 519-531.

Liu, Y. J., Zhang, W. G. & Zhang, Q. (2016), Credibilistic multi-period portfolio optimization model with bankruptcy control and affine recourse, Applied Soft Computing, 38: 890-906.

Mansini, R. & Speranza, M.G. (1999), Heuristic Algorithms for the Portfolio Selection Problem with Minimum Transaction Lots, European Journal of Operational Research, 114(2): 219-233.

Maringer, D. (2005), Portfolio Management with Heuristic Optimization: Springer Verlag.

Markowitz, H. (1952), Portfolio Selection, the Journal of Finance, 7(1): 77-91.

Markowitz, H. (1959), Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments, New York, Publisher: John Wiley & Sons.

Rasmussen, M. (2003), Quantitative portfolio optimisation, asset allocation and risk management: Palgrave Macmillan.

Roll, R. & Ross, S.A. (1984), The Arbitrage Pricing Theory Approach to Strategic Portfolio Planning, Financial Analysts Journal, 40(3): 14-26.

Sharpe. W. F. (1967), Linear Programming Algorithms for Mutual Fund Portfolio Selection, Management Science Journal,13(7): 449-510.

Tilahun, S. L. & Ngnotchouye, J. M. T. (2017), Firefly algorithm for discrete optimization problems: A survey, *KSCE Journal of Civil Engineering*, *21*(2): 535-545.

Yin, X., Ni, Q. & Zhai, Y. (2015), A novel PSO for portfolio optimization based on heterogeneous multiple population strategy, In 2015 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC) (pp. 1196-1203). IEEE.