

مقایسه مدل‌های گارچ با معرفی گارچ تحقق یافته نامتقارن فازی*

اسمعیل ابونوری (نویسنده مسئول)

استاد اقتصادسنجی و آماراجتماعی، گروه اقتصاد دانشگاه سمنان، سمنان، ایران

Esmail.abounoori@semnan.ac.ir

محمدامین زابل

دانشجوی دکتری علوم اقتصادی، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران

M.zabol@semnan.ac.ir

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۳/۱۲

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۲/۰۲

چکیده

برآورد واریانس شرطی دارای کاربرد فراوان برای انعکاس ریسک و تلاطم در پژوهش‌های اقتصادی بویژه اقتصادمالی، اقتصاداجتماعی و اقتصادسیاسی است. بنابراین، دستیابی به برآوردهای دقیق واریانس شرطی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. اخیراً "هانسن واریانس شرطی یا تلاطم تحقق یافته را به صورت همزمان مدل‌سازی نموده که به مدل گارچ تحقق یافته معروف شده است. هدف اساسی در این مقاله معرفی مدل گارچ تحقق یافته نامتقارن با ضریب فازی است تا بتوان سرانجام با انعطاف‌پذیری بیشتر واریانس شرطی دقیق‌تری را برآورد نمود. برای این منظور، واریانس شرطی برآورد شده از مدل گارچ تحقق یافته نامتقارن با ضریب فازی با مدل‌های مرسوم GARCH، EGARCH و GJR-GARCH و همچنین مدل RGARCH هانسن با دو معیار مختلف از تلاطم تحقق یافته شاخص کل بورس تهران مقایسه شده است. برای ارزیابی خوبی برازش از مقدار تابع در ست‌نمایی استفاده شده است. با توجه به این معیار، مدل پیشنهادی گارچ تحقق یافته با ضریب فازی از خوبی برازش بالاتری بر داده‌های درون نمونه ای در مقایسه با سایر مدل‌ها برخوردار بوده‌اند. برای ارزیابی دقت پیش‌بینی واریانس شرطی نیز از روش پنجره غلتان با دو تابع زیان MSE و QLIKE استفاده شده است. نتایج حاکی از آن است که مدل گارچ تحقق یافته با ضریب فازی برا ساس هر دو تابع زیان بهترین عملکرد را داشته است.

طبقه‌بندی *JEL*: G10, G15, G17

واژگان کلیدی: مدل‌های گارچ، مدل گارچ تحقق یافته فازی، بورس اوراق بهادار تهران، ایران

* این مقاله از رساله دکتری محمد امین زابل با عنوان «ارزیابی عملکرد مدل‌های گارچ با معرفی گارچ تحقق یافته نامتقارن فازی»، تحت راهنمایی دکتر اسمعیل ابونوری در دانشگاه سمنان استخراج شده است.

۱. مقدمه

برآورد واریانس شرطی حاصل از مدل های آرچ و گارچ به عنوان معیاری از تلاطم شناخته شده است و کاربرد وسیعی در اقتصاد بویژه اقتصاد مالی یافته است. این معیار در مدیریت ریسک بویژه برای ارزش گذاری اختیار معامله، انتخاب پورتفوی بهینه و پوشش ریسک از اهمیت زیاد برخوردار شده است. در نتیجه، افزایش دقت برآورد ریسک پرتقاضا بوده و به چالشی همیشگی در مقابل پژوهشگران علوم اقتصادی بویژه اقتصادسنجی و اقتصادمالی تبدیل شده است. موضوع مدلسازی واریانس شرطی از زمان انگل^۱ در سال ۱۹۸۲ اهمیت ویژه ای یافته است. یکی از جدیدترین روش های برآورد واریانس شرطی، روش گارچ تحقق یافته به شمار میرود که به تازگی بوسیله هانسن^۲ (۲۰۱۲) معرفی شده است.

در مدل های گارچ استاندارد، به منظور پیش بینی واریانس شرطی روزانه سهام، تنها از داده های روزانه بازده سهام استفاده می شود. از آنجایی که اطلاعات به دست آمده از بازده روزانه در مقایسه با معیارهای متفاوتی که از بازده های درون روزی به دست می آید کمتر می باشد، مجموعه اطلاعاتی مدل های استاندارد گارچ محدود است. به علاوه از آنجایی که مدل های گارچ بر پایه میانگین متحرک با وزن کاهشی بنا شده است، این مدل ها برای واکنش به میزان تلاطم، کمی کند عمل می نمایند (اندرسون^۳ و دیگران ۲۰۰۳). بنابراین گرایشی برای وارد نمودن معیارهای تحقق یافته از واریانس در چارچوب مدل های گارچ به وجود آمد. انگل (۲۰۰۲) پیشنهاد وارد نمودن معیارهای واریانس تحقق یافته را به عنوان متغیر برونزا درون مدل های گارچ داد. از معایب این تصریح این است که موجب می شود دوره پیش بینی واریانس شرطی یک روزه با شد. اخیراً هانسن و دیگران (۲۰۱۲) مدلی با نام گارچ تحقق یافته ارائه دادند که چارچوبی واحد برای مدلسازی مشترک معیار تلاطم تحقق یافته و واریانس شرطی در نظر می گیرد.

مدل گارچ تحقق یافته چندین ویژگی مثبت دارد. با به کارگیری روش حداکثر راست نمایی، برآورد آن ساده است. می تواند دربرگیرنده یک ساختار ARMA هم برای واریانس شرطی و هم برای واریانس تحقق یافته باشد. جدای از این ویژگی ها، مشخص نیست که چرا مدل گارچ تحقق یافته باید دارای برتری در پیش بینی خارج از نمونه باشد.

1. Engle

2. Hansen

3. Andersen

بر اساس اصل امساک^۱، مدل‌های ساده‌تر معمولاً پیش‌بینی بهتری با فرض یکسانی اطلاعات نسبت به مدل‌های پیچیده ارائه می‌دهند. در مورد گارچ تحقق‌یافته می‌بایست گفت که یک مدل $AR(1)$ -Realized GARCH(1,1) دارای نه پارامتر بوده که باید برآورد شود. در هر صورت این مدل پیچیده‌تر از مدل گارچ معمولی با ۵ پارامتر است. در این مقاله با استفاده از داده‌های درون‌روزی شاخص بورس تهران، ضمن برآورد مدل گارچ تحقق‌یافته با ضریب فازی، این مدل را با مدل گارچ تحقق‌یافته و دیگر مدل‌های مرسوم گارچ از قبیل GARCH، EGARCH، GJR-GARCH مقایسه می‌نماییم. مقایسه به دو صورت خواهد بود. ابتدا میزان برآزش داده‌های درون‌نمونه را در نظر می‌گیریم. سپس دقت پیش‌بینی کنندگی واریانس شرطی برون‌نمونه‌ای را با استفاده از رویکرد پنجره غلطان و استفاده از یک تابع زیان برای انتخاب دقیق‌ترین مدل بررسی می‌نماییم. ادامه این مقاله به صورت ذیل می‌باشد. در بخش دوم پیش‌بینی نظری بررسی شده و سیر پیشرفت مدل‌ها را بیان می‌نماییم و سپس مروری بر مطالعات تجربی که بر مدل گارچ تحقق‌یافته صورت پذیرفته است را همراه با نتایج بازگو می‌کنیم. روش پژوهش و چگونگی مقایسه بین مدل‌ها در بخش سوم ارائه می‌شود. در بخش چهارم نیز مدل برآورد گشته و در نهایت در فصل پنج نتایج آن تشریح می‌گردد.

۲. مبانی نظری و پیشینه تجربی

امروزه مدل‌های گارچ کاربرد وسیعی در علم مالی دارد. به عنوان مثال در مورد ارزش گذاری اختیار معامله، از آخرین مطالعات انجام شده می‌توان به کارهای بدسکو^۲ و دیگران (۲۰۱۵) و هوانگ^۳ و دیگران (۲۰۱۷) اشاره نمود که در مطالعه دومی نشان داده شد که مدل گارچ تحقق‌یافته برای قیمت گذاری اختیار معامله شاخص S&P عملکرد مناسبتری از سایر مدل‌های ارزشگذاری دارد. در بحث بهینه سازی پورتنفو نیز پژوهش‌های رنکوویچ و دیگران^۴ (۲۰۱۶) و ساهامخادم^۵ و دیگران (۲۰۱۸) نمونه‌ای از پژوهش‌هایی هستند که مدل گارچ در آن برای بهینه سازی پورتنفو استفاده شده است.

1. Principle of parsimony

2. Badescu

3. Huang

4. Ranković

5. Sahamkhadam

برای توضیح نحوه پیدایش مدل های گارچ می بایست فرض ناهمسانی واریانس در رگرسیون خطی را نقض نمود. چنانچه این فرض نقض شود برآوردگرها همچنان بدون تورش بوده اما دیگر دارای حداقل واریانس نمی باشند. انگل (۱۹۸۲) نوع خاصی از واریانس ناهمسانی را معرفی می نماید که در آن واریانس جزء اخلاص تابعی از توان دوم جزء اخلاص می باشد. معرفی این نوع واریانس ناهمسانی، ابزار بسیار مهمی در اختیار اقتصاددانان و به خصوص محققان در حوزه اقتصاد سنجی مالی برای سنجش و برآورد واریانس شرطی یک سری به روش پارامتریک گذاشت. برای توضیح، یک مدل $AR(1)$ را همانند رابطه (۱) برای بازده دارایی در نظر گیرید.

$$r_t = \mu_0 + \mu_1 r_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1)$$

که در آن ε_t یک متغیر هم توزیع نابسته و دارای میانگین صفر می باشد. در این صورت ممکن است واریانس شرطی ε_t در طول زمان متغیر بوده و تابعی از شوک های دوره قبل باشد. این مدل ابتدا توسط انگل (۱۹۸۲) ارائه شد. دلیل ارائه چنین مدلی این بود که با اینکه مشاهده می شود ε_t ها از هم مستقل می باشند اما توان دوم آن ها با یکدیگر رابطه دارند. انگل رابطه زیر را برای واریانس شرطی ε_t پیشنهاد داد که برای p وقفه مدل زیر $ARCH(p)$ شناخته می شود.

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + a_p \varepsilon_{t-p}^2 \quad (2)$$

در مطالعات تجربی مشاهده شده است که مرتبه $ARCH$ بزرگ می باشد که منجر به ازدیاد تعداد پارامترهای تخمین می شود در نتیجه بولرسلو^۱ (۱۹۸۶) برای رفع این مشکل مدل زیر را پیشنهاد داد.

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q b_j \sigma_{t-j}^2 \quad (3)$$

که در آن a_i و b_j برای حصول اطمینان از اینکه واریانس مثبت با شد، مثبت فرض می شوند. این مدل به عنوان مدل $ARCH$ تعمیم یافته یعنی $GARCH(p, q)$ شناخته می شود که اگر q برابر با صفر باشد، این مدل همان $ARCH(p)$ خواهد شد. بر اساس مدل

^۱. Bollerslev

GARCH(1,1) واریانس شرطی ε_t یعنی σ_t^2 با توان دوم جزء اخلاخل در دوره قبل و واریانس دوره قبل رابطه دارد.

از آنجاکه در مدل GARCH، ε_t ها با توان دوم در معادله ظاهر می‌شوند، علامت این شوک‌ها تأثیری روی واریانس شرطی ندارد. این در حالی است که مشاهده شده شوک‌های منفی و یا اخبار بد، واریانس را بیشتر از شوک‌های خوب یا اخبار خوب افزایش می‌دهد. بدین منظور نلسون^۱ (۱۹۹۱) مدل گارچ نمایی یا همان EGARCH را معرفی نمود که به صورت رابطه زیر می‌باشد.

$$h_t = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i \frac{|\varepsilon_{t-i}| + \gamma_i \varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}} + \sum_{j=1}^q b_j h_{t-j} \quad (۴)$$

$$h_t = \ln \sigma_t^2$$

در این مدل وقتی ε_t مثبت است اثر کل شوک به اندازه $\varepsilon_t(1 + \gamma_t)$ می‌باشد و اگر اخبار بد وجود داشته باشد اثر کل شوک به اندازه قدر مطلق $\varepsilon_t(1 - \gamma_t)$ خواهد بود. اگر قرار باشد اخبار بد دارای واریانس بالاتری باشند انتظار داریم γ عدد منفی باشد. این مدل جدای از اینکه اثرات اخبار خوب و بد را در واریانس متفاوت در نظر می‌گیرد، این مزیت را نسبت به مدل GARCH دارا می‌باشد که بدون هیچ قیدی برای ضرایب، واریانس همواره مثبت خواهد بود. راه دیگری برای در نظر گرفتن اثر اخبار خوب و بد روی واریانس استفاده از متغیر مجازی به شکل رابطه زیر می‌باشد.

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \gamma_i S_{t-i} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q b_j \sigma_{t-j}^2 \quad (۵)$$

در رابطه (۵) S_{t-i} یک متغیر مجازی بوده که اگر ε_{t-i} مثبت باشد برابر با صفر و اگر منفی باشد برابر با یک خواهد بود. در این صورت اثر یک شوک مثبت برابر $a_i \varepsilon_{t-i}^2$ و اثر یک شوک منفی برابر $(a_i + \gamma_i) \varepsilon_{t-i}^2$ که با فرض تأثیر بیشتر اخبار بد روی واریانس، انتظار می‌رود γ_i مثبت باشد. این مدل که توسط گلوستن، جگاناتان و رانکل^۲ (۱۹۹۳) ارائه شد به مدل GJR شناخته می‌شود.

^۱. Nelson

^۲. Jagannathan & Runkle

پس از این مدل های اولیه، مدل ها و تصریح های زیادی برای مدلسازی نوسان شرطی معرفی شدند. برخی از پژوهشگران سعی در آوردن متغیر توضیحی دیگر به غیر از توان دوم شوک ها در مدل بودند که این مدل ها به GARCH-X معروف شدند. در سال ۲۰۰۳ انگل برای اولین بار از معیارهای تلاطم تحقق یافته برای توضیح واریانس شرطی استفاده نمود. این تلاش با آنکه یک بهبود در توضیح دهندگی مدل های GARCH بود، اما در تصریح مدل عملاً الگوی خاصی اضافه نشده بود. در واقع تلاطم تحقق یافته به صورت یک متغیر برونزا به مدل GARCH اضافه شده بود.

انگل و گالو (۲۰۰۶)^۱ اولین مدل کامل در این مورد را معرفی نمود. واژه کامل از این جهت که وی سعی نمود با در نظر گرفتن تلاطم های تحقق یافته به عنوان یک متغیر پنهان، این متغیرها را به صورت درونزا وارد مدلسازی نماید. این مدل به مدل خطای ضربی MEM^۲ معروف شد.

مدل دیگر در همین رابطه مدل HEAVY ارائه شده توسط شپارد و شفارد^۳ (۲۰۱۰) بوده که از بعد معادلات ریاضی حالتی برگرفته از مدل MEM می باشد. برخلاف مدل های GARCH سنتی این مدل ها بر مبنای فرآیندهای تلاطم پنهان چند متغیره عمل می نمایند. برای مثال در یک مدل MEM از سه فرآیند تلاطم پنهان استفاده می شود و در مدل HEAVY حداقل از دو فرآیند تلاطم پنهان استفاده می شود. در یکی از جدیدترین کارهای انجام گرفته در این زمینه هانسن و دیگران (۲۰۱۲) با وارد نمودن معادله سوم به یک مدل GARCH که در آن معادله سعی در مدلسازی تلاطم تحقق یافته به صورت همزمان و درونزا دارد، واریانس شرطی را تابعی از تلاطم تحقق یافته در نظر می گیرد. مدل معرفی شده توسط ایشان به فرم خطی به صورت رابطه زیر می باشد.

$$r_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t \quad (۶)$$

$$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \gamma x_{t-1} \quad (۷)$$

$$x_t = \xi + \phi h_t + \tau(\varepsilon_t) + u_t \quad (۸)$$

1. Engle and Gallo

2. Multiplicative Error Model

3. Shephard and Sheppard

که در آن بازده دارایی، x_t تلاطم تحقق‌یافته، h_t واریانس شرطی، $\varepsilon_t \sim iid(0,1)$ ، $u_t \sim iid(0, \sigma_t^2)$ و $\tau(\cdot)$ نیز تابع اهرم^۱ بوده که نحوه تأثیرپذیری تلاطم را از شوک بیان می‌کند. وجه تمایز مدل گارچ تحقق‌یافته و مدل گارچ در معادله سوم یعنی رابطه (۸) می‌باشد. این معادله به معادله سنجش^۲ نیز معروف است چرا که سنجه تحقق‌یافته مشاهده شده را به تلاطم پنهان مرتبط می‌سازد. در واقع با وجود معادله سوم در این چارچوب و با توجه به اینکه واریانس درون روزی اطلاعات بیشتری برای پیش‌بینی واریانس شرطی میسر می‌نماید، انتظار می‌رود عملکرد این مدل از مدل‌های گارچ معمول بالاتر باشد. همچنین در این تصریح خطی با لحاظ شرط $u=0$ و در نظر داشتن $\varepsilon_t^2 = \tau(\cdot)$ در معادله (۸) و جایگذاری در معادله (۷)، مدل به معادله مدل $GARCH(1,1)$ تبدیل می‌شود. بنابراین می‌توان گفت این تصریح از مدل گارچ نوع عمومی‌تری از مدل‌های گارچ بوده و با لحاظ قیدهایی همچنان می‌تواند به مدل‌های گارچ مرسوم تبدیل شود.

تلاطم تحقق‌یافته در این چارچوب از معاملات با فرکانس بالاتر به دست می‌آید. به‌عنوان مثال زمانی که مدل گارچ را به صورت روزانه برآورد می‌نماییم، تلاطم تحقق‌یافته از داده‌های معاملات روزانه به دست می‌آید. ساده‌ترین معیار تلاطم تحقق‌یافته، واریانس تحقق‌یافته می‌باشد که از مجموع مجذور بازده‌های درون روزی با فرکانس زمانی یکسان (به‌عنوان مثال ۵ دقیقه) به دست می‌آید؛ بنابراین اگر فرکانس زمانی داده‌ها را با Δ و مدت زمان باز بودن بازار را با I نمایش دهیم، آنگاه به اندازه $M = I/\Delta$ داده در یک روز خواهیم داشت. معیار واریانس تحقق‌یافته برای روز t به صورت ذیل محاسبه می‌شود:

$$RV_t = \sum_{i=1}^M r_{i,t}^2 \quad (9)$$

که در آن $r_{i,t}$ امین بازده در طول روز t را نمایش می‌دهد. یکی از ایرادات استفاده از روش فوق این است که اگر در یک فرکانس، بازده به شدت افزایش یابد و دیگر حتی در تمام مدت ثابت باشد، واریانس به شدت افزایش پیدا می‌کند؛ بنابراین این مدل به اصطلاح در برابر جهش‌ها استوار نیست. برناردوف-نیل سن^۳ و دیگران (۲۰۰۴) راه‌حل دیگری را

1. Leverage Function

2. Measurement Equation

3. Barndorff-Nielsen

پیشنهاد دادند که در مقابل جهش ها تا حدودی استوار است. این معیار به شرح ذیل می باشد:

$$BV_t(\Delta) = \mu^{-2} \frac{M}{(M-1)} \sum_{i=2}^M |r_{t,i}| |r_{t,i-1}| \quad (10)$$

که در آن $\mu = \sqrt{2/\pi} \cong 0.79788$ و $M = I/\Delta$ و Δ فاصله بین هر بازده درون روزی به عنوان مثال ۵ دقیقه ای و M تعداد داده ها در یک روز را نشان می دهد. در این مقاله از این دو معیار برای برآورد واریانس تحقق یافته استفاده می نماییم.

تصریح مدل رابطه (۶) تا (۸) که به مدل RGARCH معروف شده است، مورد استقبال پژوهشگران قرار گرفته و در سال های اخیر بر این مبنا مطالعاتی صورت گرفته است. تیان و هاموری^۱ (۲۰۱۵) با استفاده از این روش و روش های GARCH سنتی نوسانات نرخ بهره در بازار یورو-ین را مورد مطالعه قرار دادند. نتایج پژوهش آنان حاکی از آن بود که مدل RGARCH در پیش بینی واریانس شرطی عملکرد بهتری نسبت به مدل های گارچ سنتی دارد.

شارما و ویپول^۲ (۲۰۱۶) توانایی پیش بینی مدل RGARCH را برای ۱۶ شاخص سهام طی دوره ای ۱۴ ساله بررسی نمودند. نتایج حاکی از آن است که انتخاب معیار تصمیم برای عملکرد مدل ها، در نتایج تأثیرگذار است به نحوی که با هر معیار، مدل متفاوتی به عنوان مدل برتر انتخاب می شود.

در این مقاله قصد داریم عملکرد مدل گارچ تحقق یافته با ضریب فازی را در پیش بینی واریانس شرطی شاخص بورس تهران را در مقایسه با سایر مدل های خانواده گارچ بررسی نماییم. نحوه مدلسازی و چگونگی انجام این مقایسه در بخش بعد تشریح گشته است.

۳. روش تحقیق

۳-۱. تصریح مدل

در این بخش مدل را تصریح می نماییم. در مدل های گارچ یک معادله میانگین وجود دارد که این معادله در این مقاله به صورت معادله زیر در نظر گرفته می شود.

^۱. Tian and Hamori

^۲. Sharma and Vipul

$$r_t = \mu_0 + \varepsilon_t \quad (11)$$

که در آن بازده روزانه دارایی مالی است. این تصریح مدل موجب می‌شود که فرض نماییم بازده مقداری ثابت، به همراه شوک مربوط به آن روز می‌باشد. همچنین برای برآورد مدل‌های گارچ سنتی معادلات (۳) تا (۵) را با یک وقفه در شوک و واریانس شرطی به صورت مدل‌های زیر برآورد می‌نماییم.

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2 \quad \text{GARCH}(1,1)$$

$$h_t = a_0 + a_1 \frac{|\varepsilon_{t-1}| + \gamma \varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + b_1 h_{t-1}, \quad h_t = \ln \sigma_t^2 \quad \text{EGARCH}(1,1)$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma S_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2 \quad \text{GJR-GARCH}(1,1)$$

برای برآورد مدل گارچ تحقق‌یافته از فرم لگاریتمی آن استفاده می‌نماییم که معادلات واریانس درون روزی و واریانس شرطی به نحو ذیل تصریح می‌گردد.

$$\begin{aligned} h_t &= \omega + \beta h_{t-1} + \eta x_{t-1}, \quad h_t = \ln \sigma_t^2 \\ x_t &= \xi + \phi h_t + \tau(\varepsilon_t) + u_t \\ \tau(\varepsilon_t) &= \lambda_1 \varepsilon_t + \lambda_2 (\varepsilon_t^2 - 1) \end{aligned} \quad \text{R-GARCH}$$

که در آن x_t لگاریتم واریانس تحقق‌یافته و همچنین h_t فرم لگاریتمی واریانس شرطی دوره t می‌باشد.

در این مقاله، منظور از مدل گارچ تحقق‌یافته فازی مدلی است که یک ضریب فازی به مدل معادله گارچ اضافه شده است تا ضمن برآورد اثرات نامتقارن شوک، برای اندازه شوک نیز وزن متفاوتی در نظر گرفته شود. مدل‌سازی ضریب فازی می‌تواند برای هر تابع تعریف شده‌ای بین صفر و یک بسته به نوع کاربرد تعریف شود. به عنوان مثال ابونوری و شهریار (۱۳۹۲) بجای کاربرد متغیر مجازی کلاسیک (دو دوای با دامنه صفر و یک) پیشنهاد کاربرد متغیر مجازی به صورت فازی را با معرفی یک تابع عضویت معرفی نمودند. آن‌ها نشان دادند که کاربرد متغیر مجازی فازی بجای متغیر مجازی کلاسیک همواره منجر به دقت بیشتر در پیش‌بینی خواهد شد. معرفی متغیر فازی بعنوان ضریب

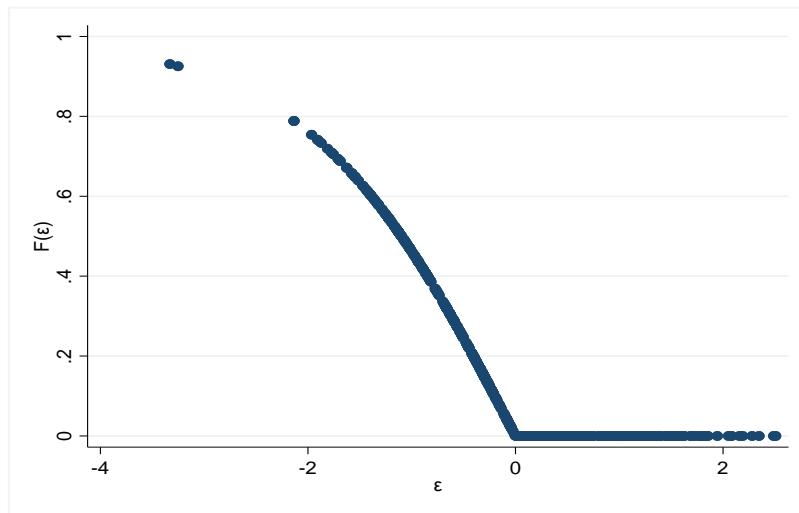
متغیر باید نسبت به میزان شوک یکنوا بوده و برخلاف متغیر فازی معرفی شده بوسیله ابونوری و شهریار (۱۳۹۲) تابعی از زمان نباشد. برای مدل گارچ تحقق یافته با ضریب فازی به جای معادله واریانس شرطی در مدل RGARCH معادله ذیل را معرفی می نماییم.

$$h_t = \omega + \eta \ln(x_{t-1}) + \beta h_{t-1} + \alpha_0 \ln(\varepsilon_{t-1}^2) + \alpha_1 F(\varepsilon_{t-1}) \ln(\varepsilon_{t-1}^2) \quad , h_t = \ln \sigma_t^2$$

$$F(\varepsilon_{t-1}) = I(\varepsilon_{t-1} < 0) \left(\frac{2}{1 + \exp(\varepsilon_{t-1})} - 1 \right) \quad \text{FAGARCH}$$

تابع $F(\varepsilon_{t-1})$ در رابطه فوق تابعی است که به ازای مقادیر مثبت ε_{t-1} عدد صفر و به ازای مقادیر منفی ε_{t-1} عددی بین صفر و یک اختصاص می دهد. در شکل (۱) تابع $F(\varepsilon_{t-1})$ برای مقادیر شبیه سازی شده ε_{t-1} رسم شده است. با این تصریح اندازه شوک نیز در تاثیر نامتقارن آن بر واریانس تاثیر دارد به نحوی که هرچه شوک منفی بزرگتر باشد، واریانس شرطی بیشتر افزایش پیدا می نماید.

شکل ۱. تابع $F(\varepsilon_{t-1})$ برای مقادیر مختلف ε_{t-1}



منبع: بر اساس نتایج حاصل از برآورد رسم شده است.

مدل های گارچ سنتی را به روش حداکثر راست نمایی برآزش می نماییم. برای مدل گارچ تحقق یافته با فرض استقلال ε_t و u_t معادلات فوق را تواما با روش حداکثر راست نمایی به صورت معادلات ذیل برآزش مینماییم.

$$\log L(\{r_t, x_t\}_{t=1}^n; \theta) = \sum_{t=1}^n \log f(r_t, x_t | \Phi_{t-1}) \quad (12)$$

$$f(r_t, x_t | \Phi_{t-1}) = f(r_t | \Phi_{t-1})f(x_t | \Phi_{t-1}) \quad (13)$$

نکته حایز اهمیت در این مقاله آن است که بجای x از دو معیار RV و BV معرفی شده در معادلات (۹) و (۱۰) استفاده می‌نماییم. در این صورت مدل گارچ تحقق یافته و مدل گارچ تحقق یافته با ضریب فازی در این مدل با استفاده از دو معیار تلاطم تحقق یافته درون روزی محاسبه می‌گردد. در نام‌نویسی نیز در ادامه برای زمانی که از تلاطم تحقق یافته RV استفاده می‌نماییم اول اسم این دو مدل به جای R ، حرف RV نوشته و چنانچه از تلاطم تحقق یافته BV استفاده می‌نماییم اول اسم این دو مدل به جای R ، حرف BV نوشته شده است.

۳-۱-۱. ارزیابی مدل

یک مدل قابل اعتماد علاوه بر اینکه باید به‌خوبی بر داده‌ها برآزش شود، باید از دقت پیش‌بینی‌کنندگی مناسبی نیز برخوردار باشد. به همین جهت در این پژوهش با دو معیار مدل‌ها را ارزیابی می‌نماییم:

- ارزیابی درون نمونه با استفاده از مقدار تابع درست‌نمایی برای معیار خوبی برآزش

- ارزیابی برون نمونه با معیارهایی مانند MSE و $QLIKE$ برای دقت پیش‌بینی واریانس شرطی

۳-۱-۲. ارزیابی برآزش مدل داده‌های درون نمونه

از آنجاکه برای برآورد مدل مورد از روش حداکثر راست‌نمایی استفاده می‌شود، برای بررسی معیار خوبی برآزش میتوان از مقدار تابع حداکثر راست‌نمایی در نقطه بهینه استفاده نمود. چنانچه در مدلی تابع حداکثر راست‌نمایی بیشتر باشد، آن مدل نسبت به مدل پایه داده‌های درون نمونه را بهتر برآزش داده است. در نظر داشته با شید در مدل گارچ تحقق یافته از آنجاکه تابع حداکثر راست‌نمایی یک معادله اضافه را در برمی‌گیرد، با مدل‌های سنتی گارچ قابل مقایسه نمی‌باشد. هانسن (۲۰۱۲) تابع حداکثر راست‌نمایی جزئی را برای مقایسه با سایر مدل‌های گارچ پیشنهاد داد. این تابع با استفاده از روابط (۱۲) و (۱۳) به صورت رابطه زیر نوشته می‌شود.

$$l(r, x) = \underbrace{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\log(2\pi) + \log(h_i) + r_i^2 / h_i]}_{=l(r)} + \underbrace{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\log(2\pi) + \log(\sigma_u^2) + u_i^2 / \sigma_u^2]}_{=l(x|r)} \quad (14)$$

که در آن تابع لگاریتم راست‌نمایی موردنظر بوده که قابل مقایسه با سایر مدل‌های گارچ سنتی می‌باشد. بنابراین بعد از برآورد مدل‌ها چنانچه قسمت اول رابطه (۱۴) یعنی مقدار تابع حداکثر راست‌نمایی جزئی در مدل گارچ تحقق یافته بیشتر از مقدار تابع حداکثر راست‌نمایی در سایر مدل‌های گارچ باشد می‌توان نتیجه گرفت که مدل گارچ تحقق یافته به نحو بهتری بر روی داده‌های نمونه مورد بررسی برآزش یافته است و این مدل عملکرد بهتری در برآزش درون نمونه‌ای دارد.

۳-۱-۳. ارزیابی دقت پیش‌بینی

برای بررسی دقت پیش‌بینی کنندگی مدل ما به داده‌های برون نمونه‌ای احتیاج داریم. استفاده از تکنیک پنجره غلتان این ابزار را در اختیار ما قرار می‌دهد. در این روش از تکنیک پنجره غلتان برای انتخاب نمونه پیش‌بینی استفاده می‌شود. پنجره غلتان به این صورت است که تعدادی ثابت از مشاهدات را برای نمونه مدلسازی انتخاب نموده که به آن طول پنجره گویند. سپس از اولین مشاهده به تعداد طول پنجره مشاهده مدل برآورد گشته و واریانس را برای روز بعد خارج از پنجره محاسبه نموده و با مقدار واقعی مقایسه می‌نماییم. سپس مشاهدات را یکی به جلو برده و تا آخر مشاهدات همین عمل را تکرار می‌نماییم. با استفاده از توابع زیانی نظیر MSE و QLIKE عملکرد مدل‌ها مقایسه می‌شود. از آنجاکه متغیر تلاطم واقعی پنهان است، از معیارهای تلاطم روزانه درون روزی به‌عنوان پروکسی استفاده می‌شود. پاتون^۱ (۲۰۱۱) نشان داد که تنها دو تابع زیان MSE و QLIKE در بین ۹ تابع زیانی که به‌صورت گسترده استفاده می‌شود، در صورت وجود خطای انتخاب پروکسی استوار هستند؛ بنابراین در این پژوهش می‌توان از یکی از این دو تابع زیان استفاده نمود. این دو تابع زیان به‌صورت رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$MSE = E(I_{1,k,t}) \quad , \quad I_{1,k,t} = (\sigma_t^2 - \hat{\sigma}_t^2)^2 \quad (15)$$

$$QLIKE = E(I_{2,k,t}) \quad , \quad I_{2,k,t} = \log(\hat{\sigma}_t^2) + \frac{\sigma_t^2}{\hat{\sigma}_t^2} \quad (16)$$

¹. Patton

برای برآوردی از σ_t^2 میتوان از معیارهای واریانس تحقق‌یافته استفاده نمود؛ اما از آنجاکه معاملات در تمامی طول روز انجام نمی‌شود، در صورت مقایسه واریانس تحقق‌یافته با واریانس شرطی روزانه، بخشی از آن دیده نمی‌شود. در واقع واریانس روزانه ضریبی از واریانس تحقق‌یافته درون‌روزی در زمان معاملات می‌باشد؛ یعنی $\sigma_t^2 = c \times RV$ که در آن c به صورت زیر برآورد می‌گردد (هانسن و لاند ۲۰۰۵).

$$\sigma_t^2 = \hat{c} \cdot RV_t, \quad \hat{c} = \frac{n^{-1} \sum_{t=1}^n (r_t - \hat{\mu}_t)^2}{n^{-1} \sum_{t=1}^n RV_t} \quad (17)$$

که در رابطه بالا n تعداد روزها و $\hat{\mu}_t$ میانگین بازده روزانه در n روز می‌باشد. هر مدلی که در آن مقدار زیان توسط دو تابع زیان MSE و QLIKE کمتر باشد، دقت بالاتری در پیشبینی واریانس شرطی برون نمونه‌ای نسبت به سایر مدل‌های مورد بررسی دارد.

۴. برآورد و مقایسه مدل‌ها

در این پژوهش، از داده‌های درون‌روزی شاخص بورس تهران در فاصله زمانی آبان سال ۱۳۸۸ تا مهر ۱۳۹۵ استفاده شد. سپس مدل‌های GARCH، EGARCH و GJR-GARCH با استفاده از داده‌های روزانه فاصله یک‌روزه بسته شدن قیمت برآورد شد. همچنین مدل R-GARCH و R-FAGARCH با استفاده از دو معیار معرفی‌شده رابطه (۹) و (۱۰) برای تلاطم تحقق‌یافته برآورد گشت. معادله میانگین برای مدل‌های فوق یک مدل با میانگین ثابت در نظر گرفته شد. در جدول (۱) آمار توصیفی شاخص بورس تهران به همراه بازده روزانه آن به تصویر کشیده شده است.

جدول ۱. آمار توصیفی شاخص بورس تهران و بازده روزانه آن

متغیر	کمینه	صدک پنجم	میانه	میانگین	صدک نود و پنجم	بیشینه	انحراف معیار	کشیدگی	چولگی
شاخص بورس تهران	۷۹۵۶	۸۹۵۹	۲۶۹۶۷	۴۰۵۷۸	۷۸۸۸۸	۸۹۵۰۰	۲۵۴۷۲	۱/۵۱۷۰	۰/۳۱۸۵
بازده شاخص	-۰/۰۵۵	-۰/۰۱	-۰/۰۰۰۵	-۰/۰۰۱۳	-۰/۰۱۴۲	-۰/۰۵۴۰	-۰/۰۰۷۵	۴/۱۳۸۰	۰/۳۶۸۱

در جدول (۲) مقدار برآورد برای ضرایب به نمایش درآمده است. ضرایبی که با فونت پررنگ نمایش داده شده اند، در سطح ۵٪ معنادار می باشند. قابل مشاهده است که تمامی ضرایب به غیر از عرض از مبدا مدل های گارچ سنتی در سطح ۵٪ معنادار می باشد. همچنین باتوجه به اینکه ضرایب فازی در مدل گارچ تحقق یافته با ضریب فازی یعنی α_2 مثبت و معنادار می باشد، دلالت بر این دارد که هرچه شوک منفی بیشتر باشد، تاثیر شوک منفی بر واریانس بیشتر می شود. این ضریب تفاوت بین مدل گارچ تحقق یافته هانسن و مدل گارچ تحقق یافته فازی می باشد که در بورس تهران معنادار شده است. این ضریب بر این دلالت دارد که در زمان ریزش بازار، در دامنه شوک های کوچک اثر یک واحد افزایش در شوک بر واریانس کمتر است از هنگامیکه بازار در دامنه شوکهای بزرگ قرار دارد.

جدول ۲. نتایج برآورد مدل ها با تمام مشاهدات

BV-FAGARCH	RV-FAGARCH	BV-GARCH	RV-GARCH	GJR-GARCH	EGARCH	GARCH	ضریب
۰/۱۰۴	۰/۱۰۴	۰/۰۴۹	۰/۰۴۹	۰/۰۰۳	۰/۰۱۵	-۰/۰۰۶	μ_0
				۰/۰۵۲	-۰/۵۱۱	۰/۰۵۳	a_0
				۰/۴۱۳	۰/۵۳۷	۰/۳۶۷	a_1
				۰/۶۲۰	۰/۸۴۸	۰/۶۱۰	b_1
				-۰/۱۴۷	۰/۰۹۸		γ
۱/۲۳۵	۰/۸۹۹	۱/۴۷۳	۱/۰۳۹				ω
۰/۱۶۷	۰/۱۲۸	۰/۲۰۰	۰/۱۵۱				η
۰/۶۷۶	۰/۷۲۴	۰/۶۶۰	۰/۷۳۱				β
۰/۰۰۹	۰/۰۱۶						α_1
۰/۲۴۳	۰/۳۱۷						α_2
-۷/۵۶۱	-۷/۰۹۱	-۷/۵۹۷	-۷/۱۱۹				ξ
۱/۱۵۴	۱/۲۱۲	۱/۱۱۷	۱/۲۱۸				φ
۰/۲۱۶	۰/۳۴۱	۰/۱۷۲	۰/۲۹۸				λ_1
۰/۴۰۳	۰/۳۹۰	۰/۴۰۶	۰/۳۹۸				λ_2

منبع: برآورد مدل ها با نوشتن برنامه در نرم افزار ایویوز انجام شده است.

در جدول (۳) مقدار لگاریتم راست نمایی و رتبه مدل ها با توجه به برازش درون نمونه به تصویر کشیده شده است که برای مدل های گارچ تحقق یافته، مقدار تابع حداکثر راست نمایی جزئی در نظر گرفته شده است. با استفاده از این معیار مدل RV-FAGARCH و BV-FAGARCH به ترتیب جایگاه اول و دوم را از لحاظ برازش

درون نمونه‌ای دارند و مدل‌های گارچ تحقق یافته در رتبه‌های بعد و بالاتر از مدل‌های گارچ سنتی جای دارند. بنابراین مدل‌های گارچ تحقق یافته با عملکرد فازی برای داده‌های درون نمونه عملکرد بهتری داشته است.

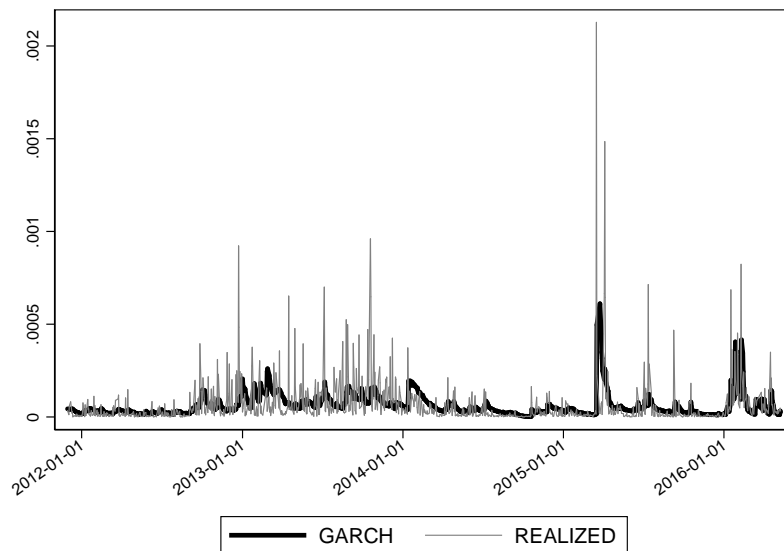
جدول ۳. مقدار لگاریتم راست نمایی و رتبه مدل‌ها با توجه به برازش درون نمونه

رتبه	مقدار لگاریتم تابع راست نمایی	مدل	ردیف
۷	-۱۶۵۸/۶۸	GARCH	۱
۵	-۱۶۳۷/۷۲	EGARCH	۲
۶	-۱۶۵۴/۱۹	GJR-GARCH	۳
۳	-۱۶۳۶/۵۹	RV-GARCH	۴
۴	-۱۶۳۶/۷۹	BV-GARCH	۵
۱	-۱۶۳۵/۵۷	RV-FAGARCH	۶
۲	-۱۶۳۵/۵۷	BV-FAGARCH	۷

منبع: برآورد مدل‌ها با نوشتن برنامه در نرم افزار ایویوز انجام شده است.

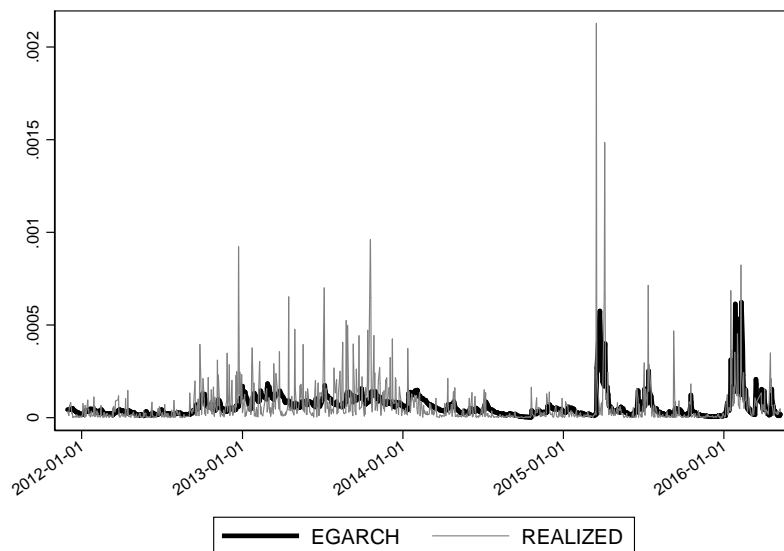
برای بررسی عملکرد مدل برای پیش‌بینی واریانس برون نمونه از تکنیک پنجره غلتان استفاده نمودیم. به این نحو که با استفاده از داده‌های ۵۰۰ روز اخیر واریانس دوره بعد را پیش‌بینی نموده و با واریانس تحقق یافته روز بعد مورد مقایسه قرار می‌دهیم. سپس پنجره را یک مشاهده به جلو برده و همین عمل را تکرار می‌نماییم. در نمودارهای (۲) تا (۸) واریانس شرطی برآورد شده از مدل‌های گارچ و واریانس تحقق یافته از رابطه (۱۷) در کنار هم قابل مشاهده است. چون در تصاویر مقدار واریانس شرطی و واریانس تحقق یافته به طور نسبی همجهت با هم حرکت میکنند میتوان انتظار داشت مدل‌های گارچ عملکرد مناسبی برای پیش‌بینی تلاطم دارند. با این حال برای اندازه‌گیری دقت پیش‌بینی هر کدام از مدل‌های گارچ و انتخاب بهترین مدل برای پیش‌بینی تلاطم می‌بایست از معیارهای معرفی شده در بخش قبل استفاده نماییم. این معیارها در واقع میزان انحراف واریانس شرطی پیش‌بینی شده از مدل‌های گارچ را با واریانس تحقق یافته به عنوان مرجعی برای تلاطم اندازه‌گیری نموده و هرچه این انحراف کمتر باشد، مدل مورد نظر از دقت بالاتری در پیش‌بینی واریانس برون نمونه برخوردار است.

نمودار ۲. سری زمانی واریانس برآورد شده از روش گارچ در مقایسه با واریانس تحقق یافته



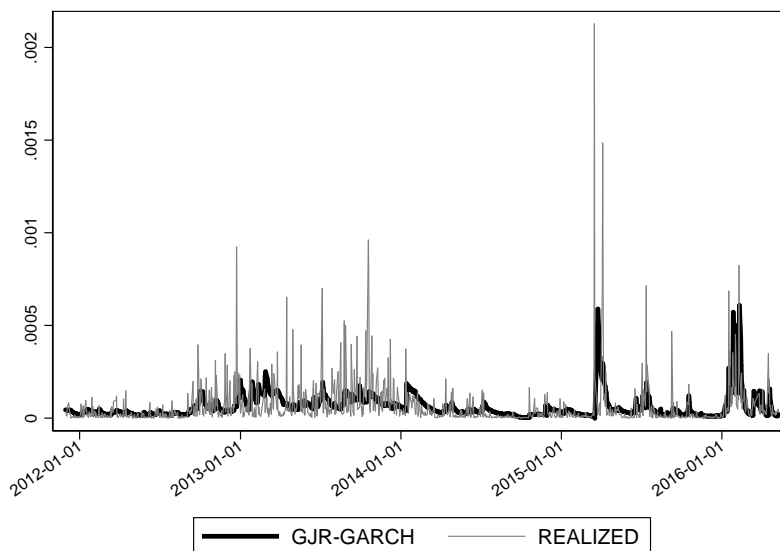
منبع: برآورد مدل ها با نوشتن برنامه در نرم افزار ایویوز انجام شده است.

نمودار ۳. سری زمانی واریانس برآورد شده از روش گارچ نمایی در مقایسه با واریانس تحقق یافته



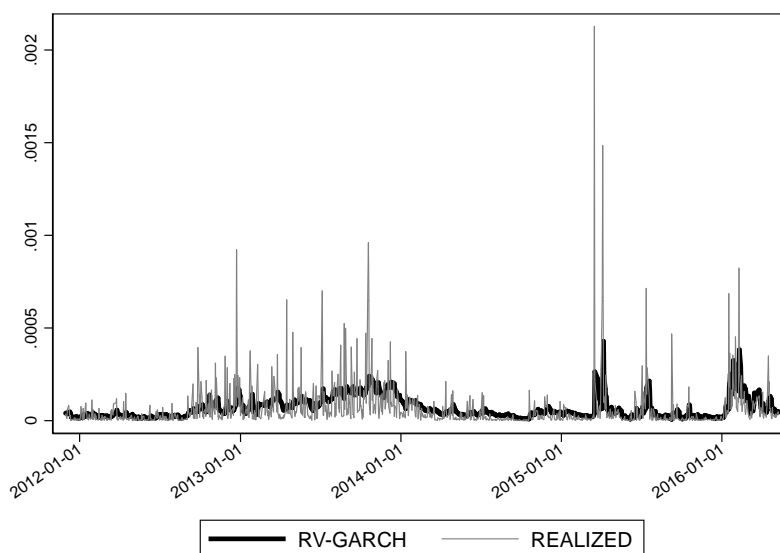
منبع: برآورد مدل ها با نوشتن برنامه در نرم افزار ایویوز انجام شده است.

نمودار ۴. سری زمانی واریانس برآورد شده از روش گارچ جی‌جی‌آر در مقایسه با واریانس تحقق یافته



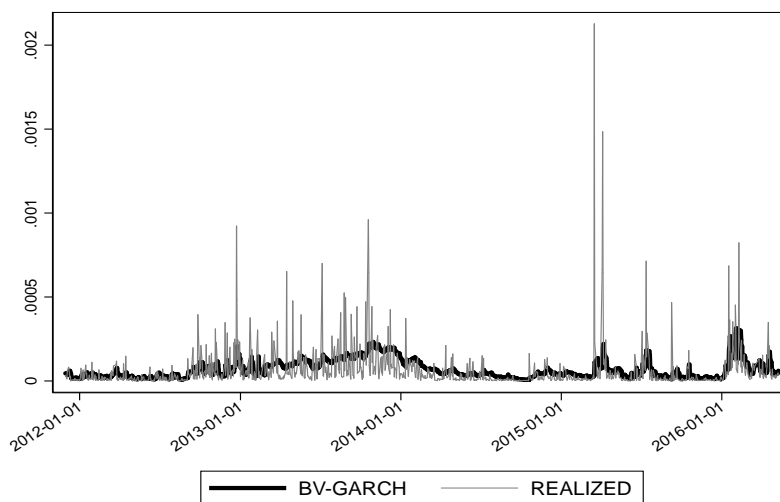
منبع: برآورد مدل‌ها با نوشتن برنامه در نرم افزار ایویوز انجام شده است.

نمودار ۵. واریانس برآورد شده از گارچ تحقق یافته با واریانس RV در مقایسه با واریانس تحقق یافته



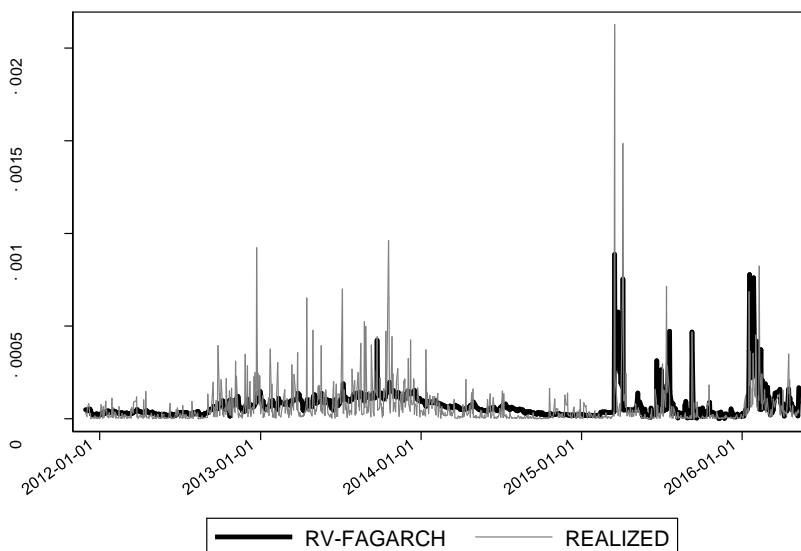
منبع: برآورد مدل‌ها با نوشتن برنامه در نرم افزار ایویوز انجام شده است.

نمودار ۶. واریانس برآورد شده از گارچ تحقق یافته با واریانس **BV** در مقایسه با واریانس تحقق یافته



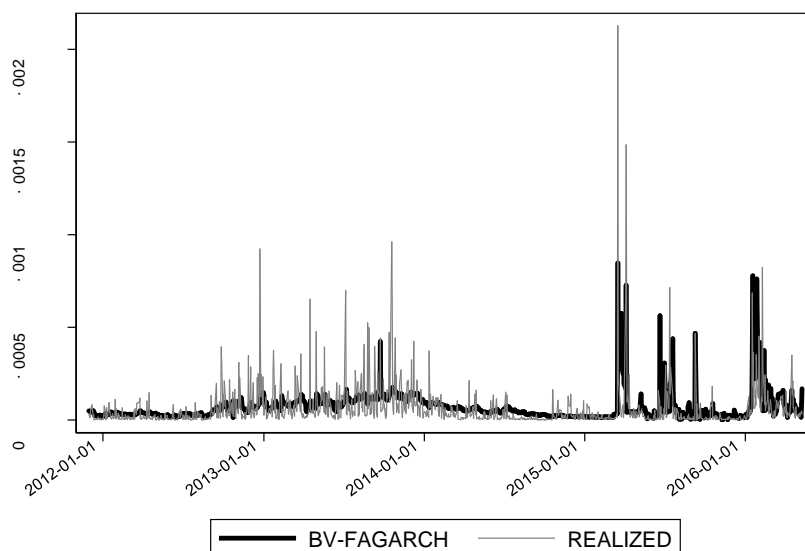
منبع: برآورد مدل ها با نوشتن برنامه در نرم افزار ایویوز انجام شده است.

نمودار ۷. واریانس گارچ تحقق یافته ضریب فازی با واریانس **RV** در مقایسه با واریانس تحقق یافته



منبع: برآورد مدل ها با نوشتن برنامه در نرم افزار ایویوز انجام شده است.

نمودار ۸. واریانس گارچ تحقق‌یافته ضریب فازی با واریانس BV در مقایسه با واریانس تحقق‌یافته



منبع: برآورد مدل‌ها با نوشتن برنامه در نرم افزار ایویوز انجام شده است.

در جدول (۴) نتایج به‌دست‌آمده از دو تابع زیان رابطه (۱۵) و (۱۶) به نمایش در آمده است. از آنجا که این مقادیر میزان انحراف پیش‌بینی از واقعیت را اندازه‌گیری می‌نماید، هر مدلی که مقادیر توابع زیان برای آن کمترین مقدار باشد، عملکرد بالاتری در پیش‌بینی واقعیت داشته است. مشاهده می‌شود در هر دو این توابع زیان مدل گارچ تحقق‌یافته بهترین عملکرد را داشته است. مشاهده می‌شود که با استفاده از دو تابع زیان QLIKE و MSE مدل RV-FAGARCH و مدل BV-FAGARCH به ترتیب رتبه‌های اول و دوم را دارند. بدین ترتیب می‌توان گفت مدل گارچ تحقق‌یافته با ضریب فازی از عملکرد بهتر در مقایسه با مدل گارچ تحقق‌یافته هانسن برای مدل‌سازی شاخص بورس تهران برخوردار می‌باشد.

جدول ۴. عملکرد مدل‌ها با استفاده از برآورد برون نمونه‌ای

رتبه MSE	معیار MSE (*1000)	رتبه Qlike	معیار Qlike	MODEL
۷	۰/۰۱۶۵۱	۶	-۳۳۰۴/۷۹۱	GARCH
۵	۰/۰۱۵۶۸	۵	-۳۳۱۹/۴۷۹	EGARCH
۶	۰/۰۱۶۴۳	۷	-۳۲۶۶/۴۹۴	GJR-GARCH

۳	۰/۰۱۵۵۶	۴	-۳۴۷۷/۳۰۹	RV-GARCH
۴	۰/۰۱۵۶۱	۳	-۳۴۹۸/۷۴۶	BV-GARCH
۱	۰/۰۱۰۰۴	۱	-۳۵۳۷/۰۶۹	RV-FAGARCH
۲	۰/۰۱۰۶۵	۲	-۳۵۲۳/۴۰۰	BV-FAGARCH

منبع: برآورد مدل ها با نوشتن برنامه در نرم افزار ایویوز انجام شده است.

مشاهده نمودیم که مدل گارچ تحقق یافته با ضریب فازی هم در برآزش درون نمونه‌ای و هم در پیش‌بینی برون نمونه‌ای واریانس شرطی (تلاطم) از بالاترین عملکرد برخوردار بوده است. از آنجا که پیش‌بینی نادرست از ریسک دارایی‌های مالی، چه در بیش برآورد ریسک و چه در کم برآورد ریسک، برای سرمایه گذار هزینه در بر دارد، استفاده از گارچ تحقق یافته می‌تواند این هزینه را به حداقل رساند.

۵. نتیجه‌گیری و بحث

در این مقاله واریانس شرطی با استفاده از داده‌های درون روزانه ای شاخص بورس تهران در فاصله زمانی آبان سال ۱۳۸۸ تا مهر ۱۳۹۵ بوسیله روش های GARCH، EGARCH و GJR-GARCH و همچنین مدل R-GARCH با استفاده از دو معیار RV و BV برآورد شده است. نتایج نشان داده است که مدل گارچ تحقق یافته با ضریب فازی R-FAGARCH معرفی شده در این مقاله از خوبی برآزش بیشتر در مقایسه با سایر مدل ها برخوردار است. برای ارزیابی خوبی برآزش از مقدار تابع راستنمایی و برای توان پیش‌بینی مدل برای واریانس شرطی از روش پنجره غلتان و استفاده از دو تابع زیان MSE و QLIKE استفاده شده است. با توجه به نتایج میتوان دریافت که مدل های گارچ تحقق یافته با ضریب فازی از عملکرد بهتری برخوردارند.

در نتیجه، بر اساس داده های بورس اوراق بهادار تهران مشاهده نمودیم که مدل های گارچ تحقق یافته با ضریب فازی در برآزش درون نمونه‌ای بهترین عملکرد را داشته و همچنین در پیش‌بینی برون نمونه‌ای نیز از دقت بالاتری در پیش‌بینی واریانس شرطی به عنوان معیاری از تلاطم برخوردار است. بنابراین، میتوان پیشنهاد نمود تا برای برآورد واریانس شرطی به عنوان جانشینی از تلاطم در بازارهای مالی در مدیریت ریسک، از مدل های گارچ تحقق یافته با ضریب فازی به جای مدل های گارچ مرسوم استفاده گردد.

فهرست منابع:

- ابونوری، اسمعیل و بهنام، شهریار (۱۳۹۲)، مدل‌سازی ناخطی شکست‌های ساختاری تابع تقاضای پول در ایران با نگرش فازی، *مجله پژوهش‌های اقتصادی*، ۱۳(۴): ۷۸-۵۵.
- Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X. & Labys, P. (2003), Modeling and Forecasting Realized Volatility, *Econometrica*, 71 (2): 579-625.
- Badescu, A., Elliott, R. J. & Ortega, J. P. (2015), Non-Gaussian GARCH option pricing models and their diffusion limits, *European journal of operational research*, 247(3): 820-830.
- Barndorff-Nielsen, O. E., & Shephard, N. (2004), Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps, *Journal of financial econometrics*, 2(1): 1-37.
- Bollerslev, T. (1986), Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31(3): 307-327.
- Engle, R. (2002), New Frontiers for Arch Models, *Journal of Applied Econometrics*, 17 (5): 425-446.
- Engle, R. F. (1982), Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, 50 (4): 987-1007.
- Engle, R. F. & Gallo, G. M. (2006), A multiple indicators model for volatility using intra-daily data, *Journal of Econometrics*, 131(1-2): 3-27.
- Glosten, L. R., Jagannathan, R. & Runkle, D. E. (1993), On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks, *Journal of Finance*, 48 (5): 1779-1801.
- Hansen, P. R. & Lunde, A. (2005), A forecast comparison of volatility models: does anything beat a GARCH(1,1)?, *Journal of Applied Econometrics*, 20 (7): 873-889.
- Hansen, P. R., Huang, Z. & Shek, H. H. (2012), Realized GARCH: a joint model for returns and realized measures of volatility, *Journal of Applied Econometrics*, 27(6): 877-906.
- Huang, Z., Wang, T. & Hansen, P. R. (2017), Option Pricing with the Realized GARCH Model: An Analytical Approximation Approach, *Journal of Futures Markets*, 37(4): 328-358.
- Knight, F. (2013), *Risk, uncertainty and profit*, Wilmington: Vernon Press.
- Nelson, D. B. (1991), Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A Nee Approach, *Econometrica*, 59 (2): 347-370.
- Patton, A. J. (2011), Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies, *Journal of Econometrics*, 160 (1): 246-256.

Ranković, V., Drenovak, M., Urosevic, B. & Jelic, R. (2016), Mean-univariate GARCH VaR portfolio optimization: Actual portfolio approach, *Computers & Operations Research*, 72: 83-92.

Sahamkhadam, M., Stephan, A. & Östermark, R. (2018), Portfolio optimization based on GARCH-EVT-Copula forecasting models, *International Journal of Forecasting*, 34(3): 497-506.

Sharma, P. (2016), Forecasting stock market volatility using Realized GARCH model: International evidence, *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 59: 222-230.

Shephard, N. & Sheppard, K. (2010), Realising the future: forecasting with high-frequency-based volatility (HEAVY) models, *Journal of Applied Econometrics*, 25 (2): 197-231.

Tian, S. & Hamori, S. (2015), Modeling interest rate volatility: A Realized GARCH approach, *Journal of Banking and Finance*, 61: 158-171.