

## تأثیر آب روی عرشه بر دوشاخگی رول شناورها تحت موج های تصادفی

علیرضا اصنافی<sup>۱\*</sup>

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۰۸/۰۶ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۱۰/۲۴	پایداری حرکت رول شناورها به دلیل تأثیرهای بزرگی که بر روی ایمنی، راحتی سفر، عملکرد کلی و واژگونی احتمالی سیستم دارد، از اهمیت خاصی برخوردار است. مطالعه این حرکت و بررسی پایداری دینامیکی آن که دارای معادلات غیرخطی و بسیار حساس به شرایط جوی، بارهای نامتقارن و وجود آب بر روی عرشه شناور است، از اهمیت ویژه ای برخوردار است. در این تحقیق تلاش شده است تا پایداری این حرکت در شرایط ذکر شده و تحت موجهای تصادفی نوبز سفید بصورت کاملاً تحلیلی مطالعه شود. به این منظور تابع چگالی احتمال پاسخ با بکارگیری روش فوکر پلانک کولموگروف و حل ایستای معادله دیفرانسیل پاره‌ای متناظر بصورت تحلیلی بدست آمد و سپس تأثیر وجود آب بر روی شناور، ممان واژگون کننده ناشی از بار نامتقارن یا باد عرضی، مقدار میرایی و شدت ممان تصادفی بر پایداری بررسی شد. روابط بصورت بدون بعد استخراج شد تا امکان اعمال آن بر طیف وسیعی از شناورها وجود داشته باشد. نتایج بدست آمده، همان طور که انتظار میرفت، از تغییر ماهوی و دوشاخگی رفتار در حالت وجود آب بر روی عرشه حکایت دارد. وضعیت پایداری ۳ گونه از شناورها بررسی و مشخص شد که در حالت وجود آب بر روی عرشه، ناپایداری کاملاً متأثر از گونه شناور است.
<b>واژگان کلیدی:</b> پایداری دینامیکی شناورها، پایداری رول، معادله FPK، دوشاخگی رفتار، آنالیز تصادفی.	

### ۱- مقدمه

بررسی حرکت غلتش (رول) شناورها و کشتی‌ها به دلیل تأثیراتی که بر مواردی همچون عملکرد، ایمنی و واژگونی شناور دارد، موضوع بسیاری از تحقیقات در این زمینه بوده است. در واقع پایداری و معقول بودن رفتار این جهت حرکتی، بدلیل تأثیر فراوانی که بر رفتار بقیه جهات حرکتی، راحتی سفر، عدم دریازدگی، اطمینان از ایمنی و سلامت مسافران و کالاهای موجود در شناورها یا کشتی‌ها دارد از اهمیت فراوانی برخوردار است. اصلی ترین رویکرد در این زمینه بر مبنای مطالعه پایداری با توجه به مقدار متاسترنی و بازوی بازگرداننده از وضعیت قائم است که منتهی به بررسی منحنی  $GZ$  بر حسب زاویه انحراف رول

است. در این حالت تنها نیروهای هیدرواستاتیک در محاسبات نقش اساسی دارند بعنوان مثال به مرجع زیر توجه بفرمایید [۱]. هر چند بررسی منحنی  $GZ$  در تمامی مطالعات مرتبط با پایداری نقش اساسی خود را دارد اما عواملی همچون ممانهای میراکننده، تصادفی بودن موجهای دریایی، وجود باد، تمایل<sup>۳</sup> ناشی از عدم تقارن بار یا حتی وجود آب بر روی کشتی در شرایط جوی ناپایدار می‌تواند بر روی پایداری این جهت حرکتی خصوصاً در مقادیر بزرگ زاویه رول تأثیرگذار باشد [۲].

هرچند مطالعه و بررسی پایداری شناورها بطور اعم و پایداری حرکت غلتشی بطور خاص در حالات وجود شکل موجهای منظم و غیر منظم در تحقیقات مربوط به این حوزه

\* ایمیل نویسنده مسئول: asnafi@shirazu.ac.ir

<sup>۱</sup> دانشیار، پژوهشگر علوم و فنون هوا-دریا، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

<sup>۳</sup> Bias

وجود انحراف ناشی از شرایط جوی یا بار نامتقارن استخراج و وضعیت های مختلف ناپایداری بررسی کردند. در واقع تفاوت اصلی این مقاله با تحقیقات گذشته، استفاده از رویکردی کاملاً تحلیلی با استفاده از معادله FPK است. مزیت اصلی این روش یافتن تابع چگالی احتمال بصورت تحلیلی است که برای بررسی رفتار شناسی غیرخطی و مطالعه پدیده دوشاخگی بسیار ارزشمند است. نقیصه بزرگ این روش آن است که در صورتیکه تابع ورودی بصورت نویز سفید نباشد حل دقیق وجود ندارد؛ هر چند میتوان با بکارگیری فیلتر مناسب، حل های نیمه تحلیلی نیز ارائه کرد. باید توجه داشت که انتخاب بار ورودی موج به صورت نویز سفید در واقعیت بار امواج وجود ندارد. امواج دریا پهنای باند باریکی نسبت به نویز سفید دارند که فرض نویز سفید صرفاً برای دستیابی به حل تحلیلی از مسأله مورد مطالعه است.

## ۲- تئوری مساله

هرچند حرکت در دامنه بزرگ برای یک شناور، معمولاً هر ۶ درجه آزادی حرکت را متأثر می سازد اما عموماً میتوان با انتخاب محورهای مختصات مناسب از اثر متقابل مودهای حرکتی رول بر سووی و یاو صرف نظر کرد [۶]. به عبارت دیگر در اغلب اوقات با توجه به کارکرد حرکت یاو، دامنه حرکتی آن در مقابل رول و حرکت سووی قابل اغماض است [۶]. در صورت انتخاب مناسب مرکز محور مختصات (انتخاب مرکز غلتش<sup>۷</sup> بعنوان مرکز مختصات، میتوان حرکت رول را از حرکت سووی جدا نمود [۶]. در این وضعیت معادله یک درجه آزادی غیر خطی حرکت غلتش (رول) شناورها در بسیاری از مراجع [۲، ۷، ۱۰، ۱۱] به صورت زیر بیان شده است:

$$(I_{\phi\phi} + I_{ada})\ddot{\phi} + \bar{D}(\phi, \dot{\phi}) + WGZ(\phi) = \bar{M}_{Sea-wave} + \bar{M}_{Bias} \quad (1)$$

که  $I_{\phi\phi}$  ممان اینرسی جرمی در جهت رول،  $I_{ada}$  ضریب ممان اینرسی جرم افزوده،  $\bar{D}$  ممان میراکننده مقاوم،  $W$  وزن شناور،  $GZ$  تابع متناظر با بازوی ممان بازگرداننده غلتشی،  $\bar{M}_{Sea-wave}$  ممان ناشی از موج تصادفی دریا و  $\bar{M}_{Bias}$  ممان واژگون کننده غلتش ناشی از عدم تقارن بار

مشاهده می گردد، اما گسترش مطالعات و استفاده از تئوری های غیرخطی عموماً به بعد از متداول شدن استفاده از کامپیوترها برای محاسبات عددی این معادلات یعنی اواخر دهه ۸۰ و اوایل دهه ۹۰ میلادی بر می گردد. مدل غیر خطی ارائه شده در مرجع [۳] برای جهت حرکتی رول و مطالعه رفتار گذرا تحت موج های منظم به همراه مقالات نایفه [۴، ۵] و فالزارانو [۶] در این زمینه از موارد پر ارجاع در پیشینه این مباحث است که عمدتاً با روشهای عددی صورت پذیرفته است. در مقاله آخر، نویسندگان به بررسی دوشاخگی هموکلینیک<sup>۱</sup> و هتروکلینیک<sup>۲</sup> پاسخ حرکت رول با استفاده از مدل ملنیکف<sup>۳</sup> پرداخته اند. عمده تحقیقات بعدی در این زمینه، بر یافتن مناطق امن حرکتی<sup>۴</sup> با لحاظ میرایی غیرخطی [۷-۹]، مطالعه رفتار آشوبناک با استفاده از تئوری ملنیکف [۶، ۷، ۱۰-۱۳] یا تئوری های مبتنی بر دنباله های مارکف و نمایه لیاپانوف [۱۴، ۱۵]، شناسایی ناپایداری با استفاده از تئوری اختلالات جزئی [۱۶-۱۸] متمرکز شده اند. در این تحقیقات به تناسب موضوع از انواع مختلف موجهای منظم، غیر منظم، تصادفی باند پهن و تصادفی باند باریک استفاده شده است. باید توجه داشت که بدلیل شدت غیرخطی بودن، تصادفی بودن تحریک و درهم تنیدگی معادلات، تئوری کامل و کلی برای ناپایداری حرکت رول خصوصاً برای وضعیت واژگونی<sup>۵</sup> وجود ندارد اما دو شاخه اصلی تحقیقات در این زمینه بر اساس تئوری های ملنیکف و مارکف گسترش یافته است [۲].

حالات عملیاتی همچون شرایط ناپدید کننده جوی، بار و ممان نامتقارن و وجود آب بر روی شناور نیز در بعضی تحقیقات جدیدتر مشاهده می گردد که عموماً با رویکردی عددی سعی در مطالعه سیستم داشته اند [۱۹، ۲۰]. در اکثر مقالات مطالعه شده بوسیله محققان، روشهای کاملاً تحلیلی فراگیر خصوصاً برای شناورهای تحت موجهای تصادفی بغیر از روشهای مبتنی بر اختلالات جزئی که آن هم دارای محدودیت هایی می باشد کمتر مشاهده شده است. در این مقاله با استفاده از روش توانمند فوکر پلانک کولموگروف<sup>۶</sup> که به اختصار FPK نامیده می شود، تلاش می شود تا پایداری دینامیکی شناورها، تحت موجهایی از جنس نویز سفید بصورت کاملاً تحلیلی در شرایط متعارف و همچنین

<sup>5</sup> Capsizing

<sup>6</sup> Fokker-Plank Kolmogorov

<sup>7</sup> roll center

<sup>1</sup> Homoclinic

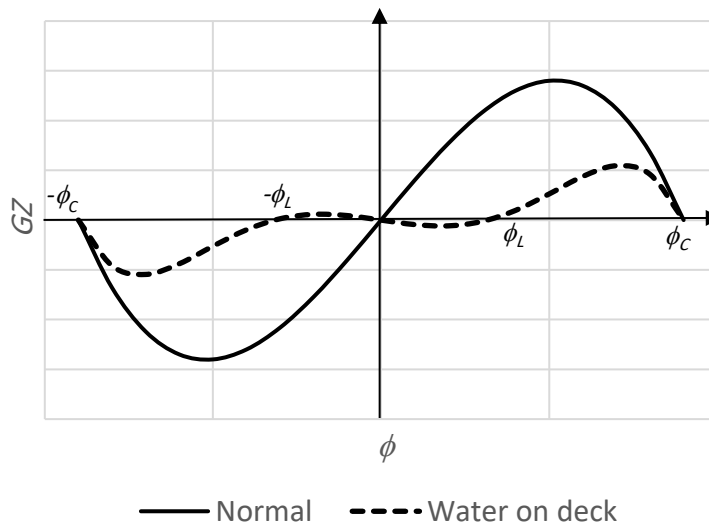
<sup>2</sup> Heteroclinic

<sup>3</sup> Melnikov

<sup>4</sup> Safe basins

حال آن که اگر بر روی عرشه آب وجود داشته باشد، این تابع به نمودار خط چین شکل (۱) تغییر خواهد کرد [۶، ۱۹، ۲۰].

یا وزش باد می‌باشد. در حالت عدم وجود آب بر روی عرشه که وضعیت متعارف شناور است، تابع متنظر با بازوی ممان بازگرداننده شبیه به نمودار پرنرنگ شکل (۱) خواهد بود



شکل ۱- نمودار شماتیک  $GZ$  بر حسب زاویه چرخش غلتش در دو حالت متعارف و وجود آب بر روی عرشه.  $\phi_C$  زاویه واژگونی و  $\phi_L$  زاویه کج شدگی یا انحراف می‌باشد.

۱، با روابط مختلفی قابل جایگزینی است. یک طیف از این توابع برای رفتارهای شناور در مرجع [۷] ارائه شده است که جزء غالب آن میرایی خطی است. در این مقاله، با توجه به تاکید بیشتر بر روی یافتن جواب تحلیلی تحت موجهای تصادفی، این جمله از معادله با یک میراکننده ساده خطی به شکل رابطه ۳ جایگزین شده است:

$$\bar{D}(\phi, \dot{\phi}) = \bar{c} \dot{\phi} \quad (3)$$

که  $\bar{c}$  ضریب میرایی خطی می‌باشد. ممان ناشی از موج، بصورت یک ممان با طیف وسیع فرکانسی نویز سفید و ممان واژگون کننده بصورت یک مقدار ثابت که می‌تواند مثبت یا منفی باشد مطابق روابط ۴ و ۵ در نظر گرفته می‌شود:

$$\bar{M}_{Sea-wave} = \bar{\alpha} \zeta(t) \quad (4)$$

$$\bar{M}_{Bias} = \bar{M}_0 \quad (5)$$

در رابطه ۴،  $\zeta(t)$  یک تابع نویز سفید یکه است که با دامنه  $\bar{\alpha}$  مقیاس شده است. شکل (۲) امکان مقایسه توابع خود همبستگی و طیف توان را برای توابع نویز سفید و سینوسی فراهم کرده است.

مطابق شکل شماتیک (۱)، در حالت عدم وجود آب بر روی عرشه، تابع  $GZ$  دارای ۳ ریشه (یکی در مرکز و دو ریشه متقارن  $\phi_C$  و  $-\phi_C$  که مترادف زوایای واژگونی هستند می‌باشد. در صورت وجود آب بر روی عرشه، دو ریشه دیگر  $\phi_L$  و  $-\phi_L$  که معرف زوایای انحراف<sup>۱</sup> هستند نیز اضافه می‌گردد. این تغییر در معادله  $GZ$  - همان‌طور که بعداً مشاهده می‌گردد، اثر خود را بر رفتار سیستم و وضعیت ناپایداری خواهد گذاشت.

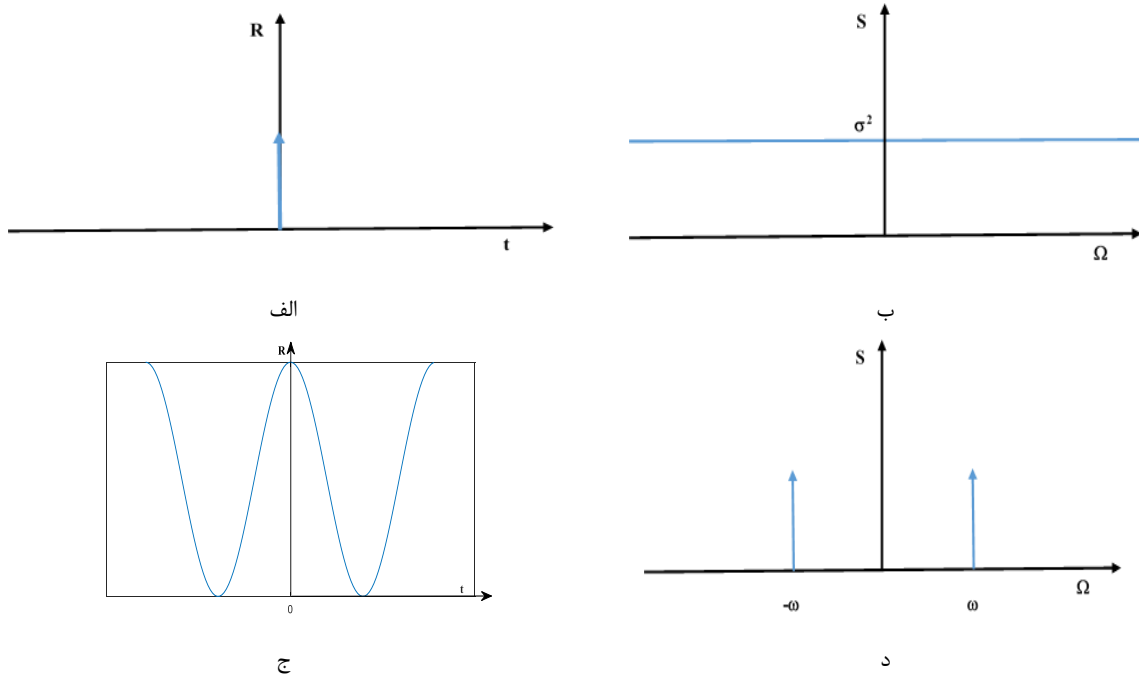
## ۲-۱- معادله حرکت در حالت متعارف

مطابق رابطه ۱ و شکل (۱)، توابع مختلفی برای بازوی ممان بازگرداننده رول در حالت عدم وجود آب بر روی عرشه معرفی شده است [۲، ۵، ۶]. با توجه به خاصیت تقارنی برای رفتار حرکت غلتش یا رول، تابع  $GZ$  بایستی تابعی فرد باشد لذا ساده‌ترین فرم معادله فرد غیر خطی از جنس چندجمله‌ای به شکل رابطه ۲ می‌باشد.

$$GZ = -\bar{k} \phi (\phi^2 - \phi_C^2) \quad (2)$$

که  $\bar{k}$  و  $\phi_C$  ضرایبی هستند که با توجه به هندسه و عرشه کشتی انتخاب می‌گردند [۴، ۲۱]. جمله میرایی در رابطه

<sup>۱</sup> Loll



شکل ۲: الف: تابع خود همبستگی برای تابع نویز سفید با میانگین صفر و واریانس  $\sigma^2$ . ب: تابع طیف توان برای نویز سفید قسمت الف. ج: تابع خود همبستگی برای تابع سینوسی  $A \sin(\omega t)$ . د: تابع طیف توان برای تابع سینوسی قسمت ج.

مشخصی از شناورها خواهد بود. جهت یافتن نقاط تعادل معادله ۶، کافی است معادله حرکت را بدون عامل استهلاک و نیروی خارجی در نظر گرفته و جمله اینرسی را صفر قرار دهیم. در اینصورت ریشه های معادله  $GZ$  همان نقاط تعادل سیستم هستند. در این مقاله با استفاده از یک کد متلب، ابتدا نوع نقطه تعادل و سپس منیفلدها و مدار<sup>۱</sup> پایداری و ناپایداری سیستم بررسی و محاسبه می گردد. فرایند محاسبه نوع نقاط تعادل و یافتن این مدارها در این مقاله مورد بحث نیست اما بطور خلاصه وضعیت نقاط تعادل و منیفلدها و مدارهای پایداری و ناپایداری در این حالت در شکل (۳-الف) نشان داده شده است (برای مطالعه بیشتر نگاه کنید به [۱، ۶، ۲۱]).

بر اساس شکل (۳)، ریشه های معادله ممان بازگرداننده رول ۳ عدد هستند که یکی در مبدا از جنس مرکز و دو تا از جنس زینی در زوایای مثبت و منفی واژگونی قرار گرفته اند. یک مدار هتروکلینیک نقاط تعادل ناپایدار را بهم متصل می سازد. البته در حالت وجود میرایی، مکان نقاط تعادل تغییر نخواهد کرد اما مثلاً نقطه تعادل مبدا به یک نقطه کانون پایدار بدل خواهد شد (جزئیات را در [۴، ۶] و شکل (۳-ب) ببینید).

به بیان بهتر، اگرچه در تابع سینوسی تنها یک فرکانس تحریک مشاهده می گردد، نویز سفید شامل باند پهنی از فرکانسهای مختلف با وزن یکسان است. در رابطه ۵،  $\bar{M}_0$  ممان واژگون کننده ناشی از بار نامتقارن یا مولفه باد عرضی است. با تقسیم رابطه ۱ بر مقدار اینرسی و استفاده از اعداد بدون بعد، به معادله ۶ برای حالت متعارف عدم وجود آب بر روی عرشه خواهیم رسید:

$$\phi'' + \bar{c}\phi' + \phi - \beta\phi^3 = \alpha\xi(t) + M_0 \quad (6)$$

که

$$\omega_0^2 = \frac{W\bar{k}\phi_c^2}{(I_{\phi\phi} + I_{add})}, \tau = \omega_0 t, \quad (*)'$$

$$= \frac{d}{d\tau}$$

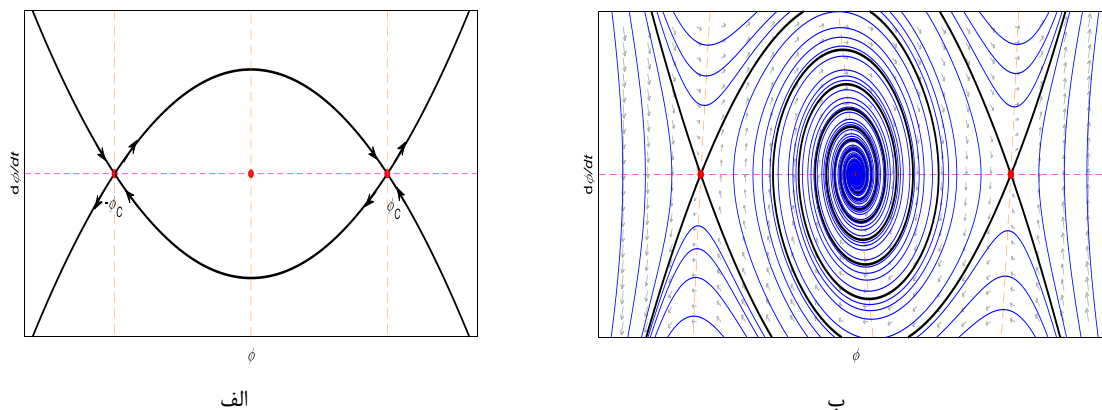
$$c = \frac{\bar{c}}{(I_{\phi\phi} + I_{add})\omega_0}, \quad (7)$$

$$\beta = \frac{W\bar{k}}{(I_{\phi\phi} + I_{add})\omega_0^2}$$

$$\alpha = \frac{\bar{\alpha}}{(I_{\phi\phi} + I_{add})\omega_0^2}, M_0 = \frac{\bar{M}_0}{(I_{\phi\phi} + I_{add})\omega_0^2}$$

در واقع با مقیاس کردن زمان و معرفی اعداد بدون بعد، نتایج بدست آمده از مطالعه سیستم قابل تعمیم به طیف

<sup>1</sup> Orbit



شکل ۳- الف: نقاط تعادل، منیفلدها و مدارهای پایدار و ناپایداری و خطوط با شیب صفر (nullclines) حرکت غلتشی در حالت عدم میرایی و عدم وجود آب بر روی شناور یا کشتی. ب: صفحه فاز در حالت وجود میرایی در همین حالت

ناپایداری سیستم توسط کد ساده متلب محاسبه می‌گردد. بطور خلاصه وضعیت نقاط تعادل و منیفلدها و مدارهای پایدار و ناپایداری در این حالت در شکل (۴-الف) نشان داده شده است (برای مطالعه بیشتر نگاه کنید به [۱، ۶، ۲۱]). شکل (۴)، نشان دهنده ۵ نقطه تعادل دوتا در زوایای مثبت و منفی انحراف یا کج شدگی از جنس مرکز و ۳ تا از جنس زینی در زوایای مثبت و منفی واژگونی و همچنین مبدا می‌باشد. مانند حالت نخست یک مدار هتروکلینیک نقاط تعادل ناپایدار زینی واژگونی را بهم متصل می‌سازد و نقطه ناپایدار مبدا بهمراه نقاط مرکزی زوایای کج شدگی یک مدار هموکلینیک را تشکیل می‌دهند. مجدداً تاکید می‌گردد که در حالت وجود میرایی، مکان نقاط تعادل تغییر نخواهد کرد اما نقاط تعادل مرکزی انحراف یا کج شدگی به قانونهای پایدار بدل خواهند شد (جزئیات را در [۴، ۶] و شکل (۳-ب) ببینید).

### ۲-۳- تابع چگالی احتمال و آنالیز دوشاخگی

معادلات ۶ و ۹ معادلاتی با جمله‌های تصادفی از جنس نویز سفید هستند. حل این معادلات با روشهای متداول امکان پذیر نبوده و تحلیل آنها مستلزم یافتن پارامترهای آماری پاسخ می‌باشد. کلیه خواص آماری از تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی قابل استحصال است [۲۲، ۲۳]. برای محاسبه چگالی احتمال رویکردهای مختلفی با استفاده از روشهای صرفاً تحلیلی، نیمه تحلیلی یا کاملاً عددی وجود دارد. بعضی از معروف ترین روشها عبارتند از: بکارگیری معادله FPK، استفاده از ممانهای آماری و شبیه سازی مونت کارلو. هرچند در رویکرد کاملاً عددی، شبیه سازی مونت کارلو از توانمندترین روشهاست اما در حوزه مسائل صرفاً

### ۲-۲- معادله حرکت در حالت وجود آب بر روی عرشه

در حالت وجود آب بر روی عرشه و با توجه به نمودار خط چین شکل (۱)، معادله ۲ به فرم معادله ۸ تصحیح می‌گردد [۱۹] را ببینید.

$$GZ = -\bar{k}\phi(\phi^2 - \phi_L^2)(\phi^2 - \phi_C^2) \quad (8)$$

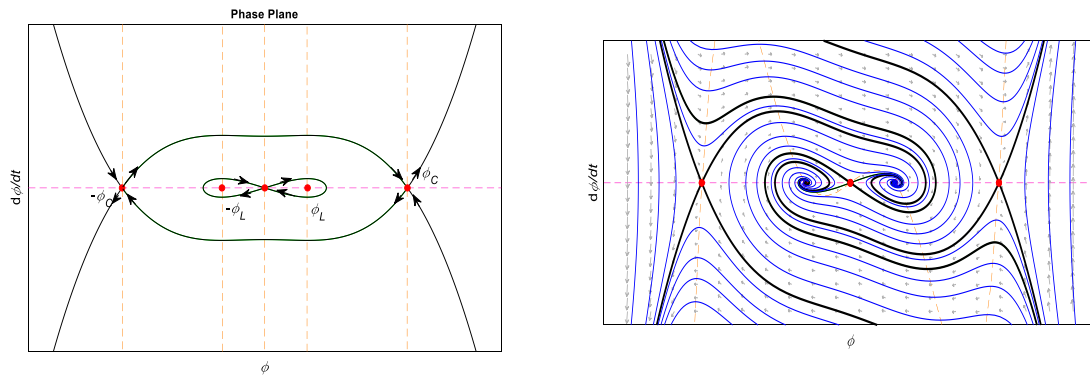
که  $\bar{k}$ ،  $\phi_C$  و  $\phi_L$  ضرایبی هستند که با توجه به هندسه، عرشه و مقدار آب موجود در عرشه کشتی انتخاب می‌گردند [۴، ۲۱]. روند استخراج معادله حرکت در این وضعیت شبیه وضعیت متعارف است مگر این که ممان بازگشتی از جنس تابع مرتبه ۵ بوده و ثابتهای معادله کمی تغییر یافته‌اند. معادلات ۹ و ۱۰ را ببینید:

$$\phi'' + \bar{c}\phi' - \phi + \beta^*\phi^3 - \gamma^*\phi^5 = \alpha^*\xi(t) + M_0^* \quad (9)$$

$$\omega_0^2 = \frac{W\bar{k}\phi_C^2\phi_L^2}{(I_{\phi\phi} + I_{add})}, \tau = \omega_0 t, (*)' = \frac{d}{d\tau} \quad (10)$$

$$\alpha = \frac{\bar{\alpha}}{(I_{\phi\phi} + I_{add})\omega_0^2}, M_0 = \frac{\bar{M}_0}{(I_{\phi\phi} + I_{add})\omega_0^2}$$

بر اساس شکل (۳)، ریشه‌های معادله ممان بازگرداننده رول ۳ عدد هستند که یکی در مبدا از جنس مرکز و دو تا از مجدداً جهت یافتن نقاط تعادل معادله ۹، کافی است معادله حرکت را بدون عامل استهلاک و نیروی خارجی در نظر گرفته و جمله اینرسی را صفر قرار دهیم. در اینصورت ریشه‌های معادله GZ جدید همان نقاط تعادل سیستم هستند که نوع نقطه تعادل، منیفلدها و مدارهای پایدار و



الف

ب

شکل ۴- الف: نقاط تعادل، منیفلدها و مدارهای پایداری و ناپایداری و خطوط با شیب صفر حرکت غلتشی در حالت عدم میرایی و وجود آب بر روی شناور یا کشتی. ب: صفحه فاز در حالت وجود میرایی در همین حالت

که  $X$  بردار متغیرهای حالت سیستم با بعد  $n$  ماتریسی با  $n$  سطر و  $m$  ستون و  $\xi$  برداری با بعد  $m$  است که مولفه‌های آن توابع مستقل از جنس نویز سفید نرمال ایستا با شدت ۱ می‌باشند؛ آنگاه چگالی احتمال متناظر با پاسخ معادله ۱۱ از معادله دیفرانسیل ۱۲ که مشهور به معادله FPK است محاسبه می‌گردد [۲۲, ۲۴]:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial (f_i P)}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial (g_{ij} P)}{\partial x_j} \quad (12)$$

که  $P$  چگالی احتمالی پاسخ است. حل معادله ۱۲ در حالت گذرا به فرم بسته وجود ندارد اما در شرایط خاص، حل تحلیلی ایستا برای آن در پیشینه تحقیقات دیده می‌شود [۲۵-۲۷]. بطور خاص برای معادلات غیر خطی به فرم معادله ۱۳ که تحت تحریک نویز سفید با شدت  $\alpha$  بوده و دارای جمله غیرخطی الاستیسیته  $g(\phi)$  باشند؛

$$\ddot{\phi} + c\dot{\phi} + g(\phi) = \alpha \xi(t) \quad (13)$$

تابع چگالی احتمال توام ایستا<sup>۲</sup> در صفحه فاز برای رابطه ۱۲ با حل معادله دیفرانسیل پاره‌ای ۱۴ وقتی که مشتق نسبت به زمان صفر در نظر گرفته شود محاسبه می‌گردد. جزئیات این محاسبه در پیشینه تحقیقات [۲۵, ۲۸-۳۰] قابل دنبال کردن است اما نتیجه آن در رابطه ۱۴ منعکس شده است:

تحلیلی روش FPK بهترین و کاراترین روش است [۱۱, ۱۳-۱۵]. در این مقاله از روش FPK برای محاسبه و تحلیل رفتار سیستم استفاده شده است.

### ۲-۳- تابع چگالی احتمال و آنالیز دوشاخگی

معادلات ۶ و ۹ معادلاتی با جمله‌های تصادفی از جنس نویز سفید هستند. حل این معادلات با روشهای متداول امکان پذیر نبوده و تحلیل آنها مستلزم یافتن پارامترهای آماری پاسخ می‌باشد. کلیه خواص آماری از تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی قابل استحصال است [۲۲, ۲۳]. برای محاسبه چگالی احتمال رویکردهای مختلفی با استفاده از روشهای صرفاً تحلیلی، نیمه تحلیلی یا کاملاً عددی وجود دارد. بعضی از معروف ترین روشها عبارتند از: بکارگیری معادله FPK، استفاده از ممانهای آماری و شبیه سازی مونت کارلو. هرچند در رویکرد کاملاً عددی، شبیه سازی مونت کارلو از توانمندترین روشهاست اما در حوزه مسائل صرفاً تحلیلی روش FPK بهترین و کاراترین روش است [۱۱, ۱۳-۱۵]. در این مقاله از روش FPK برای محاسبه و تحلیل رفتار سیستم استفاده شده است.

در حالت کلی فرض کنید معادله دیفرانسیل یک سیستم دینامیکی غیر خطی که محرک‌های خارجی آن از جنس نویز سفید<sup>۱</sup> هستند، به فرم معادله ۱۱ باشد:

$$\dot{X} = f(X, t) + g(X, t)\xi(t) \quad (11)$$

<sup>2</sup> Stationary joint probability density function

<sup>1</sup> White-noise

شرایط مختلف بحث شود. قله ها در تابع چگالی احتمالی معرف نقاط تعادل معادله متناظر هستند چرا که معرف بیشترین احتمال حضور متغیر تصادفی هستند. هرگاه با تغییر در یکی از پارامترهای سیستم، مکان قله ها یا تعداد آنها تغییر کند، نشانی از یک دو شاخگی در پاسخ است که به راحتی از شکل تابع چگالی احتمال رسم شده قابل حصول است.

معادلات ۱۵ و ۱۶ برای شناور خاصی استخراج نشده اند اما امکان استفاده از آنها به دلیل استفاده از اعداد بدون بعد برای طیفی از شناورهای هم گروه میسر است. در اینجا برای بررسی ملموس تر و دقیق تر، از اطلاعات ۳ گونه از شناورها با توجه به حدفاصل آبخور آنها تا سطح عرشه<sup>۱</sup> که در جدول ۱ لیست شده است استفاده شده است. همچنین در تمامی نتایج منظور از متغیرهای اول و دوم حالت، به ترتیب زاویه رول و نرخ زمانی آن بر حسب زمان مقیاس شده می باشد (روابط ۷، ۱۰، ۱۵ و ۱۶ را ببینید)

با استفاده از اطلاعات شناور با فاصله بلند آبخور تا عرشه (بالاترین سطر جدول ۱) و با فرض آن که نسبت میرایی به شدت تحریک نویز سفید برابر با ۰٫۲ باشد (جمله  $\frac{c}{\alpha}$  یا  $\frac{c^*}{\alpha^*}$  در معادلات ۱۵ یا ۱۶) تابع چگالی نرمالیزه شده توام پاسخ در صفحه فاز برای عدم وجود ممان واژگون کننده و در دو حالت نرمال و وجود آب بر روی عرشه در شکل (۵) رسم شده است. همان طور که از شکل (۵-الف) مشخص است، در حالت نرمال بیشترین چگالی مربوط به مبدا صفحه فاز است که نشان از یک کانون پایدار در مرکز است.

کران تابع چگالی احتمال در بازه قابل قبول نهایتاً در زوایای واژگونی واگرا می شوند اما در حوزه امن، صرفاً یک کانون پایدار وجود دارد. در صورت وجود آب بر روی عرشه و حتی بدون اعمال ممان خارجی انحراف، مطابق شکل (۵-ب) دو شاخگی در رفتار مشاهده شده و در منطقه امن، دو کانون پایدار بین زوایای انحراف (کج شدگی) بوجود می آید. در این حالت  $\phi = 0$  وضعیت پایداری نیست و شناور حول یکی از نقاط  $\phi = \phi_L$  یا  $\phi = -\phi_L$  نوسان پایدار خواهد داشت و البته با توجه به شرایط، پرش بین کانونهای پایداری نیز امکان پذیر است. در این حالت همچنان زوایای ناپایداری واژگونی بصورت واگرایی در تابع چگالی احتمالی خود را نشان می دهند.

$$P(\phi, \dot{\phi}) = C \exp \left( -\frac{c}{\alpha} \left( \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \int^{\phi} g(\lambda) d\lambda \right) \right) \quad (14)$$

که  $C$  ضریب نرمالیزه کردن است. با توجه به رابطه ۱۴، تابع چگالی احتمال پاسخ برای دو حالت عدم وجود و وجود آب بر روی عرشه شناور یعنی معادلات ۶ و ۹ بصورت معادلات ۱۵ و ۱۶ بدست می آیند:

$$P_{nor}(\phi, \dot{\phi}) = C \exp \left( -\frac{c}{\alpha} \left( \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{\phi^2}{2} - \beta \frac{\phi^4}{4} - M_0 \phi \right) \right) \quad (15)$$

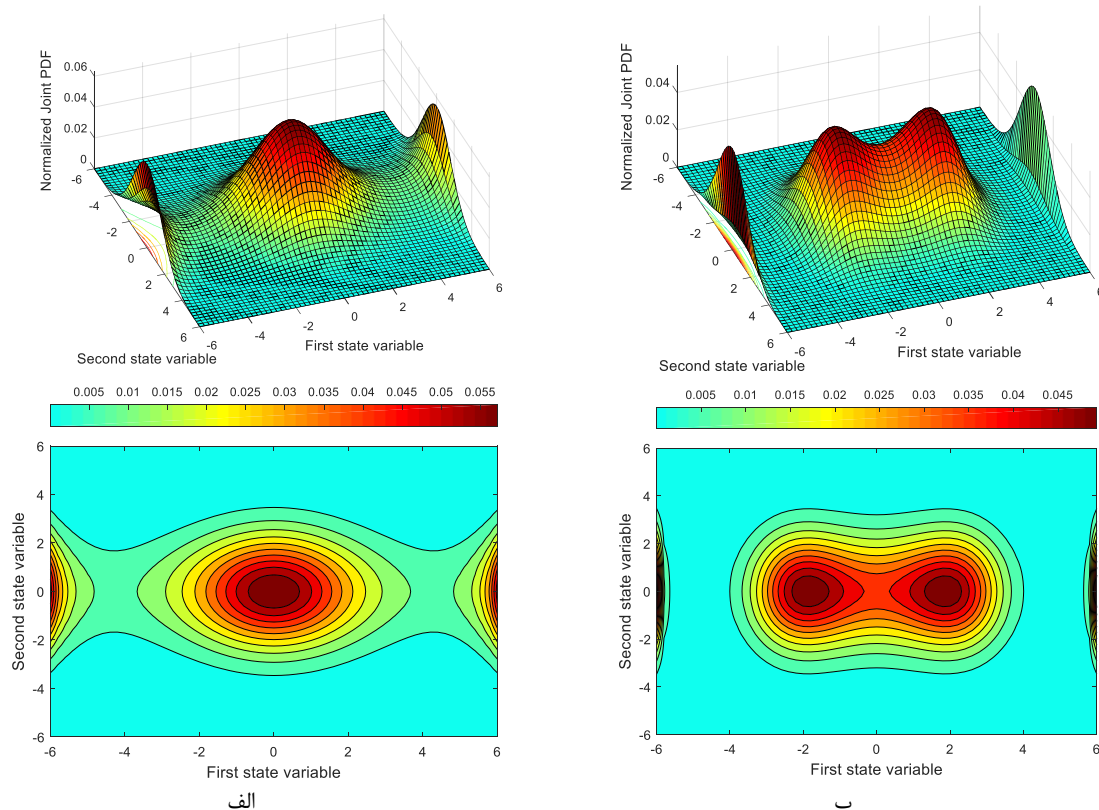
$$P_{wod}(\phi, \dot{\phi}) = C \exp \left( -\frac{c^*}{\alpha^*} \left( \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{\phi^2}{2} + \beta^* \frac{\phi^4}{4} - \gamma^* \frac{\phi^6}{6} - M_0^* \phi \right) \right) \quad (16)$$

که  $P_{wod}$  و  $P_{nor}$  به ترتیب توابع چگالی احتمال در وضعیت نرمال و وجود آب بر روی عرشه می باشند. نقاط ماکزیمم نسبی معادلات ۱۵ و ۱۶، نشانگر بیشترین احتمال وجود متغیرهای حالت  $\phi$  و  $\dot{\phi}$  در صفحه فاز بوده و نقاط تعادل دیگر سیستم اعم از پایدار یا ناپایدار از روی پروفایل این چگالی قابل رصد است. از این چگالی برای محاسبه مقادیر میانگین، واریانس و دیگر ممانهای آماری پاسخ نیز می توان استفاده کرد. از آنجا که چگالی احتمالی، کمیتی همواره مثبت با می نیمم مطلق صفر است [۲۲، ۲۳]، اکسترممهای این تابع نقش کلیدی در مطالعه پایداری و رفتارهای غیرخطی سیستم دارند. به عبارت بهتر تعداد و نوع اکسترممهای تابع چگالی احتمالی که از مشتق گیری روابط ۱۵ و ۱۶ محاسبه می شوند نقش کلیدی در تشخیص رفتار و پایداری سیستم دارند. نقاط اکسترمم تابع چگالی احتمال (قله ها) معرف نقاط تعادل دینامیکی هستند چرا که بیشترین احتمال حضور متغیر تصادفی در آن نقطه رخ داده است.

### ۳ - نتایج و بحث در مورد آنها

همان طور که در بخش قبل مشاهده شد روابط ۱۵ و ۱۶ به روش کاملاً تحلیلی، تابع چگالی احتمالی پاسخ را معرفی می نمایند. در این بخش با توجه به این معادلات تلاش می شود تا وضعیت تابع چگالی احتمال برای دو حالت ذکر شده، بررسی و در مورد ناپایداری حرکت غلتشی تحت

<sup>1</sup> Free-board



شکل ۵- تابع چگالی احتمال توأم پاسخ (نرمالیزه) و تصویر آن در صفحه فاز برای الف: وضعیت ۱ جدول ۱ و ب: وضعیت ۲ جدول ۲

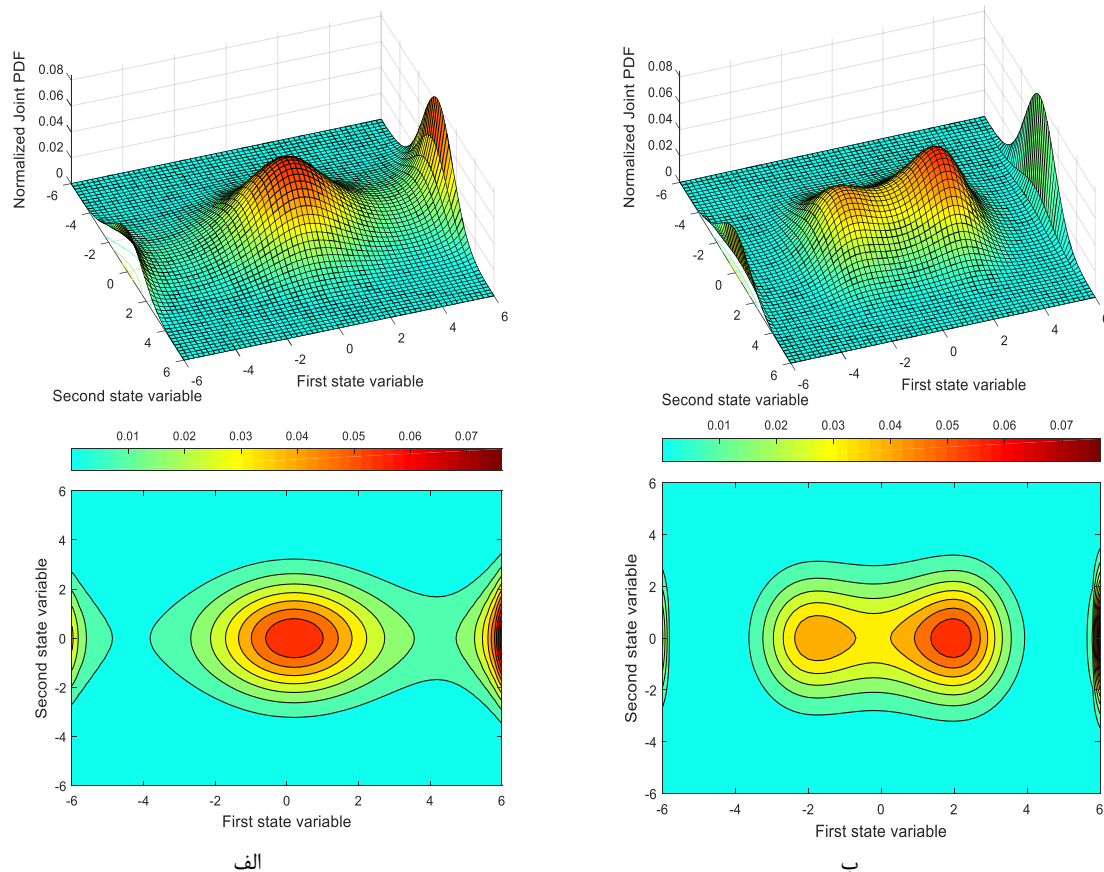
(۲). نتایج برای ممان واژگون کننده مثبت و معادل بی بعد شده ۰,۳ محاسبه شده است. همان طور که انتظار می‌رود، در شناور نرمال کمی نقطه تعادل مبدا در جهت اعمال ممان واژگون کننده جابجا می‌گردد (شکل ۶ الف) به عبارت دیگر تغییر در رفتار صرفاً شامل جابجایی در نقطه تعادل پایدار دینامیکی است اما در حالت وجود آب بر روی عرشه، هر دو حوزه تعادلی وجود داشته اما حوزه‌ای که در جهت ممان واژگون کننده است تقویت می‌گردد (شکل ۶ ب).

در شکل (۷) اثر تغییرات ممان واژگون کننده بر چگالی احتمال متغیر اول (زاویه رول) بررسی شده است. همان طور که انتظار می‌رود، جهت ممان واژگون کننده باعث متمایل شدن چگالی احتمال در همان جهت می‌شود به گونه‌ای که در شناور نرمال محل نقطه تعادل را جابجا کرده و در شناور با وجود آب بر روی عرشه سبب تقویت کانون تعادل متناظر می‌گردد.

کران تابع چگالی احتمال در بازه قابل قبول نهایتاً در زوایای واژگونی واگرا می‌شوند اما در حوزه امن، صرفاً یک کانون پایدار وجود دارد. در صورت وجود آب بر روی عرشه و حتی بدون اعمال ممان خارجی انحراف، مطابق شکل (۵-ب) دو شاخگی در رفتار مشاهده شده و در منطقه امن، دو کانون پایدار بین زوایای انحراف (کج شدگی) بوجود می‌آید. در اینحالت  $\phi = 0$  وضعیت پایداری نیست و شناور حول یکی از نقاط  $\phi = \phi_L$  یا  $\phi = -\phi_L$  نوسان پایدار خواهد داشت و البته با توجه به شرایط، پرش بین کانونهای پایداری نیز امکان پذیر است. در این حالت همچنان زوایای ناپایداری واژگونی بصورت واگرایی در تابع چگالی احتمالی خود را نشان می‌دهند.

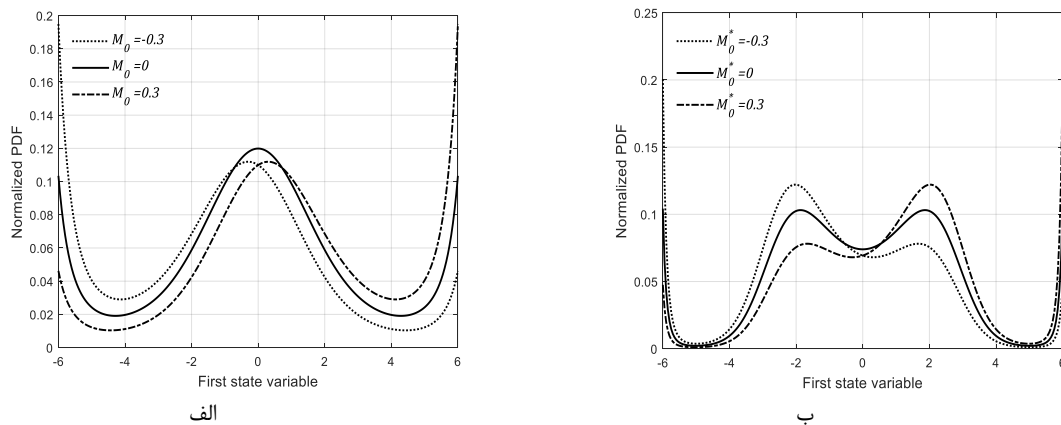
در شکل (۶)، همان وضعیت شکل (۵) را داریم با این تفاوت که ممان واژگون کننده ناشی از بار نامتقارن یا باد عرضی نیز در نظر گرفته شده است (وضعیت های ۳ و ۴ جدول





شکل ۶- تابع چگالی احتمال توأم پاسخ (نرمالیزه) و تصویر آن در صفحه فاز برای الف: وضعیت ۳ جدول ۲ و ب: وضعیت ۴ جدول

۲



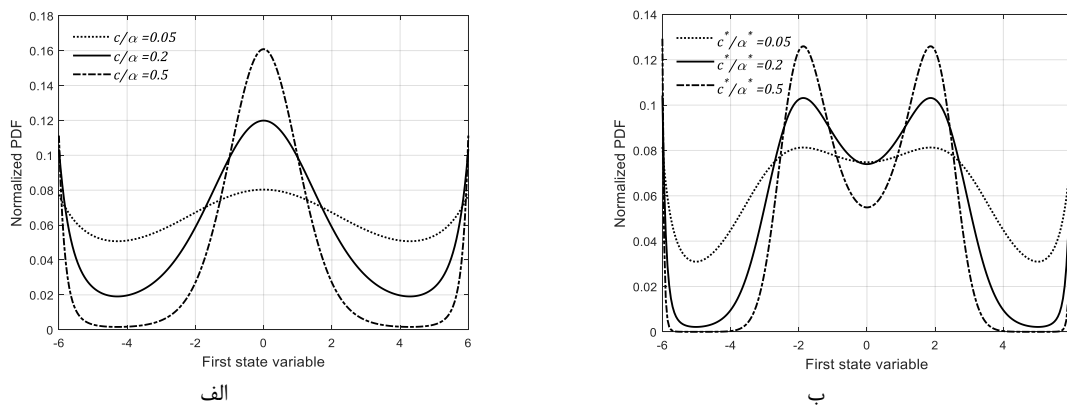
شکل ۷- تابع چگالی احتمال متغیر اول حالت برای مقادیر مختلف ممان واژگون کننده و الف: شرایط نرمال، ب: وجود آب بر روی عرشه

می‌شود (بزرگتر شدن قله‌ها بمعنای احتمال حضور بیشتر در آن نقطه است).

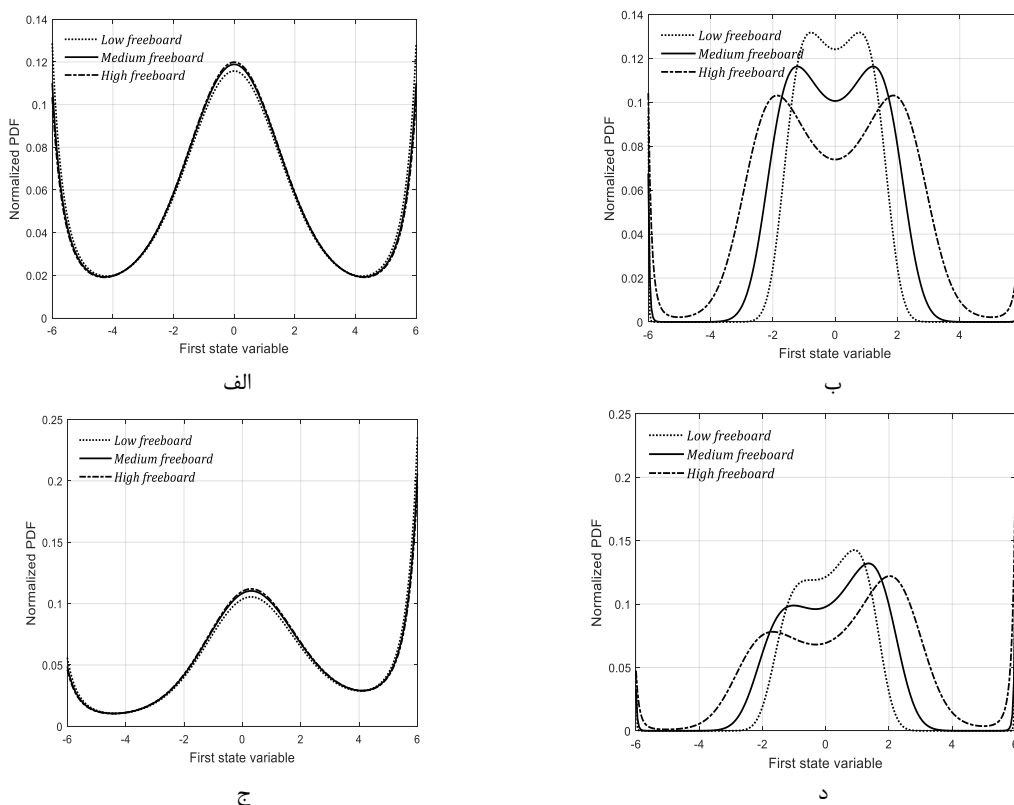
نهایتاً در شکل (۹) با استفاده از داده‌های جدول ۱، اثر نوع کشتی بر روی چگالی احتمال مشاهده شده است (نسبت میرایی به شدت تحریک نویز سفید و ممان واژگون کننده متناظر از جدول ۲ انتخاب شده است).

از آنجا که نسبت میرایی به شدت تحریک نویز سفید یک پارامتر را تعیین می‌کنند (معادلات ۱۵ و ۱۶ را ببینید)، اثر تغییرات این نسبت بجای مطالعه هر کدام بطور جداگانه بر روی چگالی احتمال در شکل (۸) دیده شده است. همان طور که انتظار می‌رود مقدار میرایی بالاتر یا شدت تحریک کمتر باعث پایداری بیشتر نقاط تعادلی در حوزه امن

تأثیر آب روی عرشه بر دوشاخگی رول شناورها تحت موج های تصادفی



شکل ۸- تابع چگالی احتمال متغیر اول حالت برای مقادیر مختلف نسبت میرایی به شدت تحریک نویز سفید و الف: شرایط نرمال، ب: وجود آب بر روی عرشه



شکل ۹: تابع چگالی احتمال متغیر اول حالت برای شناورهای جدول ۱ برای الف: وضعیت ۱ جدول ۲، ب: وضعیت ۲ جدول ۲، ج: وضعیت ۳ جدول ۲ و د: وضعیت ۴ جدول ۲

جدول ۱: مشخصات هندسی/جرمی\* شناورهای مطالعه شده بر اساس مرجع [۴]

نوع شناور	$\omega_0$ (rad/s)	$\beta^*$	$\gamma^*$
High freeboard	4.790	0.32651	0.01140
Medium freeboard	5.2779	0.71455	0.11342
Low freeboard	5.2779	1.69119	0.63297

\* در حالت نرمال (عدم وجود آب بر روی عرشه) از ضریب متناظر ( $\beta$ ) استفاده شده است و  $\gamma$  نیز طبیعتاً برابر با صفر است.

جدول ۲: وضعیت های مختلف مطالعه شده در این تحقیق

وضعیت	شرایط شناور	مقدار ممان ناشی از بار نامتقارن یا باد عرضی (بدون بعد)	نسبت میرایی به شدت تحریک نویز سفید
۱	نرمال	۰	$\frac{c}{\alpha} = 0.2$
۲	وجود آب بر روی عرشه	۰	$\frac{c^*}{\alpha^*} = 0.2$
۳	نرمال	۰,۳	$\frac{c}{\alpha} = 0.2$
۴	وجود آب بر روی عرشه	۰,۳	$\frac{c^*}{\alpha^*} = 0.2$

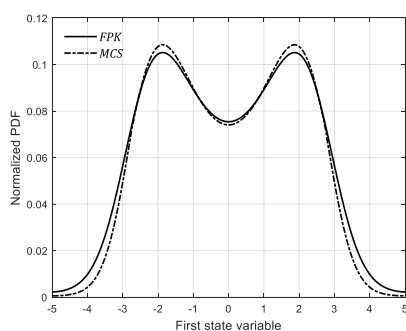
نشان دادن دقت نتایج، بعضی از آنها با شبیه سازی عددی مونت کارلو مقایسه شده اند (برای آشنایی با این روش عددی نگاه کنید به [۳۱]). بطور مشخص تابع چگالی احتمالی ارائه شده در شکل های (۵-ب) و (۶-الف) که به ترتیب با استفاده از روابط ۱۶ و ۱۵ بدست آمده اند را با متناظر عددی آنها که بوسیله شبیه سازی مونت کارلو و مستقیماً از حل معادلات حرکت ۹ و ۶ بدست آمده اند، مقایسه کرده و دقت آنها را مقایسه می کنیم. این مقایسه بدلیل مشکلات واگرایی حل های عددی و حساسیت معادلات در نقاط نزدیک به واژگونی، صرفاً در منطقه امن نوسانی انجام گرفته است.

شکل (۱۰) تأییدی بر دقت نتایج اخذ شده از هر دو روش دارد.

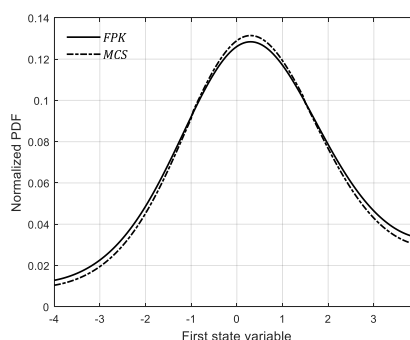
همان طور که مشاهده می گردد، در شرایط نرمال رفتار شناورهای مختلف تغییر چندانی از خود نشان نمی دهد (شکل های (۸-الف) و (۸-ج)) حال آن که برای وضعیت وجود آب بر روی عرشه، شرایط کاملاً متفاوت است. مطابق شکل های (۸-ب) و (۸-د)، در هر چه فاصله آخور تا عرشه کوچکتر باشد، کانونهای پایدار بهم نزدیکتر شده و به دنبال آن پرش بین دو حوزه به تناوب و راحتی کمتری صورت می پذیرد. اما با افزایش این فاصله، کانونها در فواصل بیشتری از هم تشکیل خواهند شد.

#### ۴ - اعتبارسنجی نتایج

هرچند کلیه نتایج ارائه شده در این مقاله از یک روش کاملاً تحلیلی بدست آمده است و معمولاً نتایج عددی را با نتایج تحلیلی یا عددی دیگر اعتبار سنجی می کنند. اما صرفاً برای



الف



ب

شکل ۱۰: مقایسه تابع چگالی احتمال متغیر اول حالت محاسبه شده بوسیله روش FPK در الف: نمودار ۴ ب و ب: نمودار ۵ الف با توابع متناظر بدست آمده از شبیه سازی مونت کارلو (MCS)

با استفاده از این تابع، رفتارهای شناور و وضعیت پایداری در حالات مختلف وجود و عدم آب بر روی عرشه، ممان واژگون کننده ناشی از باد عرضی یا بار نامتقارن، مقدار میرایی و شدت ممان تصادفی بررسی شد. نتایج مشخص ساخت که در حالت وجود آب بر روی عرشه، رفتار شناور

#### ۵ - نتیجه گیری

با بی بعد سازی معادلات حرکت غیرخطی رول شناورها تحت موجهای تصادفی نویز سفید در حالت نرمال و وجود آب بر روی شناور، تابع چگالی احتمال برای پاسخ با بکارگیری معادله FPK و بصورت کاملاً تحلیلی بدست آمد.

$W$	وزن شناور		
<b>علائم یونانی</b>			
$\alpha$	شدت تابع نویز سفید		
$\beta$	ضریب الاستیسیته غیر خطی مرتبه سوم		
$\gamma$	ضریب الاستیسیته غیر خطی مرتبه پنجم		
$\phi$	زاویه رول		
$\tau$	زمان بدون بعد شده		
$\xi(t)$	تابع نویز سفید		
$\omega_0$	فرکانس طبیعی معادل شده سیستم خطی متناظر		
<b>زیرنویس</b>			
$Bias$	ناشی از تمایل به انحراف	$A_{mass}$	جرم افزوده سیال
$C$	واژگونی	$c$	ضریب میرایی خطی
$L$	انحراف یا کج شدگی	$D$	تابع میرایی غیر خطی
$nor$	وضعیت نرمال	$GZ$	بازوی ممان بازگرداننده رول
$Sea-wave$	ناشی از موج دریایی	$I_{\phi\phi}$	ممان دوم جرم
$wod$	وجود آب بر روی عرشه	$M$	ممان خارجی اعمالی در جهت رول
<b>بالانویس</b>		$P$	تابع چگالی احتمال
		$t$	زمان

تفاوت ماهوی با وضعیت نرمال دارد و امکان پایدار شدن حول زوایای انحراف غلتش مثبت و منفی و پرش بین آنها کاملاً محتمل است؛ موضوعی که در وضعیت نرمال اصلاً مشاهده نمی‌گردد. این امر، یعنی پرش بین حوزه های تعادلی خصوصاً برای شناور هایی که فاصله آبخور تا عرشه کوچکتر است؛ راحت تر اتفاق می‌افتد. همچنین وجود ممان واژگون کننده، پایداری حول زاویه انحراف هم جهت را تقویت می‌کند و از قدرت حوزه تعادلی غیر هم جهت می‌کاهد. البته در همه وضعیت ها میرایی بیشتر و شدت نویز سفید کمتر، به بهبود پایداری حول نقاط تعادل می‌انجامد.

#### علائم انگلیسی

## مراجع

- [1] E. Kreuzer, and M. Wendt, "Ship capsizing analysis using advanced hydrodynamic modelling", Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Vol. 358. No. 1771, 2000, pp.1835-1851.
- [2] Z. Su, "Nonlinear response and stability analysis of vessel rolling motion in random waves using stochastic dynamical systems", Texas A and M University, 2012.
- [3] L. Virgin, "The nonlinear rolling response of a vessel including chaotic motions leading to capsize in regular seas". Applied Ocean Research, Vol. 9, No. 2, 1987, pp. 89-95.
- [4] A. Nayfeh, and A. Khdeir, "Nonlinear rolling of ships in regular beam seas", International shipbuilding progress, Vol. 33, No. 379, 1986, pp.40-49.
- [5] A. Nayfeh, and N. Sanchez, "Stability and complicated rolling responses of ships in regular beam seas". International shipbuilding progress, Vol. 37, No. 410, 1990, pp.177-198
- [6] J. M. Falzarano, S. W. Shawand, and A. W. Troesch, "Application of global methods for analyzing dynamical systems to ship rolling motion and capsizing". International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 2. No. 1, 1992, pp.101-115.
- [7] M. Bikdash,. B. Balachandranand, and A. Navfeh, "Melnikov analysis for a ship with a general roll-damping model", Nonlinear Dynamics, Vol. 6, No. 1, 1994, pp.101-124.
- [8] H. Shang, "Control of Erosion of Safe Basins in a Single Degree of Freedom Yaw System of a Ship with a Delayed Position Feedback", Dynamical Systems, 2010, Springer, p. 177-185.

- [9] W. Chai , J. Fan, R. C. Zhu, X. L. Huang, "The nonlinear ship rolling and safe basins in irregular waves". Chinese Journal of Hydrodynamics, Vol. 4, 2013, pp.010.
- [10] Gu, J.-Y. "Nonlinear rolling motion of ship in random beam seas". Journal of Marine Science and Technology. Vol. 12. No. 4. 2004. pp.273-279.
- [11] Li ,S. and K. Wang. "Chaos analysis of ship rolling motion in stochastic beam seas", Journal of Vibroengineering, Vol. 19. No. 8, 2017 .
- [12] W. Wu, and L. McCue, "Application of the extended Melnikov's method for single-degree-of-freedom vessel roll motion", Ocean Engineering, Vol. 35, No. 17-18, 2008, pp.1739-1746.
- [13] Y. G. Tang, J. Y. Gu, H. Y. Zheng, and H. X. Li, "Study on the ship capsizing in random beam seas using Melnikov method", Journal of Ship Mechanics, Vol. 8, No. 5, 2004, pp.27-34.
- [14] X. L. Huang, and X. Y. Zhu, "Calculation of ship capsizing probability by using path integration method", Journal of Ship Mechanics, Vol. 5. No. 4, 2001, pp.7-16.
- [15] S. Qin, and M. Li, "Stability Analysis and Simulation of Nonlinear Ship System under Stochastic Wave", Computational Intelligence and Software Engineering, 2009, CiSE 2009, International Conference on, 2009, pp.1-4.
- [16] J. Lu, Ch. Zhang, Sh. Chen, and Y. Wu, "Ship Nonlinear Rolling and Roll Angle Reconstruction Based on FIR", Open Access Library Journal, Vol. 2. No. 11, 2015, pp.1.
- [۱۷] محمد مهدی جلیلی، سعید ابراهیمی و ندا رحمت، "شبیه‌سازی و آنالیز حساسیت ارتعاشات غیرخطی حرکت غلت شناور"، نشریه مدل سازی در مهندسی. دوره ۱۵، شماره ۴۹، تابستان ۱۳۹۶، صفحه ۱۲۵-۱۳۷.
- [۱۸] حمید نوری سولا، بهار احمدی، عسکر عزیزی و امیر ریخته گر غیائی، "مقاوم‌سازی سیستم شناور مغناطیسی با استفاده از کنترل‌کننده خطی‌ساز فیدبک گام به عقب با رویکرد اغتشاش غیرخطی"، نشریه مدل سازی در مهندسی، دوره ۱۵، شماره ۴۹، تابستان ۱۳۹۶، صفحه ۲۹-۳۸.
- [19] L. Liqin, and T. Yougang, "Stability of ships with water on deck in random beam waves", Journal of Vibration and Control, Vol. 13, No. 3, 2007, pp.269-280.
- [20] L. Liu, and Y. Tang, "The random jumping of ship rolling in narrowband wave considering the static effect of liquid on board", Journal of Vibration and Control, Vol. 19, No. 4, 2013, pp.576-584.
- [21] Y. Scolan, "Technical note on ship rolling associated to high degree polynomial restoring moment using the Melnikov method". Applied ocean research. Vol. 19, No 3-4, 1997, pp.225-234.
- [22] V. V. Bolotin, "Random vibrations of elastic systems", Springer Science and Business Media, 2013.
- [23] A. Papoulis, and S.U. Pillai, " Probability, random variables, and stochastic processes" Tata McGraw-Hill Education, 2002.
- [24] H. Risken, "Fokker-planck equation", The Fokker-Planck Equation", 1996, Springer, pp. 63-95.
- [25] A. Asnafi, and M. Mahzoon, "Using FPK equation to analyze nonlinear behavior of some oscillators under random forcing function", 13th Annual International Mechanical Engineering Conference, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran, 2005.
- [26] G. Cai, and Y. Lin, "Exact and approximate solutions for randomly excited MDOF non-linear systems", International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 31, No. 5, 1996, pp.647-655.
- [27] M. Dimentberg, "An exact solution to a certain non-linear random vibration problem", International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 17, No. 4, 1982, pp.231-236.
- [28] M. Abedi, and A. Asnafi, "To reduce the instability region in the nonlinear transverse vibration of randomly excited plates using orthotropic P-FG material", Nonlinear Dynamics., Vol. 80, No. 3, 2015, pp.1413-1430.
- [29] A. Asnafi, and M. Abedi, "A comparison between the dynamic stability of three types of nonlinear orthotropic functionally graded plates under random lateral loads", Journal of Vibration and Control, Vol. 23, No. 15, 2017, pp.2520-2537.

[30] A. Asnafi, and M. Abedi, "A complete analogical study on the dynamic stability analysis of isotropic functionally graded plates subjected to lateral stochastic loads", Acta Mechanica, Vol. 226, No. 7, 2015, pp.2347-2363.

[۳۱] حامد قوهانی عرب و محمدرضا قاسمی، "روش پیشنهادی نوین و کم‌هزینه در محاسبه احتمال خرابی مسائل مبتنی بر روش مونت کارلو"، نشریه مدل سازی در مهندسی. دوره ۱۶، شماره ۵۴، پاییز ۱۳۹۷، صفحه ۱۸۹-۲۰۳.