

تحلیل غیر خطی ارتعاشات کوپل شده عرضی- طولی در نانوتشدیدگرها تحت نیروی الکترواستاتیک

رضا ابراهیمی^{۱*}

اطلاعات مقاله	چکیده
<p>نوع مقاله: پژوهشی دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۱۱/۰۹ بازنگری مقاله: ۱۴۰۱/۰۱/۲۲ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۲/۰۵</p>	<p>نانوتشدیدگرها می‌توانند در برخی حوزه‌های مهندسی از جمله فیلترهای کیفیت بالا برای سیگنال‌های الکتریکی و سنسورها به کار گرفته شوند. بنابراین هدف اصلی این مقاله، تحلیل رفتار دینامیک غیرخطی نانوتشدیدگرهای تحت نیروی الکترواستاتیکی است. بر اساس تئوری فون کارمن و مدل تیر اوپلر-برنولی، معادلات غیرخطی حاکم بر حرکت با استفاده از اصل همپلتون به دست آمده است. همچنین کوپلینگ ارتعاشات عرضی و طولی در نظر گرفته شده است. معادلات دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر حرکت به وسیله روش گالرکین گسسته‌سازی شده‌اند. حل تحلیلی و عددی به ترتیب با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه و روش رانگ کوتا به دست آمده است. نتایج نشان می‌دهد که فاصله هوایی و فرکانس تنظیم به طور قابل ملاحظه‌ای منحنی‌های پاسخ فرکانسی غیرخطی را تحت تأثیر قرار می‌دهند. یک رفتار سخت-شونده در پاسخ‌های فرکانسی غیرخطی نانوتشدیدگر مشاهده می‌شود. همچنین با مقایسه اثر فاصله هوایی و ولتاژ dc، نتایج حاکی از آن است که فرکانس‌های طبیعی نانوتشدیدگر نسبت به تغییرات ولتاژ dc حساس‌تر هستند. بنابراین، این ویژگی، یک نانوتشدیدگر قابل تنظیم را برای گستره وسیعی از فرکانس‌ها پیشنهاد می‌دهد.</p>
<p>واژگان کلیدی: روش مقیاس‌های چندگانه، نانوتشدیدگر، تحریک الکترواستاتیک، کوپلینگ عرضی-طولی.</p>	

۱- مقدمه

نانوتشدیدگرها از جمله سیستم‌های نانوالکترومکانیکال^۲ (MEMS) هستند که در سال‌های اخیر مورد توجه زیادی قرار گرفته‌اند. امروزه تشدیدگرها در مقیاس‌های میکرو/نانو به خاطر خواص الکتریکی و مکانیکی منحصر به فردشان، در حوزه‌های متنوعی مورد مطالعه قرار می‌گیرند که از آن جمله می‌توان به حسگرها [۱-۵]، تحریک‌کننده‌ها [۶]، سوپچ‌ها [۷] دستگاه‌های پردازش سیگنال [۸] و ... اشاره نمود.

نانوتشدیدگرها برای تشخیص یا تولید موجی با فرکانس مشخص، مورد استفاده قرار می‌گیرند، لذا بازده نانوتشدیدگرها به شدت وابسته به رفتار ارتعاشی آنها است.

این رفتار ارتعاشی نیز تحت تأثیر عوامل غیرخطی مختلفی از جمله نیروی الکترواستاتیک و غیرخطی‌های هندسی می‌باشد.

مدل‌های دینامیکی متنوعی برای توصیف رفتار غیرخطی نانوتشدیدگرها ارائه گردیده که برای حل آنها از روش‌های تحلیلی و عددی مختلفی استفاده شده است. برای مثال، نجار و همکاران [۹] از روش تفاضل مربعات، یونیس و نایفه [۱۰] از روش اغتشاشی و کاسم و همکاران [۱۱] از ترکیب روش بالانس هارمونیک و روش مجانبی عددی بهره گرفته‌اند. سو و یونیس [۱۲]، دینامیک غیرخطی یک نانولوله کربنی^۳ (CNT) تحت نیروهای الکترواستاتیکی را بررسی کردند. در مدل آنها فرم پیچیده نیروی

² Nano Electromechanical Systems

³ Carbon Nano Tube

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: rebrahimi@yu.ac.ir

۱. استادیار مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه یاسوج

لو [۲۱] پاسخ غیرخطی یک نانولوله کربنی یک سرگردار تحت نیروی الکترواستاتیک را در شرایط تشدید اولیه بررسی نمودند. در این مدل سازی، نیروهای واندروالس^۴ در نظر گرفته شدند. نتایج نشان داد که بزرگی ولتاژ تغییر شکل^۵، به طور مستقیم تحت تأثیر مقدار نیروهای واندروالس قرار دارد.

گاسو و همکاران [۲۲] دینامیک غیر خطی و رفتار آشوبناک میکرو/نانو تشدیدگرها با الکتروادهای قرار گرفته در دوطرف را مورد بررسی قرار دادند. نتایج نشان داد که رفتار آشوبناک سیستم در فرکانس های طبیعی پایین و فاکتور کیفیت های کم (میرایی های بیشتر) اتفاق می افتد.

سانپائولو و همکاران [۲۳] به طور تجربی یک نانو تشدیدگر کربنی دوسرگردار را با ولتاژهای ac و dc تحریک نموده و فرکانس های تشدید تا بالای ۳ گیگاهرتز را با میکروسکوپ نیروی اتمی^۶ (AFM) اندازه گیری کردند.

تجددفر و همکاران [۲۴] ارتعاشات آشوبناک میکرو/نانو تشدیدگرهای دو سرگردار منحنی شکل را تحت نیروی الکترواستاتیک بررسی نمودند. معادلات دیفرانسیل پاره ای حرکت بر اساس تئوری تیر اویلر برنولی استخراج شدند. اثر پارامترهای مختلف از جمله منحنی تغییر شکل اولیه، ولتاژ تحریک و فاکتور کیفیت (میرایی) روی رفتار سیستم مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج نشان داد که افزایش دامنه ولتاژ تحریک متناوب، در صورتی که تغییر شکل اولیه سیستم ناچیز باشد، می تواند منجر به وقوع آشوب در رفتار سیستم شود.

گو و همکاران [۲۵] مدلی را برای میرایی ترموالاستیک در میکرو/نانو تشدیدگرها ارائه کردند. اثر عوامل مختلفی از جمله بعد ارتفاع نانو تشدیدگر و نسبت زمان وارفتگی^۷ دما به زمان وارفتگی شار حرارتی روی میرایی ترموالاستیک ارزیابی گردید.

ژائو و همکاران [۲۶] برای مطالعه اثر تنش سطحی روی ارتعاشات عرضی یک نانوتیر، از روش تحلیلی شکل نرمال مختلط^۸ (CNFM) استفاده نمودند. نتایج نشان می دهد که تنش سطحی اثر قابل ملاحظه ای را روی رفتارهای شبه پریودیک و آشوبناک سیستم دارد.

آل منصور و همکاران [۲۷] پس از ارائه مدلی جدید برای

الکترواستاتیکی به کمک جملات محدودی از سری تیلور به فرم ساده تر تبدیل شده است. در نهایت با به کارگیری مدل تیر اویلر برنولی و روش گالرکین، اثر ولتاژ تحریک روی منحنی های پاسخ فرکانسی سیستم به دست آمده است.

اوکاد و یونیس [۱۳] یک مدل غیرخطی دوبعدی را برای بررسی رفتار یک نانو تشدیدگر کربنی به کار گرفتند. نتایج آنها نشان داد که فرکانس های طبیعی و پایداری به طور قابل ملاحظه ای وابسته به تغییر شکل اولیه نانو تشدیدگر می باشد. میان دو آب و همکاران [۱۴] مدلی از میکرو/نانو تشدیدگرها را با پارامترهای متمرکزی از عناصر سختی، جرم و میرایی به صورت گسسته در نظر گرفتند. سپس با استفاده از روش ملینکو [۱۵] به پیش بینی رفتار آشوبناک در این سیستمها پرداختند.

کانلی و همکاران [۱۶] مدل دینامیکی غیرخطی را برای ارتعاشات خمشی نانو تشدیدگرها در دو صفحه عمود برهم ارائه کردند. این مدل برای تعیین شروع حرکات چرخشی^۱ در نانو تشدیدگر استفاده گردید. آموریم و همکاران [۱۷] یک میکرو/نانو تشدیدگر را با نیروهای الکترواستاتیک و کاسمیر^۲ مدل سازی نمودند. سپس از نمای لیاپانوف و نمودار دوشاخگی برای تعیین رفتار آشوبناک سیستم استفاده نمودند. میان دو آب در تحقیق دیگری، رفتار دوشاخگی^۳ یک نانو تشدیدگر را بر اساس تئوری گرادیان کرنشی بررسی نموده است. نتایج نشان داد که بسته به مقدار ولتاژ تحریک، اثر اندازه می تواند حرکت آشوبناک در پاسخ نانو تشدیدگر را تغییر دهند [۱۸].

پسینی و همکاران [۱۹] اندازه گیری هایی را روی نانو تشدیدگر ساخته شده از جنس سیلیکون و طلا گزارش نمودند که به عنوان یک سیستم الکترومکانیکال در محدوده فرکانس امواج رادیویی کار می کند. نتایج نشان داد که از برهم کنش این نانو تشدیدگرها با امواج رادیویی، می توان برای تنظیم فرکانس سیستم استفاده نمود. کوزینسکی و همکاران [۲۰] مکانیزمی را برای افزایش محدوده کاری خطی نانو تشدیدگرها ارائه نمودند که جهت کاربرد در حسگرها مناسب است. برای اعتبارسنجی نتایج تجربی نیز یک مدل تئوری در نظر گرفته شد تا برای طراحی نانو تشدیدگرهای قابل تنظیم به کار گرفته شود. کارونتو و

⁵ Pull-in voltage

⁶ Atomic Force Microscope

⁷ Relaxation

⁸ Complex normal form method

¹ Whirling motions

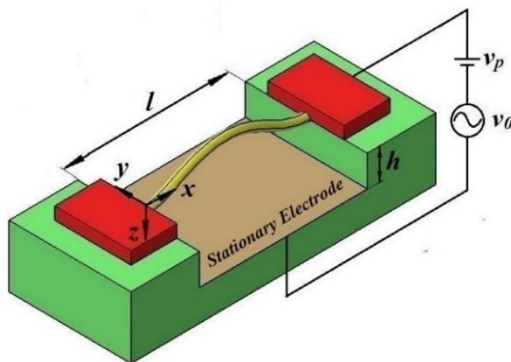
² Casimir force

³ Bifurcation

⁴ Van der waals

به صورت یک تیر دوسرگیردار مدل شده است که تحت نیروی الکترواستاتیکی قرار گرفته است. در این مدل سازی l و h و R به ترتیب طول، فاصله هوایی و شعاع نانوتشدیدگر می باشند. در استخراج معادلات حرکت نانوتشدیدگر فرضیه های زیر به کار گرفته شده است:

- شرایط اولیه نانوتشدیدگر صفر هستند.
- نانوتشدیدگر دارای مقطع عرضی یکنواخت است.
- ارتعاشات عرضی و طولی در نظر گرفته شده است.
- نانوتشدیدگر از مواد همگن ساخته شده است.



شکل ۱- مدل شماتیک نانوتشدیدگر تحت نیروی الکترواستاتیکی

با به کارگیری تئوری فون کارمن و مدل تیر اویلر - برنولی، میدان جابجایی و رابطه کرنش-جابجایی را می توان به شکل زیر بیان نمود [۲۹]:

$$\hat{u}(x, z, t) = u(x, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1)$$

$$\hat{w}(x, z, t) = w(x, t)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

که x مختصات طولی، t زمان، \hat{u} جابجایی کلی در راستای محور x ، \hat{w} جابجایی کلی در راستای محور y ، u جابجایی طولی محور خنثی در راستای محور x ، w جابجایی عرضی محور خنثی در راستای محور y و ε نشان دهنده کرنش کلی هستند. انرژی جنبشی T و انرژی پتانسیل Π ذخیره شده در سیستم به ترتیب عبارتند از:

$$T = \frac{\rho}{2} \int_0^l \left\{ \int_A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} - z \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dA \right\} dx \quad (2)$$

$$\Pi = \frac{E}{2} \int_0^l \left\{ \int_A \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dA \right\} dx$$

نیروی الکترواستاتیکی، به مطالعه اثر اندازه روی رفتار آشوبناک نانوتشدیدگرها تحت نیروی الکترواستاتیکی پرداختند. نتایج نشان داد که با در نظر گرفتن اثر اندازه (به کارگیری تئوری گرادیان کرنشی)، ارتعاشات آشوبناک در مقادیر بالاتری از ولتاژ تحریک، شروع می شود. به عبارت دیگر، تئوری های کلاسیک، وقوع رفتار آشوبناک را به ازای مقادیر کمتری از ولتاژ تحریک، پیش بینی می کنند.

در واقعیت، نانوتشدیدگرها دارای ارتعاشات همزمان عرضی و طولی هستند، هرچند در برخی از مدل ها برای ساده سازی، از ارتعاشات طولی صرف نظر شده است. ما و همکاران [۲۸] ارتعاشات کوپل شده عرضی و طولی یک میکروتشدیدگر را مورد مطالعه قرار دادند. میکروتشدیدگر مورد نظر با مقطع مستطیلی، پس از قرار گرفتن بین دو الکترو ثابت، از هر دو طرف تحت نیروی الکترومغناطیسی قرار گرفته است. نتایج، نشان دهنده پدیده پرش ۱ در دامنه است که این پدیده به شدت تحت تأثیر ولتاژ و فرکانس تنظیم می باشد.

با در نظر گرفتن همزمان ارتعاشات عرضی- طولی و کوپل شدن معادلات، مدل واقعی تری از رفتار نانوتشدیدگر به دست می آید ولی وجود جملات غیرخطی در معادلات، ممکن است پدیده های غیرخطی پیچیده ای را در تحلیل رفتار سیستم مشخص نماید. لذا مطالعه رفتار غیرخطی ارتعاشات کوپل شده عرضی- طولی از اهمیت خاصی برخوردار است. با این وجود، مرور مطالعات پیشین نشان می دهد که بررسی ارتعاشات غیرخطی نانوتشدیدگرهای با مقطع دایره ای، تحت نیروی الکترواستاتیکی، با در نظر گرفتن اثرات کوپلینگ عرضی و طولی تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است. از این رو در مطالعه حاضر پس از ارائه مدلی برای ارتعاشات کوپل شده عرضی- طولی نانوتشدیدگرهای تحت نیروی الکترومغناطیسی، به حل معادلات با روش اغتشاشی مقیاس های چندگانه^۲ پرداخته می شود. سپس اثر ولتاژ تحریک و فاصله هوایی روی فرکانس های طبیعی و منحنی پاسخ فرکانسی سیستم، مورد بررسی قرار می گیرد.

۲- مدل سازی و روش های حل

در این قسمت معادلات حرکت برای مدل نانوتشدیدگر نشان داده شده در شکل (۱) به دست می آیند. نانوتشدیدگر

² Multiple scales method

¹ Jump Phenomenon

$$\begin{aligned} & \eta_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \zeta \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\ & - \eta_1 \eta_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{3}{2} \eta_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \\ & - \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = \beta \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (۸)$$

جدول ۱- پارامترهای بدون بعد

$u = \frac{u}{h}$	$w = \frac{w}{h}$	$x = \frac{x}{l}$
$t = t \sqrt{\frac{EA}{ml^2}}$	$\omega = \frac{\Omega t}{t}$	$\eta_1 = \frac{h}{l}$
$\eta_2 = \frac{l^2 A}{I}$	$\beta = \frac{2\pi \epsilon_0 l^4 v_p v_0}{hEI \left(\ln(2h/R) \right)^2}$	$\zeta = \frac{Cl^3}{I} \sqrt{\frac{A}{mE}}$

۲-۱- گسسته‌سازی معادلات با روش گالرکین

با به‌کارگیری روش گالرکین و استفاده از شکل مود اول ارتعاشات طولی و جانبی، متغیرهای به‌کاررفته در معادلات (۷) و (۸) به صورت زیر جداسازی می‌شوند [۱۲]:

$$u(x, t) = \Phi_1(x) q_1(t) \quad (۹)$$

$$w(x, t) = \Phi_2(x) q_2(t) \quad (۱۰)$$

در روابط بالا $q_i(t)$ مختصات تعمیم‌یافته هستند. توابع ویژه $\Phi_i(x)$ برای یک تیر دوسرگیردار به صورت زیر تعریف می‌شوند [۳۰]:

$$\Phi_1(x) = C_1 \sin(\pi x) \quad (۱۱)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(x) = C_2 \left[\cosh\left(\frac{3\pi x}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right. \\ \left. - \frac{\cosh\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 1} \left(\sinh\left(\frac{3\pi x}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right) \right] \end{aligned} \quad (۱۲)$$

اولین توابع ویژه طولی $\Phi_1(x)$ و عرضی $\Phi_2(x)$ به گونه‌ای نرمال می‌شوند که $\int_0^1 \Phi_1^2(x) dx = \int_0^1 \Phi_2^2(x) dx = 1$ با جایگذاری معادلات (۱۱) و (۱۲) در معادلات (۹) و (۱۰)، جایگذاری عبارات به دست آمده در معادلات (۷) و (۸)، ضرب طرفین هر معادله با تابع ویژه مربوطه و انتگرال‌گیری در بازه $(0, l)$ ، مسئله به یک مدل دو درجه آزادی با معادلات دیفرانسیل معمولی زیر، تقلیل پیدا می‌کند:

$$\ddot{q}_1(t) + \alpha_1 q_1(t) + \alpha_2 q_2^2(t) = 0 \quad (۱۳)$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 \ddot{q}_2(t) + \zeta \dot{q}_2(t) + \alpha_4 q_2(t) + \alpha_5 q_1(t) q_2(t) \\ + \alpha_6 q_2^3(t) = \alpha_7 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (۱۴)$$

که E, A و ρ به ترتیب مدول یانگ، مقطع عرضی و دانسیته نانوتشدیدگر می‌باشند. برای به دست آوردن معادلات حرکت، اصل همیلتون به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۰]:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta \Pi - \delta T - \delta W) dt = 0 \quad (۳)$$

تغییرات در انرژی جنبشی، پتانسیل و کار مجازی δW انجام شده توسط نیروی الکترواستاتیکی مطابق روابط (۴) تا (۶) به دست می‌آیند:

$$\delta T = - \int_0^l m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx \delta u - \int_0^l m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx \delta w \quad (۴)$$

$$\begin{aligned} & + \rho I \int_0^l \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} dx \delta w \\ \delta \Pi = & -EA \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \delta u + EI \int_0^l \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} dx \delta w \\ & - EA \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} dx \delta u - \frac{3EA}{2} \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \delta w \\ & - EA \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \delta w \end{aligned}$$

که m و I به ترتیب جرم بر واحد طول و ممان اینرسی سطح مقطع نانوتشدیدگر می‌باشند. کار مجازی ناشی از میرایی و نیروی الکترواستاتیکی $F(x, t)$ عبارت است از:

$$\delta W = \int_0^l \left(F(x, t) - C \frac{\partial w}{\partial t} \right) dx \delta w \quad (۵)$$

که C ضریب میرایی بر واحد طول است. بر اساس تئوری الکترودینامیک، برای مدل‌سازی نیروی الکترواستاتیکی، نانوتشدیدگر مانند یک استوانه بالای یک صفحه رسانا به صورت زیر مدل می‌شود [۱۶ و ۳۱]:

$$F(x, t) = \frac{2\pi \epsilon_0 v_p v_0}{\left(\ln(2h/R) \right)^2} \cos(\Omega t) \quad (۶)$$

در رابطه (۶)، ϵ_0 ثابت گذردهی خلاء، v_p ولتاژ ثابت، v_0 دامنه ولتاژ متناوب و Ω فرکانس ولتاژ متناوب است. لازم به ذکر است که شرایط مرزی گیردار نانوتشدیدگر منجر به شیب و تغییر شکل صفر در نقاط ابتدایی و انتهایی می‌شود. همچنین همه متغیرها و مشتقاتشان در $t=t_0$ و $t=t_1$ برابر صفر هستند. لذا با جایگذاری معادله (۴) و (۵) در معادله (۳)، همه عبارات شامل $[\cdot]_0^l$ و $[\cdot]_0^l$ حذف خواهند شد. با معرفی پارامترهای بدون بعد داده شده در جدول ۱، معادلات دیفرانسیل پاره‌ای غیرخطی کوپل شده حرکت به صورت روابط (۷) و (۸) حاصل می‌شوند.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (۷)$$

مقادیر ویژه به دست آمده، حاصل شوند.

۲-۳- تحلیل غیرخطی و روش مقیاس‌های چندگانه

در این مقاله برای تحلیل رفتار غیرخطی سیستم از روش مقیاس‌های چندگانه استفاده شده است [۳۳ و ۳۴]. برای اعمال این روش، با در نظر گرفتن اغتشاش کوچک ε معادلات (۱۳) و (۱۴) به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\ddot{q}_1(t) + \alpha_1 q_1(t) + \varepsilon \alpha_2 q_2^2(t) = 0 \quad (20)$$

$$\alpha_3 \ddot{q}_2(t) + \alpha_4 q_2(t) + \varepsilon \zeta \dot{q}_2(t) + \varepsilon \alpha_5 q_1(t) q_2(t) + \varepsilon \alpha_6 q_2^3(t) = \varepsilon \alpha_7 \cos(\omega t) \quad (21)$$

در روش مقیاس‌های چندگانه، به واسطه رفتار غیرخطی، مقیاس‌های زمانی به صورت $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t$ و ... معرفی می‌شوند. لذا مشتقات زمانی عبارت‌اند از [۳۲]:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 \quad (22)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) \quad (23)$$

که $D_n = \partial / \partial T_n$ است. در ادامه، پاسخ معادلات (۲۰) و (۲۱) برحسب مقیاس‌های زمانی به صورت زیر تخمین زده می‌شود:

$$q_1(t, \varepsilon) = \gamma_0(T_0, T_1) + \varepsilon \gamma_1(T_0, T_1) \quad (24)$$

$$q_2(t, \varepsilon) = \lambda_0(T_0, T_1) + \varepsilon \lambda_1(T_0, T_1) \quad (25)$$

با جایگذاری روابط (۲۲) تا (۲۵) در معادلات (۲۰) و (۲۱) و مساوی قرار دادن جملات با توان‌های یکسان ε در دو طرف معادله حاصل شده، مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل به صورت روابط (۲۶) تا (۲۹) به دست می‌آید.

$$(\varepsilon^0): (D_0^2 + \omega_1^2) \gamma_0(T_0, T_1) = 0 \quad (26)$$

$$(\varepsilon^0): (D_0^2 + \omega_2^2) \lambda_0(T_0, T_1) = 0 \quad (27)$$

$$(\varepsilon^1): (D_0^2 + \omega_1^2) \gamma_1(T_0, T_1) = -\alpha_2 \lambda_0^2(T_0, T_1) - 2D_0 D_1 \gamma_0(T_0, T_1) \quad (28)$$

$$(\varepsilon^1): (D_0^2 + \omega_2^2) \lambda_1(T_0, T_1) = -\zeta D_0 \lambda_0(T_0, T_1) - 2D_0 D_1 \lambda_0(T_0, T_1) - \frac{\alpha_5}{\alpha_3} \gamma_0(T_0, T_1) \lambda_0(T_0, T_1) - \frac{\alpha_6}{\alpha_3} \lambda_0^3(T_0, T_1) + \frac{\alpha_7}{2\alpha_3} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad (29)$$

که ضرایب ثابت تعریف شده در معادلات بالا عبارت‌اند از:

$$\alpha_1 = \pi^2 \quad (15)$$

$$\alpha_2 = -\eta_1 \int_0^1 \Phi_1(x) \Phi_2'(x) \Phi_2''(x) dx$$

$$\alpha_3 = \eta_2 - \int_0^1 \Phi_2(x) \Phi_2''(x) dx$$

$$\alpha_4 = \left(\frac{3\pi}{2}\right)^4$$

$$\alpha_5 = \eta_1 \eta_2 \int_0^1 (\pi)^2 \Phi_1(x) \Phi_2(x) \Phi_2'(x) dx - \eta_1 \eta_2 \int_0^1 \Phi_1'(x) \Phi_2(x) \Phi_2''(x) dx$$

$$\alpha_6 = -\frac{3}{2} \eta_1^2 \eta_2 \int_0^1 \Phi_2(x) \Phi_2'^2(x) \Phi_2''(x) dx$$

$$\alpha_7 = \beta \int_0^1 \Phi_2(x) dx$$

۲-۲- خطی‌سازی و مسئله مقدار ویژه

حل مسئله مقدار ویژه و محاسبه فرکانس‌های طبیعی، پس از خطی‌سازی معادلات حرکت سیستم انجام می‌شود. برای این منظور لازم است که معادلات (۱۳) و (۱۴) مطابق رابطه زیر به فرم فضای حالت نوشته شوند:

$$\dot{X} = R(X) \quad (16)$$

به طوری که $X = [q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2]^T$ بردار مختصات تعمیم‌یافته و R تابع غیرخطی از مختصات تعمیم‌یافته می‌باشد. بردار مختصات تعمیم‌یافته X را می‌توان به مؤلفه استاتیکی X_s و دینامیکی X_d تفکیک نمود:

$$X = X_s + X_d \quad (17)$$

مؤلفه استاتیکی X_s نشان‌دهنده موقعیت تعادل ناشی از ولتاژ تحریک dc و مؤلفه دینامیکی X_d نشان‌دهنده نوسانات ناشی از ولتاژ تحریک ac حول موقعیت تعادل هستند. با جایگذاری رابطه (۱۷) در معادله (۱۶)، به کارگیری بسط تیلور با فرض نوسانات کوچک X_d و با توجه به اینکه $R(X_s) = 0$ معادله زیر به دست می‌آید:

$$\dot{X}_d = J(X_s) X_d \quad (18)$$

در رابطه فوق $J(X_s)$ ماتریس ژاکوبین محاسبه شده در نقاط تعادل است. به این ترتیب مقادیر ویژه با حل معادله مشخصه زیر محاسبه می‌شوند [۳۲]:

$$\det(J(X_s) - \lambda I) = 0 \quad (19)$$

که I ماتریس همانی و λ مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین هستند. نهایتاً فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌توانند با جذر

$$b' = \frac{\alpha_5}{4\alpha_3\omega_2} ab \sin \psi_1 - \frac{\alpha_7}{2\alpha_3\omega_2} \sin \psi_2 - \frac{\zeta\omega_2}{2} b \quad (۴۰)$$

$$\psi_2' = \frac{\alpha_5}{4\alpha_3\omega_2} a \cos \psi_1 - \frac{\alpha_7}{2\alpha_3\omega_2} \frac{\cos \psi_2}{b} + \sigma_2 \quad (۴۱)$$

که برای حل حالت پایدار باید مشتقات زمانی در سمت چپ معادلات (۳۸) تا (۴۱) برابر صفر قرار داده شوند. در نهایت پاسخ فرکانسی سیستم با حل دستگاه معادلات جبری به دست آمده از سمت راست معادلات (۳۸) تا (۴۱) به دست می آید.

۳- نتایج و بحث

در این قسمت دو هدف کلی دنبال می شود. نخست فرکانس های طبیعی ارتعاشات طولی و عرضی نانو تشدیدگر تحت نیروی الکترواستاتیکی، با تغییر در برخی پارامترهای طراحی مانند ولتاژ تحریک و فاصله هوایی بررسی شده - است. در ادامه، پس از ساده سازی هایی روی مدل، به اعتبارسنجی روش حل ارائه شده، پرداخته شده است. هدف کلی بعدی، تحلیل رفتار غیرخطی نانو تشدیدگر با در نظر گرفتن اثرات کوپلینگ ارتعاشات طولی و عرضی می باشد. برای این منظور کلیه کدهای مورد نیاز برای انجام تحلیل- های فوق، در نرم افزار متلب آماده گردیده است. مشخصات هندسی و پارامترهای فیزیکی نانو تشدیدگر مورد مطالعه نیز، در جدول ۲ داده شده است [۱۳].

جدول ۲- مقادیر مشخصات پایه نانو تشدیدگر کربنی

پارامتر	نماد	مقدار	واحد
فاصله هوایی	h	۵۰۰	nm
طول	l	۳۰۰۰	nm
شعاع	R	۱	nm
ثابت گذردهی خلاء	ϵ_0	8.854×10^{-12}	F/m
مدول یانگ	E	۱/۲	TPa

۳-۱- فرکانس های طبیعی

با به کارگیری رابطه (۱۹) فرکانس های طبیعی ارتعاشات طولی و عرضی سیستم، برای مقادیر مختلف فاصله هوایی و ولتاژ تحریک محاسبه و در شکل (۲) نشان داده شده اند. همان طور که در این نمودارها مشخص است، با افزایش سطح ولتاژ تحریک dc، مقادیر فرکانس های طبیعی سیستم کاهش می یابد. همچنین افزایش فاصله هوایی، منجر به افزایش مقادیر فرکانس های طبیعی می شود. لازم

در معادلات بالا $\omega_1^2 = \alpha_1$ و $\omega_2^2 = \alpha_4/\alpha_3$ می باشند. برای نشان دادن حالت تشدید داخلی دو به یک و تشدید خارجی ارتعاشات عرضی، روابط فرکانسی زیر با دو پارامتر σ_1 و σ_2 در نظر گرفته می شوند:

$$\omega_1 = 2\omega_2 - \epsilon\sigma_1 \quad (۳۰)$$

$$\omega = \omega_2 - \epsilon\sigma_2 \quad (۳۱)$$

حل کلی معادلات (۲۶) و (۲۷) به فرم روابط (۳۲) و (۳۳) تعریف می شوند.

$$\gamma_0(T_0, T_1) = A_0(T_1)e^{i\omega_1 T_0} + \bar{A}_0(T_1)e^{-i\omega_1 T_0} \quad (۳۲)$$

$$\lambda_0(T_0, T_1) = B_0(T_1)e^{i\omega_2 T_0} + \bar{B}_0(T_1)e^{-i\omega_2 T_0} \quad (۳۳)$$

که $\bar{A}_0(T_1)$ و $\bar{B}_0(T_1)$ به ترتیب مزدوج مختلط $A_0(T_1)$ و $B_0(T_1)$ هستند. با جایگذاری حل های (۳۲) و (۳۳) در معادلات (۲۸) و (۲۹) و حذف ترم های سکولار، معادلات زیر به دست می آید:

$$\alpha_2 B_0^2(T_1)e^{i\sigma_1 T_1} + 2i\omega_1 \frac{dA_0(T_1)}{dT_1} = 0 \quad (۳۴)$$

$$\frac{\alpha_7}{2\alpha_3} e^{-i\sigma_2 T_1} - 2i\omega_2 \frac{\partial B_0(T_1)}{\partial T_1} - i\zeta\omega_2 B_0(T_1) \quad (۳۵)$$

$$+ 3B_0^2(T_1)\bar{B}_0(T_1) - \frac{\alpha_5}{\alpha_3} A_0(T_1)\bar{B}_0(T_1)e^{-i\sigma_1 T_1} = 0$$

پارامترهای $A_0(T_1)$ و $B_0(T_1)$ را می توان به کمک متغیرهای $a(T_1)$ ، $b(T_1)$ و $\varphi_1(T_1)$ و $\varphi_2(T_1)$ که توابع حقیقی نسبت به زمان T_1 هستند، به فرم قطبی زیر بازنویسی نمود:

$$A_0(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1).e^{i\varphi_1} \quad (۳۶)$$

$$B_0(T_1) = \frac{1}{2} b(T_1).e^{i\varphi_2} \quad (۳۷)$$

که a و b به ترتیب دامنه ارتعاشات طولی و عرضی سیستم هستند. پارامترهای φ_1 و φ_2 نیز نشان دهنده فاز ارتعاشات طولی و عرضی سیستم می باشند. با جایگذاری معادلات (۳۶) و (۳۷) در معادلات (۳۴) و (۳۵) و جداسازی قسمت های حقیقی و موهومی، معادلات زیر حاصل می شوند:

$$a' = -\frac{\alpha_2}{4\omega_1} b^2 \sin \psi_1 \quad (۳۸)$$

$$\psi_1' = \left(\frac{\alpha_5}{2\alpha_3\omega_2} a - \frac{\alpha_2}{4\omega_1} \frac{b^2}{a} \right) \cos \psi_1 - \frac{\alpha_7}{\alpha_3\omega_2} \frac{\cos \psi_2}{b} + \sigma_1 \quad (۳۹)$$

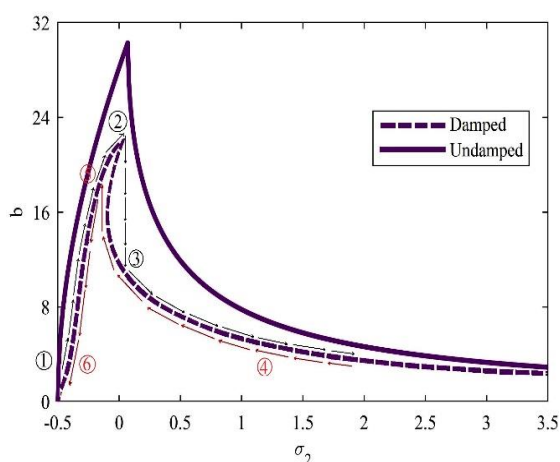
عرضی محاسبه گردیده است. این فرکانس، با اولین فرکانس طبیعی موجود در مرجع [۱۳] مقایسه شده و در جدول ۳ ارائه گردیده است.

جدول ۳- مقایسه اولین فرکانس طبیعی محاسبه شده در پژوهش حاضر و مرجع [۱۳] به ازای ولتاژ تحریک $V_p=6 V$

خطا (%)	مرجع [۱۳] (بدون بعد)	پژوهش حاضر (بدون بعد)
۲/۱۶	۵۰۰	۴۸۹/۱۷۱

۳-۲- منحنی‌های پاسخ فرکانسی

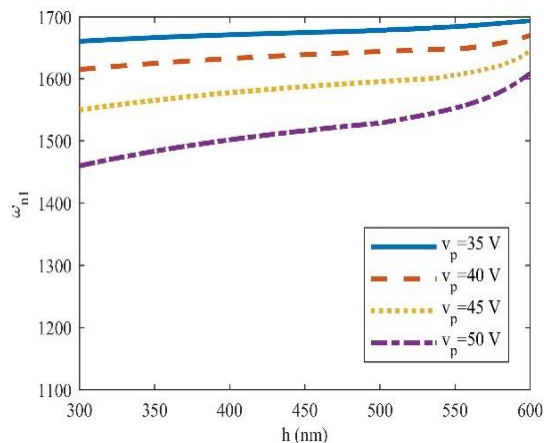
با به کارگیری روابط (۳۸) تا (۴۱)، منحنی پاسخ فرکانسی ارتعاشات عرضی نانوتشددگر در حالت میرا و نامیرا، برای فاصله هوایی $h=300 \text{ nm}$ ترسیم و در شکل (۳) نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که افزایش میرایی باعث کاهش دامنه نوسانات می‌شود. همچنین در پاسخ فرکانسی سیستم میرا، یک پدیده پرش مشاهده می‌شود. بطوریکه با افزایش پارامتر تنظیم فرکانس σ_2 ، منحنی پاسخ فرکانسی میرا، مسیر ۱ تا ۲ را طی کرده و در نقطه ۲ به دامنه ماکزیمم می‌رسد. در این هنگام با اتفاق پدیده پرش، منحنی پاسخ فرکانسی از نقطه ۲ به نقطه ۳ می‌رسد. در حالت کاهش پارامتر تنظیم فرکانس، منحنی پاسخ فرکانسی مسیر ۴ تا ۵ را طی کرده و سپس با اتفاق پدیده پرش، به نقطه ۶ می‌رسد.



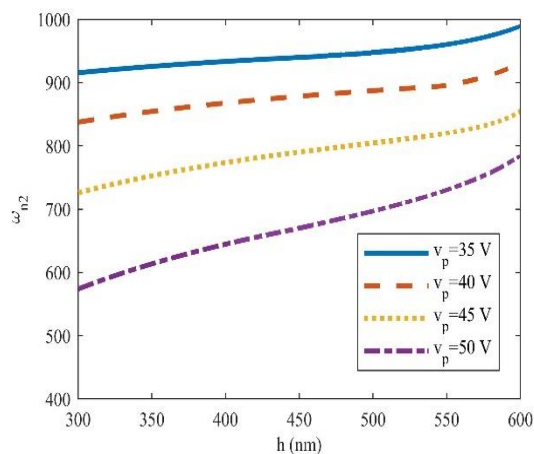
شکل ۳- منحنی پاسخ فرکانسی در حالت میرا و نامیرا به ازای فاصله هوایی $h=300 \text{ nm}$

در ادامه، پاسخ فرکانسی ارتعاشات طولی و عرضی نانوتشددگر به ازای مقادیر مختلف فاصله هوایی ترسیم و در شکل (۴) نشان داده شده است.

به ذکر است که به ازای مقادیر بالاتر ولتاژ تحریک، اثر تغییرات فاصله هوایی روی اندازه فرکانس‌های طبیعی بیشتر است. مقایسه فرکانس‌های طولی و عرضی نشان می‌دهد که حساسیت فرکانس‌های ارتعاشات عرضی در برابر تغییر سطح ولتاژ، نسبت به فرکانس‌های ارتعاشات طولی بیشتر است. در نهایت، تغییر در فرکانس‌های طبیعی، قابلیت طراحی یک نانوتشددگر قابل تنظیم را برای گستره وسیعی از فرکانس‌ها فراهم می‌کند.



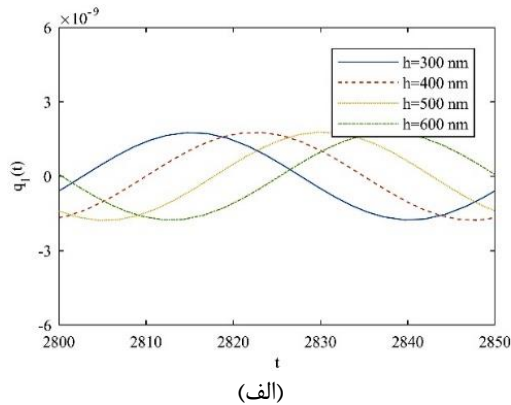
(الف)



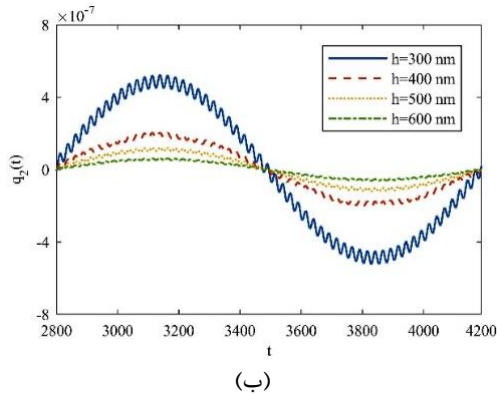
(ب)

شکل ۲- تغییرات (الف) فرکانس طبیعی طولی ω_{n1} و (ب) عرضی ω_{n2} نانوتشددگر به ازای مقادیر مختلف ولتاژ تحریک و فاصله هوایی.

از آنجایی که ارتعاشات کوپل شده عرضی-طولی نانوتشددگر با مقطع دایره‌ای در تحقیقات پیشین ارائه نشده است، برای اعتبارسنجی نتایج، لازم است ساده سازی‌هایی روی مدل صورت گیرد. لذا با صفر قرار دادن ضریب α_5 در معادله (۱۴)، از عامل کوپلینگ ارتعاشات عرضی - طولی صرف نظر شده و اولین فرکانس طبیعی بدون بعد



(الف)

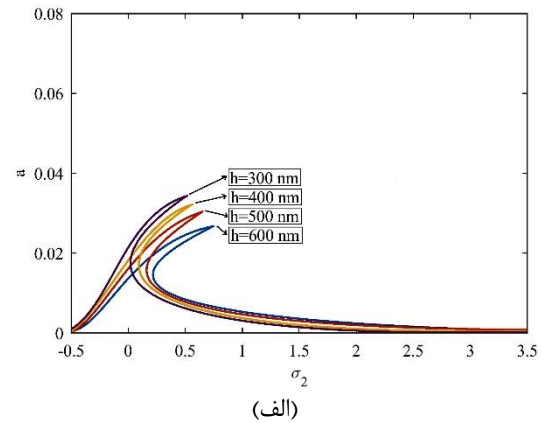


(ب)

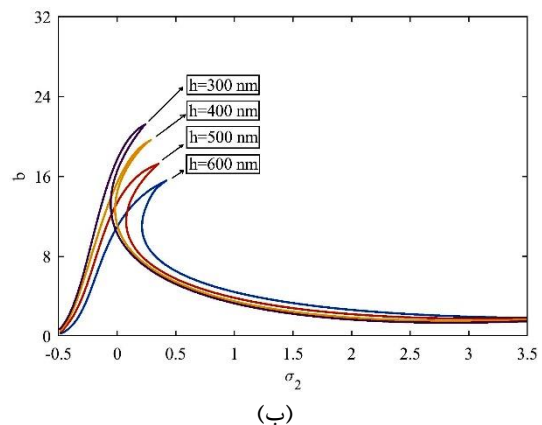
شکل ۵- پاسخ زمانی ارتعاشات (الف) طولی (ب) عرضی نانو تشدیدگر به ازای مقادیر مختلف فاصله هوایی.

۴- نتیجه گیری

در پژوهش حاضر، تئوری تیر اویلر - برنولی همراه با کرنش غیرخطی فون کارمن برای مدل سازی ارتعاشات کوپل شده عرضی- طولی نانو تشدیدگرهای تحت نیروی الکترواستاتیکی، به کار گرفته شد. برای گسسته سازی معادلات دیفرانسیل پاره ای حاکم بر سیستم، از روش گالرکین استفاده شد. برای تحلیل فرکانس های طبیعی سیستم، معادلات به دست آمده به وسیله ماتریس ژاکوبین خطی سازی شدند. منحنی های پاسخ فرکانسی سیستم با روش مقیاس های چندگانه به دست آمد. پاسخ زمانی سیستم نیز پس از حل عددی معادلات با روش رانگ کوتا، ارائه گردید. اثر پارامترهای کاری مختلف از جمله فاصله هوایی و ولتاژ تحریک روی رفتار غیرخطی سیستم مورد بررسی قرار گرفت. با توجه به بررسی های انجام گرفته، موارد زیر قابل استنباط می باشند:



(الف)



(ب)

شکل ۴- منحنی پاسخ فرکانسی (الف) ارتعاشات طولی (ب) عرضی نانو تشدیدگر به ازای مقادیر مختلف فاصله هوایی.

همانطور که ملاحظه می شود، با کاهش فاصله هوایی و نتیجتاً افزایش نیروی الکترواستاتیکی، دامنه ارتعاشات طولی و عرضی نانو تشدیدگر افزایش می یابد. همچنین این نمودارها نشان دهنده پدیده پرش و یک رفتار سخت شونده (منحرف شدن نقطه ماکزیمم دامنه به سمت راست) برای ارتعاشات طولی و عرضی نانو تشدیدگر تحت نیروی الکترواستاتیکی می باشند. این اثر سخت شونگی برای فواصل هوایی بزرگتر، قوی تر است.

به منظور بررسی دقیق تر، حل عددی معادلات (۱۳) و (۱۴) نیز در نرم افزار متلب و به کمک روش رانگ کوتای^۱ مرتبه چهارم، انجام گرفته و از خروجی آنها برای تعیین پاسخ زمانی سیستم استفاده شده است. در این تحلیل، با در نظر گرفتن شرایط اولیه صفر، پاسخ ارتعاشات طولی و عرضی ترسیم و در شکل (۵) نشان داده شده است. این نتایج تأییدکننده کاهش دامنه نوسانات ارتعاشات عرضی و عدم تغییر فرکانس پاسخ با کاهش پارامتر فاصله هوایی می باشد.

¹ Runge-Kutta methods

- افزایش میزان ولتاژ تحریک، به پایدارتر شدن شرایط عملکرد دینامیکی سیستم منجر خواهد شد.
 - با تغییر ولتاژ تحریک، فرکانس‌های عرضی در مقایسه با فرکانس‌های طولی، تغییرات بیشتری را از خود نشان می‌دهند.
 - تغییرات ولتاژ تحریک روی فرکانس‌های طبیعی، اثرگذارتر از تغییرات فاصله هوایی است.
 - منحنی‌های پاسخ فرکانسی با تغییر فرکانس تنظیم، اثر غیرخطی سخت‌شوندگی از خود نشان می‌دهند.
 - دامنه پاسخ فرکانسی، با افزایش فاصله هوایی کاهش یافته و میزان سخت‌شوندگی افزایش می‌یابد.
 - فرکانس نوسانات پاسخ زمانی سیستم با تغییرات فاصله هوایی، ثابت باقی می‌ماند.
- نتایج این مطالعه می‌تواند با ارائه یک مدل واقعی‌تر برای طراحی و بهبود عملکرد نانوتشدیدگرها مورد استفاده قرار گیرد. به طوری که با انتخاب پارامترهای طراحی مناسب، محدوده فرکانسی مورد انتظار حاصل گردد.

مراجع

- [1] A. Hajjam, and S. Pourkamali, "Fabrication and characterization of MEMS-based resonant organic gas sensors", *IEEE Sensors Journal*, Vol. 12, 2012, pp. 1958-1964.
- [۲] احمد محب‌زاده بهابادی و سعید علیانی، "طراحی و مدل‌سازی حسگر زیستی مبتنی بر نانوتشدیدگر کریستال فوتونی"، *مجله مدل‌سازی در مهندسی*، دوره ۱۵، شماره ۵۱، زمستان ۱۳۹۶، صفحه ۳۵۱-۳۵۸.
- [3] R. Hosseini-Ara, A. Mokhtarian, A.H. Karamrezaei, D. Toghraie, "Computational analysis of high precision nano-sensors for diagnosis of viruses: Effects of partial antibody layer", *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 192, 2022, pp. 384-398.
- [4] E. Heydari, A. Mokhtarian, M. Pirmoradian, M. Hashemian, A. Seifzadeh, "Acoustic wave transmission of double-walled functionally graded cylindrical microshells under linear and nonlinear temperature distributions using modified strain gradient theory", *Thin-Walled Structures*, Vol. 169, 2021, pp. 108430.
- [۵] محسن نودرپورشمی، محمد هاشمیان و مصطفی پیرمردیان، "تحلیل دینامیکی میکروتیر مدرج تابعی دارای جرم متحرک بر اساس تئوری زوج تنش اصلاح شده"، *نشریه مهندسی مکانیک*، دوره ۲۲، شماره ۳، آذر ۱۳۹۹، صفحه ۱۴۲-۱۶۳.
- [6] H.G. Craighead, "Nanoelectromechanical Systems", *Science*, Vol. 290, 2000, pp. 1532-1535.
- [7] J.S. Go, Y. Cho, B.M. Kwak, and P. Kwanhum, "Snapping microswitch with adjustable acceleration threshold", *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 54, 1996, pp. 579-583.
- [8] R. Mestrom, R. Fey, J. Van Beek, and K. Phan, "Nijmeijer H. Modelling the dynamics of a MEMS resonator: Simulations and experiments", *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 142, 2008, pp. 306-315.
- [9] F. Najjar, S. Choura, S. El-Borgi, E. Abdel-Rahman, and A. Nayfeh, "Modeling and design of variable-geometry electrostatic microactuators", *Journal of Micro-mechanics and Microengineering*, Vol. 15, 2005, pp.419-429.
- [10] M. Younis, and A. Nayfeh, "A study of the nonlinear response of a resonant microbeam to an electric actuation", *Nonlinear dynamics*, Vol. 31, 2003, pp. 97-117.
- [11] N. Kacem, S. Bagnuet, S. Hentz, and R. Dufour, "Computational and quasi-analytical models for nonlinear vibrations of resonant MEMS and NEMS sensors", *International journal of non-linear mechanics*, Vol. 46, 2011, pp. 532-542.
- [12] T. Xu, and M.I. Younis, "Nonlinear dynamics of carbon nanotubes under large electrostatic force", *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Vol. 11, 2016, pp. 021009.
- [13] H.M. Ouakad, and M.I. Younis, "Natural frequencies and mode shapes of initially curved carbon nanotube resonators under electric excitation". *Journal of sound and vibration*, Vol. 330, 2011, pp. 3182-3195.
- [14] E.M. Miandoab, H.N. Pishkenari, A. Yousefi-Koma, and F. Tajaddodianfar, "Chaos prediction in MEMS-NEMS resonators", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 82, 2014, pp. 74-83.
- [15] M.S. Siewe, and U.H. Hegazy, "Homoclinic bifurcation and chaos control in MEMS resonators", *Applied mathematical modelling*, Vol. 35, 2011, pp. 5533-5552.

- [16] W.G. Conley, A. Raman, C.M. Krousgrill, and S. Mohammadi, "Nonlinear and nonplanar dynamics of suspended nanotube and nanowire resonators", *Nano letters*, Vol. 8, 2008, pp. 1590-1595.
- [17] T.D. Amorim, W.G. Dantas, and A. Gusso, "Analysis of the chaotic regime of MEMS/NEMS fixed-fixed beam resonators using an improved 1DOF model", *Nonlinear dynamics*, Vol. 79, 2015, pp. 967-981.
- [18] E.M. Miandoab, "Onset of chaos in nano-resonators based on strain gradient theory: Numerical analysis", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 101, 2021, pp. 105864.
- [19] L. Pescini, H. Lorenz, and R.H. Blick, "Mechanical gating of coupled nanoelectromechanical resonators operating at radio frequency", *Applied Physics Letters*, Vol. 82, 2003, pp. 352-354.
- [20] I. Kozinsky, H.W.C. Postma, I. Bargatin, and M.L. Roukes, "Tuning nonlinearity, dynamic range, and frequency of nanomechanical resonators". *Applied Physics Letters*, Vol. 88, 2006, pp. 253101.
- [21] D.I. Caruntu, and L. Luo, "Bifurcation and pull-in voltages of primary resonance of electrostatically actuated SWCNT cantilevers to include van der Waals effect", *Meccanica*, Vol. 52, 2017, pp.849-859.
- [22] A. Gusso, R.L. Viana, A.C. Mathias, and I.L. Caldas, "Nonlinear dynamics and chaos in micro/nanoelectromechanical beam resonators actuated by two-sided electrodes", *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 122, 2019, pp. 6-16.
- [23] A. San Paulo, J. Black, D. Garcí'a-Sanchez, M.J. Esplandiu, A. Aguasca, J. Bokor, F. Perez-Murano, and A. Bachtold, "Mechanical detection and mode shape imaging of vibrational modes of micro and nanomechanical resonators by dynamic force microscopy", *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 100, 2008, pp. 052009.
- [24] F. Tajaddodianfar, M.R.H. Yazdi, and H.N. Pishkenari, "On the chaotic vibrations of electrostatically actuated arch micro/nano resonators: a parametric study", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 25, 2015, pp. 1-16.
- [25] F.L. Guo, G.Q. Wanga, and G.A. Rogerson, "Analysis of thermoelastic damping in micro- and nanomechanical resonators based on dual-phase-lagging generalized thermoelasticity theory", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 60, 2012, pp. 59-65.
- [26] D. Zhao, J. Liu, and L. Wang, "Nonlinear free vibration of a cantilever nanobeam with surface effects: Semi-analytical solutions", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 113, 2016, pp. 184-195.
- [27] H. Alemansour, E.M. Miandoab, and H.N. Pishkenari, "Effect of size on the chaotic behavior of nano resonators". *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 44, 2017, pp. 495-505.
- [28] C. Ma, L. Cao, L. Li, M. Shao, D. Jing, Z. Guo, "Nonlinear Behavior of Electrostatically Actuated Microbeams with Coupled Longitudinal-Transversal Vibration". *Micromachines*, Vol. 10, 2019, pp. 315.
- [29] Y.D. Kuang, X.Q. He, C.Y. Chen, G.Q. Li, "Analysis of nonlinear vibrations of double-walled carbon nanotubes conveying fluid". *Computational Materials Science*, Vol. 45, 2009, pp. 875-880.
- [30] L. Meirovitch, *Principles and techniques of vibrations*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J., 1997.
- [31] D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Prentice-Hall, Englewood cliffs, N.J., 1981.
- [32] A.H. Nayfeh, and B. Balachandran, *Applied non-linear dynamics: analytical, computational and experimental methods*, Wiley, New York, 1995.

[۳۳] محمد مهدی جلیلی و محمد مصعب درعلی زاده، "مدل سازی و تحلیل ارتعاشات غیرخطی میکروسکوپ نیروی اتمی در محیط مایع به روش تحلیلی"، *مجله مدل سازی در مهندسی*، دوره ۱۵، شماره ۵۱، زمستان ۱۳۹۶، صفحه ۲۰۹-۲۲۴.

[۳۴] محمد مهدی جلیلی، سعید ابراهیمی و ندا رحمت، "شبیه سازی و آنالیز حساسیت ارتعاشات غیرخطی حرکت غلت شناور"، *مجله مدل سازی در مهندسی*، دوره ۱۵، شماره ۴۹، تابستان ۱۳۹۶، صفحه ۱۲۵-۱۳۷.