

## آنالیز پایداری سیستم های فازی چندجمله‌ای مرتبه کسری به روش مجموع مربعات

حسن یعقوبی<sup>۱</sup>، آصف زارع<sup>۲\*</sup>

چکیده	اطلاعات مقاله
<p>در این مقاله آنالیز پایداری سیستم‌های فازی چندجمله‌ای مرتبه کسری به روش مجموع مربعات مورد بررسی قرار گرفته است و برخلاف مدل فازی T-S که تنها قابلیت کار با ماتریس‌های ثابت را دارد در این روش با چندجمله‌ای‌ها، در ماتریس‌های سیستم سروکار داریم. بنابراین نمایش مدل سیستم غیرخطی با استفاده از چندجمله‌ای‌ها روشی کارآمدتر است. نکته اصلی در برتری روش آن است که در روش پایدارسازی سیستم‌های مرتبه کسری بر اساس مدل فازی T-S، شرایط پایدارسازی بر اساس تئوری پایداری لیاپانوف و بوسیله نامساوی ماتریسی خطی (LMI) بیان می‌گردد. در حالیکه آنالیز پایداری بر اساس مدل فازی چندجمله‌ای بوسیله تابع لیاپانوف چندجمله‌ای و در قالب مجموع جملات مربعی (SOS) بیان می‌گردد و در سیستم‌هایی که روش‌های بهینه‌سازی LMI کارساز نیست، آنالیز پایداری و طراحی کنترلر را میتوان با این روش انجام داد. از لحاظ عددی توسط ابزار sostoos که اخیراً توسعه یافته شده است، می‌توان تابع لیاپانوف چندجمله‌ای را بدست آورد. در این مقاله، شرایط پایداری یک سیستم فازی چندجمله‌ای مرتبه کسری مورد بررسی قرار گرفته و شرایط لازم و کافی برای پایداری بدست آمده است و در پایان نیز با ذکر یک مثال صحت و درستی روش پیشنهادی نشان داده شده است.</p>	<p>نوع مقاله: پژوهشی دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۱۰/۱۴ بازنگری مقاله: ۱۴۰۱/۰۳/۰۴ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۴/۲۲</p> <p><b>واژگان کلیدی:</b> مقاله، شیوه نامه تدوین، نویسنده، چاپ، شکل، جدول، فرمول، نتایج.</p>

### ۱-مقدمه

آنالیز پایداری و پایدارسازی سیستم‌های مرتبه کسری انجام شده است [۶و۵] که این موضوع نیز به یکی از موارد مورد علاقه محققان تبدیل شده است. این مطالعات شامل سیستم‌های خطی و غیرخطی است که در مورد سیستم‌های خطی آنالیز پایداری و پایدارسازی توسط روش‌های مختلفی مانند LMI<sup>۳</sup> انجام می‌شود [۸و۷]. اولین مطالعه در مورد پایداری سیستم‌های مرتبه کسری خطی مربوط به سال ۱۹۹۶ و توسط ماتینون<sup>۴</sup> است [۹]. و بعد از آن محققان زیادی در مورد پایداری سیستم‌های

سیستم‌های مرتبه کسری قابلیت بالایی را در بحث مدل سازی سیستم‌های فیزیکی و مهندسی داشته و دقت بالاتری را نسبت به مدل سازی با دیگر روش‌ها دارند [۱] که با استفاده از این قابلیت می‌توان سیستم‌های مرتبه کسری را در کاربردهای مختلف بکار برد [۲]. اما این دقت بالا در مدل سازی باعث پیچیدگی این روش می‌شود که برای حل پیچیدگی این مدل‌ها نیز روش‌های جدیدی ارائه گردیده است [۳و۴]. اخیراً نیز مطالعات زیادی در مورد

\* پست الکترونیک نویسنده مسئول: assefzare@gmail.com

۱. دانشجوی دکتری برق، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه آزاد اسلامی واحد گناباد

۲. دانشیار، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه آزاد اسلامی واحد گناباد

<sup>۳</sup> Linear matrix inequality

<sup>۴</sup> Matignon

پایداری بدست آمده است. مقالات [۲۰ و ۱۹] نیز بر اساس روش LMI نتایج آنها بدست آمده است و شرایط پایداری مقاوم و پایدارسازی برای یک سیستم مرتبه کسری بدست آمده است.

رویکرد طراحی با LMI بر اساس حل مسأله بهینه‌سازی با روشهای عددی است. گرچه روشهای طراحی براساس LMI از موفقیت های بزرگی برخوردار بوده اند و همچنان نیز محبوبیت دارند اما مشکلات طراحی زیادی وجود دارند که آنها را در چارچوب LMI نمی توان بررسی کرد و یا نتایج بدست آمده توسط LMI رضایت بخش نیستند. سیستم های زیادی وجود دارند که پایدار بوده ولی روش LMI پاسخی برای بدست آوردن تابع کاندید لیاپانوف برای آنها ندارد. از این رو آنالیز پایداری سیستم های غیرخطی پیچیده با استفاده از مدل فازی چندجمله ای نیز در دهه اخیر مورد توجه قرار گرفته است. اولین تلاشها برای استفاده از روش مجموع مربعات در آنالیز پایداری سیستم های غیرخطی در مقالات [۲۲ و ۲۱] اتفاق افتاد که نتایج بهتری نسبت به روش LMI بدست آمد و توابع لیاپانوف با درجه بالاتر بدست آمده است. سپس پایداری سیستم های فازی چندجمله ای در قالب پایداری سیستم های غیرخطی به طور وسیعی مورد بررسی قرار گرفته است. بطوریکه در [۲۳] پایداری و مدل سازی سیستم های غیرخطی به روش فازی چندجمله بررسی و نشان داده شده است که این روش در مقابل روش T-S جامعیت بیشتری داشته و تعداد قواعد نیز کاهش چشمگیری داشته است. در مقاله [۲۴] نیز نویسندگان با استفاده از خواص مشتق کاپوتو و تابع میتج لفلر شرایط پایداری زمان محدود سیستم های تأخیر زمان مرتبه کسری را بدست آورده اند. چن و همکارانش شرایط پایداری مقاوم سراسری و شبه سراسری را برای سیستم های فازی چندجمله ای با استفاده از طراحی SOS بدست آورده- اند [۲۵]. تاناکا<sup>۴</sup> و همکارانش نیز از رویکرد مجموع مربعات برای مدل سازی و کنترل سیستم های فازی چندجمله ای مرتبه صحیح استفاده کردند و نشان دادند که مدل فازی چندجمله ای کارایی بیشتری را نسبت به مدل شناخته شده T-S دارد. همچنین، شرایط پایداری و پایدارسازی سیستم های فازی چندجمله ای بر اساس تابع لیاپانوف چندجمله ای بدست آوردند که تابع لیاپانوف مربعی حالت

مرتبه کسری تحقیق کرده اند. به عنوان مثال، چن<sup>۱</sup> و همکارانش پایداری سیستم های مرتبه کسری خطی دارای تأخیر زمان را بر اساس روش LMI مورد بررسی قرار دادند [۱۰]. در مقاله [۱۱]، پایداری مقاوم سیستم های مرتبه کسری خطی مورد بررسی قرار گرفته و شرایط لازم و کافی برای پایداری بدست آورده شده است. آنالیز پایداری سیستم های مرتبه کسری خطی توسط روش لیاپانوف و رویکرد نامساوی ماتریسی خطی (LMI) در [۱۲] ارائه گردید که شرایط لازم و کافی برای پایداری و طراحی کنترلی فیدبک حالت مورد بررسی قرار گرفته است. در مقاله [۱۳] نیز کنترل کننده PID فازی کسری بر روی یک موتور DC پیاده سازی شده است که عملکرد مناسبی بر روی عدم قطعیت های سیستم دارد. در مقاله [۱۴] نیز به پایداری لیاپانوف برای سیستم های مرتبه کسری پرداخته شده است و دو رویکرد ارائه شده است: رویکرد مستقیم که منجر به یک مسأله پارامتری با ابعاد بزرگ می شود و رویکرد غیر مستقیم که با بکارگیری مدل فرکانسی و روش LMI آنالیز پایداری انجام شده و منجر به یک راه حل سریع میگردد. در سیستم های مرتبه کسری غیرخطی نیز آنالیز پایداری مشکل تر بوده و به دو روش این آنالیز انجام می شود: روش اول لیاپانوف و روش دوم لیاپانوف. در روش اول لیاپانوف سیستم غیرخطی مرتبه کسری در نقطه تعادل تبدیل به سیستم مرتبه کسری خطی می شود و سیستم غیرخطی مرتبه کسری در صورتی پایدار مجانبی است که سیستم خطی پایدار مجانبی باشد [۱۵]. نویسندگان مقاله [۱۶] نیز با استفاده از روش اول لیاپانوف نشان داده اند که معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه کسری کاپوتو<sup>۲</sup> پایدار مجانبی است اگر سیستم خطی سازی شده حول نقطه تعادل پایدار مجانبی باشد. در روش دوم لیاپانوف نیز شرایط لازم و کافی برای پایداری سیستم های غیرخطی مرتبه کسری بیان شده است که یکی از این روش ها انتخاب تابع کاندید لیاپانوف بر اساس روش LMI است. در مقاله [۱۷] روش لیاپانوف بطور مستقیم برای آنالیز پایداری مورد استفاده قرار گرفته است. در مقاله [۱۸] آنالیز پایداری سیستم های کسری مقیاس بزرگ<sup>۳</sup> مورد بررسی قرار گرفته و با استفاده از روش غیرمستقیم لیاپانوف پایداری سیستم بررسی شده و با استفاده از نامساوی LMI شرایط لازم و کافی برای

<sup>3</sup> large-scale

<sup>4</sup> tanaka

<sup>1</sup> chen

<sup>2</sup> Caputo fractional order equations

دستاوردهای بدست آمده در مقایسه با مقالات دیگر و نیز نتیجه گیری کلی بیان می‌گردد.

## ۲- آنالیز پایداری با استفاده از روش SOS

اخیراً روش محاسباتی برای آنالیز پایداری سیستم‌های چندجمله‌ای معرفی گردیده است که روش مجموع مربعات (SOS) نام‌گذاری شده است [۲۲ و ۲۳].

فرض کنید  $R$  مجموعه اعداد حقیقی و  $Z_+$  مجموعه اعداد صحیح غیرمنفی باشد. در اینصورت هر  $\alpha \in Z_+$  تابع تک جمله‌ای  $m_\alpha: R^n \rightarrow R$  را ایجاد می‌کند. با توجه به  $\alpha \in Z_+$ ، تک جمله‌ای  $m_\alpha$ ،  $x \in R^n$  را به  $m_\alpha(x) = x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$  نگاشت می‌کند. درجه چندجمله‌ای بصورت  $\deg m_\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$  و  $R_n$  مجموعه چندجمله‌ای‌ها با  $n$  متغیر با ضرایب ثابت تعریف می‌شوند. علاوه بر این، زیر مجموعه‌ای از  $R_n$  بصورت  $R_{n,d} = \{p \in R_n | \deg p \leq d\}$  تعریف می‌شود.

فرض کنید چند جمله‌ای  $\sum_n$  مجموعه همه چندجمله‌ای‌های SOS با درجه  $n$  باشد که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sum_n = \{s \in R_n | \exists M < \infty, \exists \{p_i\}_{i=1}^M \subset R_n \text{ such that } s = \sum_{i=1}^M p_i^2\} \quad (1)$$

فرض می‌کنیم  $m_\alpha(x) = x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$  و  $\alpha \in Z_+$  در اینصورت چندجمله‌ای  $p$  مربعی است اگر ترکیب خطی از  $\{m_{\alpha_j}\}_{j=1}^k$ ،  $m_\alpha: R^n \rightarrow R$  باشد.

در اینصورت

$$p = \sum_{j=1}^k c_j m_{\alpha_j}, \quad \{c_j\}_{j=1}^k \in R$$

این روش زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که سیستم و ماتریس‌های ورودی، توابع چندجمله‌ای بر حسب متغیرهای حالت باشند.

لم ۱. [۳۲]

فرض کنید  $p \in R_{n,2d}$  در اینصورت  $p \in \sum_{n,2d}$  اگر و فقط اگر ماتریس  $Q \geq 0$  وجود داشته باشد که

$$p(x) = z^*_{n,d}(x) Q z_{n,d}(x) \quad (2)$$

خاصی از آن است [۲۶]. از آنجا که ساخت یک تابع مثبت معین و نیز محاسبه مشتق کسری کار بسیار مشکلی است اخیراً از خاصیت جدید برای مشتق کاپوتو استفاده می‌شود که در [۲۷ و ۲۸] ارائه شده است. براساس این روش، برای آنالیز پایداری سیستم‌های مرتبه کسری ابتدا نامساوی مرتبه کسری پایداری سازی شده است. این نامساوی یک کران بالا برای مشتق مرتبه کسری ایجاد می‌کند و نیز تولید یک تابع لیاپانوف مرتبه دو را به دنبال دارد. این نامساوی نشان می‌دهد که اگر یک تابع مثبت معین، تابع لیاپانوف برای سیستم مرتبه صحیح باشد، برای یک سیستم مرتبه کسری نیز یک تابع لیاپانوف خواهد بود. نتایج این روش، استفاده از تابع لیاپانوف با درجه دوم در تجزیه و تحلیل پایداری سیستم‌های مرتبه کسری است که در بعضی از موارد این تابع لیاپانوف نمی‌تواند عملکرد مناسبی داشته و باید از توابع لیاپانوف با درجه بالاتر استفاده کرد. این نتایج بسیار مهم بوده و ابزار اساسی برای تجزیه و تحلیل و پایداری سیستم‌های مرتبه کسری چند جمله‌ای با تابع لیاپانوف درجه بالا را فراهم کرده است. به همین دلیل، میتچ-لفر<sup>۱</sup> پایداری سیستم‌های مرتبه کسری را توسط روش دوم لیاپانوف توسعه داد [۲۹]. این روش در سیستم‌هایی کاربرد دارد که پایدار بوده اما پیدا کردن تابع کاندید لیاپانوف برای آنها توسط روش‌های قبلی امکان پذیر نیست [۳۰]. این روش می‌تواند عملکرد مناسبی در برابر پایداری مجانبی داشته باشد. چن و همکارانش بررسی پایداری سیستم‌های مرتبه کسری را به روش میتچ-لفر و روش مستقیم لیاپانوف مورد بررسی قرار دادند [۳۱].

در این مقاله در بخش دوم، ابتدا روش SOS<sup>۲</sup> توضیح داده شده و سپس با تعریف مشتق مرتبه کسری و لم‌های مربوطه، شرایط لازم و کافی برای پایداری میتچ-لفر سیستم مرتبه کسری بدست می‌آید. در بخش سوم، مدل فازی چندجمله‌ای مرتبه صحیح تعریف می‌گردد. در بخش چهارم، مدل فازی چندجمله‌ای مرتبه کسری تعریف می‌شود. در بخش پنجم، شرایط لازم و کافی برای پایداری میتچ-لفر یک سیستم فازی چندجمله‌ای مرتبه کسری اثبات می‌گردد. در بخش ششم نیز با ذکر یک مثال درستی روش، نشان داده می‌گردد و پایداری سیستم مورد بررسی قرار می‌گیرد. در پایان، در بخش‌های هفتم و هشتم

<sup>2</sup> Sum of square

<sup>1</sup> Mittag-Leffler

اگر شرایط زیر برقرار باشد:

$$\gamma_1 \|x\|^\alpha \leq v(x) \leq \gamma_2 \|x\|^{ab} \quad (۸)$$

$${}_{t_0}^c D_t^q v(x) \leq -\gamma_3 \|x\|^{ab} \quad (۹)$$

**قضیه ۱**

سیستم  ${}_{t_0}^c D_t^q x(t) = A(x)x(t)$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $x=0$  نقطه تعادل سیستم باشد در این صورت سیستم در نقطه  $x=0$  پایدار میتج-لفلر<sup>۳</sup> است اگر و فقط اگر  $w_1(x), w_2(x), w_3(x) \in \sum_n$  وجود داشته باشند که شرایط زیر برقرار شود:

$$w_1(x) \leq v(x) \leq w_2(x) \quad (۱۰)$$

$${}_{t_0}^c D_t^q v(x) \leq -w_3(x) \quad (۱۱)$$

از معادله (۱۱) داریم:

$${}_{t_0}^c D_t^q v(x) \leq -w_3(x) \leq \frac{-w_3(x)}{w_2(x)} v(x) \leq$$

$$-\inf_x \left( \frac{w_3(x)}{w_2(x)} \right) v(x) = -\beta v(x) \quad (۱۲) :$$

که:

$$\beta = \inf_x \left( \frac{w_3(x)}{w_2(x)} \right) \quad (۱۳)$$

$w_2(x), w_3(x)$  مثبت و دارای درجه یکسان هستند

بنابراین  $\beta > 0$

تابع غیرمنفی  $m_0(t)$  وجود دارد که در معادله زیر صدق کند:

$${}_{t_0}^c D_t^q v(x) + m_0(t) = -\beta v(x) \quad (۱۴)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین معادله (۱۴) داریم:

$$v(s) = \frac{v(0)s^{q-1} - M_0(s)}{s^q + \beta} \quad (۱۵)$$

$$s^q v(s) - v(0)s^{q-1} + M(s) = -\beta v(s) \quad (۱۶)$$

اگر  $x(0)=0$  آنگاه  $v(0)=0$  و اگر  $x \neq 0$  آنگاه

$v(0) > 0$  با گرفتن تبدیل لاپلاس معکوس از (۱۶)

داریم:

$$v(t) = v(0)E_q(-\beta t^q) - M(t)[t^{q-1}E_q(-\beta t^q)]$$

که:

<sup>3</sup> Mittag-Leffler

که  $Z_{n,d}(x)$  چند جمله ای با  $n$  متغیر از درجه  $d$  است در این صورت چند جمله ای  $p(x)$  بصورت SOS است.

**تعریف ۱**

از مفهوم انتگرال کسری<sup>۱</sup> امروزه برای مدلسازی و شبیه سازی بسیاری از سیستم ها استفاده می شود. مدل سازی بر اساس این روش توصیف دقیق تری از سیستم ارائه می کند و در کاربردهای فیزیکی مانند اصطکاک و ویسکوالاستیک از این مدل می توان استفاده کرد. تعاریف مختلفی در زمینه انتگرال کسری وجود دارد که می توان به تعریف کاپوتو و ریمان لیوویل<sup>۲</sup> اشاره کرد. تعریف کاپوتو مرتبه کسری بصورت زیر است:

$$D_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-q-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (۳)$$

که  $q$  مرتبه سیستم کسری و  $n$  عدد صحیح است.

$$n-1 \leq q < n \quad (۴)$$

$\Gamma(\cdot)$  تابع اویلر است و بصورت زیر تعریف می شود:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx \quad (۵)$$

بر اساس تعریف کاپوتو مدل سیستم کسری بصورت زیر تعریف می شود:

$$D_t^q x(t) = A(x)x(t) \quad (۶)$$

که  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$  بردار حالت و  $A(x) \in R^{n \times n}$  ماتریس غیرخطی با ابعاد  $n \times n$  و  $0 < q \leq 1$  مرتبه سیستم کسری است.

**لم ۲.۳۱**

فرض می کنیم  $\Omega \in R^n$  و  $v(x): \Omega \rightarrow R$  تابعی

محدب در  $\Omega$  و  $x: [t_0, \infty) \rightarrow \Omega$  باشد در این صورت برای هر  $t \geq t_0$ :

$${}_{t_0}^c D_t^q v(x) \leq \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^T {}_{t_0}^c D_t^q x(t) \quad (۷)$$

**لم ۳.۳۳**

سیستم غیرخطی مرتبه کسری

$${}_{t_0}^c D_t^q x(t) = A(x)x(t)$$

در نقطه تعادل  $x=0$  پایدار Mittag-Leffler است

<sup>1</sup> Fractional integral

<sup>2</sup> Riemann-Liouville

If  $Z_1(x(t))$  is  $M_1$  and..... $Z_N(x(t))$  is  $M_{iN}$   
Then  $\dot{x}(t)=A_i(x)x \quad i=1,2,\dots, N$   
(۲۱)

که در آن  
 $z(x) = [Z_1(x(t)), Z_2(x(t)), \dots, Z_N(x(t))]^T, N \leq n$   
در رابطه (۲۰) ماتریس‌های  $A_i(x)$  ماتریس‌های  
چندجمله‌ای هستند.  $x \in R^N$  یک بردار ستونی بر حسب  
متغیرهای حالت  $x(t)$  است و  $Z_N(x(t))$  تابعی بر  
حسب متغیرهای حالت  $x(t)$  است. بنابراین قسمت نتیجه  
مدل فازی چند جمله‌ای (۲۱) بر حسب چندجمله‌ای بیان  
می‌شود.

فرآیند غیرفازی‌سازی مدل (۲۱) به صورت زیر  
است:

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(x))\{A_i(x)X(x)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(z(x))} = \sum_{i=1}^r h_i(z(x))\{A_i(x)X(x)\} \quad (۲۲)$$

که در آن:

$$h_i(z(x)) = \frac{w_i(z(x))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(x))}$$

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(x)) = 1, \quad 0 \leq h_i(z(x)) \leq 1$$

#### ۴-مدل فازی چندجمله‌ای برای سیستم‌های مرتبه کسری

در این قسمت با استفاده از مفهوم غیر خطی بودن یک  
روش جدید که مدل فازی چندجمله‌ای مرتبه کسری  
نامیده می‌شود، برای نمایش سیستم‌های غیرخطی مرتبه  
کسری معرفی شده است. این ساختار شبیه مدل فازی  
چندجمله‌ای مرتبه صحیح است. بر این اساس سیستم  
غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$${}_{t_0}^c D_t^q x(t) = f(x(t)) \quad (۲۳)$$

که در آن  $f(x(t))$  تابع غیر خطی و  
بردارهای  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$   
حالت هستند.

$f(x(t)) \in R^{n \times n}$  ماتریس با عناصر غیر خطی در  
فضای  $n \times n$  است و  $0 < q \leq 1$  مرتبه مشتق سیستم  
مرتبه کسری است. بر اساس مفهوم غیرخطی بودن می‌توان

$$E_q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(kq+1)} \quad (۱۷)$$

$t^{q-1} \geq 0, E_q \geq 0$  توابع غیرمنفی هستند بنابراین:

$$v(t) \leq v(0)E_q(-\beta t^q) \quad (۱۸)$$

با جایگذاری (۱۸) در (۱۱) داریم:

$$w_1(x) \leq v(0)E_q(-\beta t^q)$$

$$= v(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\beta t^q)^k}{\Gamma(kq+1)} \quad (۱۹)$$

که  $v(0) > 0$  برای  $x(0) \neq 0$  بنابراین  $w_1(x)$   
محدود است همچنین  $v(x)$  لیب شیتز محلی<sup>۱</sup> در  $x$   
است.

$v(0, x(0)) = 0$  اگر و فقط اگر  $x(0) = 0$  که  
پایداری میتج لفلر را تضمین می‌کند.

#### ۳-مدل فازی چندجمله‌ای برای سیستم‌های مرتبه صحیح

در این قسمت یک مدل فازی با استفاده از قواعد چند جمله  
ای بیان شده است و تجزیه و تحلیل پایداری براساس تابع  
لیاپانوف مربعی انجام شده است. مدل فازی چند جمله‌ای  
در حقیقت گسترش مدل فازی TS-است که این گسترش  
باعث می‌شود که تعداد قواعد در مدل فازی چندجمله‌ای  
کمتر از مدل فازی T-S باشد و شرایط پایداری بدست  
آمده با روش SOS نتایج بهتری نسبت به پایداری با روش  
LMI داشته باشد همچنین مدل سیستم غیر خطی با  
روش فازی چندجمله‌ای، دقیق و مدلی سراسری است در  
حالی‌که مدل T-S برای سیستم‌های با قسمت چندجمله  
ای مدلی سراسری نیست. مدل فازی چندجمله‌ای برای  
یک سیستم مرتبه صحیح بدین صورت است که قسمت  
نتیجه گیری بر اساس قواعد چند جمله‌ای بیان شده است.  
سیستم غیر خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = A_i(x)x \quad (۲۰)$$

که در آن  $A_i(x)$  تابع غیر خطی و  
 $x = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$   
بردارهای حالت هستند.

و براساس مفهوم غیرخطی بودن می‌توان سیستم (۲۰)  
را بصورت مدل فازی چندجمله‌ای زیر بیان کرد:

<sup>1</sup> locally Lipschitz

اثبات:

اگر تابع لیاپانوف بصورت  $v(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j v_j(x)$  تعریف شود در اینصورت:

$$\begin{aligned} w_1(x) &\leq v(x) \leq w_2(x) \\ {}^c D_t^q v(x) &\leq \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x}\right)^T {}^c D_t^q x(t) \\ &= \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x}\right)^T \sum_{i=1}^N h_i(z(x)) \{A_i(x)x\} \\ &= \sum_{j=1}^N \alpha_j \left(\frac{\partial v_j(x)}{\partial x}\right)^T \sum_{i=1}^N h_i(z(x)) \{A_i(x)x\} \\ &= \sum_{i=1}^N (h_i(z(x)) \sum_{j=1}^N \alpha_j \left(\frac{\partial v_j(x)}{\partial x}\right)^T A_i(x)x) \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_i h_i(z(x)) \left(\frac{\partial v_i(x)}{\partial x}\right)^T A_i(x)x \\ &+ \sum_{i=1}^N \sum_{i=1, j \neq i}^N \alpha_j h_i(z(x)) \left(\frac{\partial v_i(x)}{\partial x}\right)^T A_i(x)x \\ &\leq \sum_{i=1}^N h_i(z(x)) (-w_3(x) - q(x)) \\ &+ \sum_{i=1}^N h_i(z(x)) q(x) \\ &= -w_3(x) - q(x) + q(x) = -w_3(x) \end{aligned}$$

بنابراین برای تابع لیاپانوف  $v(x)$  تعریف شده داریم:

$$w_1(x) \leq v(x) \leq w_2(x)$$

پس سیستم فازی چندجمله‌ای فوق پایدار به مفهوم میتج-لفلاست .

**نکته ۱:** در قضیه ۲ چنانچه توابع لیاپانوف بصورت درجه

$$v_j(x) = x^T P_j x \quad \text{دوم} \quad \text{تعریف شوند آنگاه:}$$

$$\begin{aligned} v(x) &= \sum_{j=1}^N \alpha_j v_j(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j x^T P_j x \\ &= x^T \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j P_j \right) x = x^T P x \end{aligned}$$

$$P = \sum_{j=1}^N \alpha_j P_j \quad \text{که در آن:}$$

**نکته ۲:** تابع لیاپانوف حاصله در واقع همان تابع لیاپانوف

مشترک برای تمام قواعد است.

سیستم (۲۳) را بصورت مدل فازی چندجمله‌ای زیر بیان کرد:

$$\text{If } Z_1(x) \text{ is } M_1 \text{ and } \dots \text{ } Z_N(x) \text{ is } M_N \quad \text{Then} \\ {}^c D_t^q x(t) = A_i(x)x, \quad i=1,2,\dots,N \quad (24)$$

که در رابطه (۲۴) مدل سیستم مرتبه کسری (۲۳) توسط جملات چندجمله‌ای مرتبه کسری نمایش داده شده و تفاوت این مدل با روش چندجمله‌ای مرتبه صحیح در جملات قسمت دوم است که دارای جملات مرتبه کسری می‌باشد در رابطه (۲۴)،  $Z_N(x)$  متغیر و  $M_{iN}$  یک مشخصه فازی متعلق به قاعده  $i$  ام است. مدل دینامیکی سیستم (۲۳) بصورت زیر بیان می‌شود:

$${}^c D_t^q x(t) = \sum_{i=1}^N h_i(z(x)) \{A_i(x)x\} \quad (25)$$

که مشابه مرتبه صحیح:

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(x)) = 1, \quad 0 \leq h_i(z(x)) \leq 1 \quad (26)$$

و

$$z(x) = [Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_N(x)] \quad (27)$$

## ۵- آنالیز پایداری سیستم‌های مرتبه کسری بر اساس SOS

در این قسمت آنالیز پایداری سیستم‌های مرتبه کسری مورد بررسی قرار می‌گیرد و شرایط لازم و کافی برای پایداری بدست می‌آید.

### قضیه ۲:

سیستم فازی چندجمله‌ای مرتبه کسری (۲۳) پایدار میتج-

لفلاست اگر و فقط اگر شرایط زیر برقرار باشد:

توابع SOS،  $v_j(x), q(x), \alpha_j \in [0,1]$  موجود باشند بطوری که:

$$1- \quad w_1(x) \leq v_j(x) \leq w_2(x) \quad (28)$$

$$j = 1, 2, \dots, N$$

$$2- \quad {}^c D_t^q v(x) \leq -w_3(x) \quad (29)$$

$$w_1(x), w_2(x), -w_3(x) \text{ is SOS}$$

$$3- \quad \alpha_i \left(\frac{\partial v_i(x)}{\partial x}\right)^T A_i(x)x \leq -w_3(x) - q(x), \\ q(x) \geq 0 \quad (30)$$

$$4- \quad \sum_{j=1, j \neq i}^N \alpha_j \left(\frac{\partial v_i(x)}{\partial x}\right)^T A_i(x)x \leq q(x) \quad (31)$$

## ۶-مثال و شبیه سازی:

در این قسمت با ارائه مثالهایی صحت و درستی ادعا نشان داده شده است. ابتدا در مثال یک پایداری یک سیستم مرتبه کسری بررسی شده و نشان داده شده است که با وجود پایدار بودن تابع لیاپانوف درجه دو برای این سیستم وجود ندارد و روش LMI پاسخی برای بررسی پایداری این سیستم ندارد. در حالیکه باروش SOS تابع لیاپانوف مرتبه

۴ برای سیستم بدست آمده است. در مثال دوم نیز ابتدا سیستم بصورت مدل فازی چندجمله ای با تعداد قواعد کم تبدیل شده و سپس شرایط کافی قضیه ۱ برای پایداری M-L سیستم غیر خطی بررسی شده است. در مثال سوم نیز نشان داده شده است که تعداد قواعد با استفاده از روش چندجمله ای کسری در مقایسه با روش TSK کاهش یافته است.

مثال ۱-سیستم غیر خطی و متغیر با زمان (۳۱) بصورت زیر بیان می شود:

$$\begin{aligned} {}^c D_t^{0.9} x_1(t) &= -\left(\frac{7}{2} + \frac{3}{2} \cos(t + x_2) \sin x_1(t)\right) x_1(t) - 4x_2^2(t) \\ {}^c D_t^{0.9} x_2(t) &= \left(\frac{19}{2} - \frac{21}{2} \cos(t + x_2) \sin x_1(t)\right) - 2x_2(t) \end{aligned} \quad (31)$$

برای مدل TSK:

$${}^c D_t^q x(t) = \sum_{i=1}^8 h_i(z) (A_i x)$$

که  $x = [x_1 \ x_2]^T$  و  $z = [z_1 \ z_2]^T$  و  $x_2 \in [-d_2 \ d_2]$

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -5 & -4d_2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -5 & +4d_2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -2 & -4d_2 \\ 20 & -2 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} -2 & +4d_2 \\ 20 & -2 \end{bmatrix} \\ A_5 &= \begin{bmatrix} -2 & -4d_2 \\ 20 & -2 \end{bmatrix}, A_6 = \begin{bmatrix} -2 & +4d_2 \\ 20 & -2 \end{bmatrix}, A_7 = \begin{bmatrix} -5 & -4d_2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, A_8 = \begin{bmatrix} -5 & +4d_2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

توابع عضویت بصورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} h_1(z) &= \frac{1 - \cos(t + x_2)}{2} \cdot \frac{1 - \sin x_1(t)}{2} \cdot \frac{-x_2 + d_2}{2d_2} \\ h_2(z) &= \frac{1 - \cos(t + x_2)}{2} \cdot \frac{1 - \sin x_1(t)}{2} \cdot \frac{x_2 + d_2}{2d_2} \\ h_3(z) &= \frac{1 - \cos(t + x_2)}{2} \cdot \frac{1 + \sin x_1(t)}{2} \cdot \frac{-x_2 + d_2}{2d_2} \\ h_4(z) &= \frac{1 - \cos(t + x_2)}{2} \cdot \frac{1 + \sin x_1(t)}{2} \cdot \frac{x_2 + d_2}{2d_2} \\ h_5(z) &= \frac{1 + \cos(t + x_2)}{2} \cdot \frac{1 - \sin x_1(t)}{2} \cdot \frac{-x_2 + d_2}{2d_2} \\ h_6(z) &= \frac{1 + \cos(t + x_2)}{2} \cdot \frac{1 - \sin x_1(t)}{2} \cdot \frac{x_2 + d_2}{2d_2} \\ h_7(z) &= \frac{1 + \cos(t + x_2)}{2} \cdot \frac{1 + \sin x_1(t)}{2} \cdot \frac{-x_2 + d_2}{2d_2} \\ h_8(z) &= \frac{1 + \cos(t + x_2)}{2} \cdot \frac{1 + \sin x_1(t)}{2} \cdot \frac{x_2 + d_2}{2d_2} \end{aligned}$$

دقیق تری از سیستم غیرخطی بدست می آید. همچنین پایداری بصورت سراسری بوده و تعداد قواعد نیز کاهش می یابد.

همانطور که مشخص است مدل فازی T-S دارای هشت قاعده برای نمایش سیستم غیرخطی (۳۱) است و پایداری سیستم در محدوده  $x_2 \in [-d_2 \ d_2]$  بررسی می شود. با نمایش سیستم بصورت مدل فازی چندجمله ای زیر، مدل

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4x_2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -4x_2 \\ 20 & -2 \end{bmatrix}$$

مثال ۲.

سیستم غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$${}^c D_t^{0.9} x_1(t) = -2x_1 + x_1^2 - x_1^3 + x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2 + x_2$$

$${}^c D_t^{0.9} x_2(t) = -\sin x_1 - x_2$$

(۳۲)

سیستم غیرخطی را می‌توان با انتخاب  $x_1 \in [-d_1 \ d_1]$  و  $x_2 \in [-d_2 \ d_2]$  بصورت مدل فازی T-S مدل کرد بر این اساس:

$${}^c D_t^q x(t) = \sum_{i=1}^8 h_i(z) (A_i x)$$

$${}^c D_t^q x(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(z) A_i(x) x$$

که  $x = [x_1, x_2]^T$  و  $Z = x_1$  و مدل فازی چند جمله‌ای سیستم () بصورت زیر بیان می‌شود:

If  $x_1(t)$  is  $h_1(x_1(t))$  then  ${}^c D_t^{0.9} x_1(t) = A_1(x)x(t)$   
 If  $x_1(t)$  is  $h_2(x_1(t))$  then  ${}^c D_t^{0.9} x_1(t) = A_2(x)x(t)$

که :

$$h_1(x_1(t)) = \frac{1 + \cos(t + x_2) \sin x_1(t)}{2}$$

$$h_2(x_1(t)) = \frac{1 - \cos(t + x_2) \sin x_1(t)}{2}$$

9

که  $z = [z_1 \ z_2]^T$  و  $x = [x_1 \ x_2]^T$

$$A_1 = \begin{bmatrix} k_{max} & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} k_{max} & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} \frac{k_{max}}{\sin d_1} & 1 \\ -\frac{1}{d_1} & -1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} \frac{k_{max}}{\sin d_1} & 1 \\ -\frac{1}{d_1} & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} k_{min} & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, A_6 = \begin{bmatrix} k_{min} & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, A_7 = \begin{bmatrix} \frac{k_{min}}{\sin d_1} & 1 \\ -\frac{1}{d_1} & -1 \end{bmatrix}, A_8 = \begin{bmatrix} \frac{k_{min}}{\sin d_1} & 1 \\ -\frac{1}{d_1} & -1 \end{bmatrix}$$

$$k_{max} = \max_{|x_1| < d_1, |x_2| < d_2} (-2 + x_1 - x_1^2 - x_1^3 + x_1 x_2 - x_2^2)$$

$$k_{min} = \min_{|x_1| < d_1, |x_2| < d_2} (-2 + x_1 - x_1^2 - x_1^3 + x_1 x_2 - x_2^2)$$

توابع عضویت بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$h_1(z) = \frac{k - k_{min}}{k_{max} - k_{min}} \frac{\sin(x_1) - \sin(d_1/d_1)x_1}{(1 - \sin(d_1/d_1))x_1} \cdot \frac{x_1 + d_1}{2d_1}$$

$$h_2(z) = \frac{k - k_{min}}{k_{max} - k_{min}} \frac{\sin(x_1) - \sin(d_1/d_1)x_1}{(1 - \sin(d_1/d_1))x_1} \cdot \frac{d_1 - x_1}{2d_1}$$

$$h_3(z) = \frac{k - k_{min}}{k_{max} - k_{min}} \frac{x_1 - \sin(x_1)}{(1 - \sin(d_1/d_1))x_1} \cdot \frac{x_1 + d_1}{2d_1}$$

$$h_4(z) = \frac{k - k_{min}}{k_{max} - k_{min}} \frac{x_1 - \sin(x_1)}{(1 - \sin(d_1/d_1))x_1} \cdot \frac{d_1 - x_1}{2d_1}$$

$$h_5(z) = \frac{k_{max} - k}{k_{max} - k} \frac{\sin(x_1) - \sin(d_1/d_1)x_1}{(1 - \sin(d_1/d_1))x_1} \cdot \frac{x_1 + d_1}{2d_1}$$

$$h_6(z) = \frac{k_{max} - k}{k_{max} - k} \frac{\sin(x_1) - \sin(d_1/d_1)x_1}{(1 - \sin(d_1/d_1))x_1} \cdot \frac{d_1 - x_1}{2d_1}$$

$$h_7(z) = \frac{k_{max} - k}{k_{max} - k} \frac{x_1 - \sin(x_1)}{(1 - \sin(d_1/d_1))x_1} \cdot \frac{x_1 + d_1}{2d_1}$$

$$h_8(z) = \frac{k_{max} - k}{k_{max} - k} \frac{x_1 - \sin(x_1)}{(1 - \sin(d_1/d_1))x_1} \cdot \frac{d_1 - x_1}{2d_1}$$



$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 + x_1 - x_1^2 - x_1^3 + x_1x_2 - x_2^2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2 + x_1 - x_1^2 - x_1^3 + x_1x_2 - x_2^2 & 1 \\ 0.217 & -1 \end{bmatrix}$$

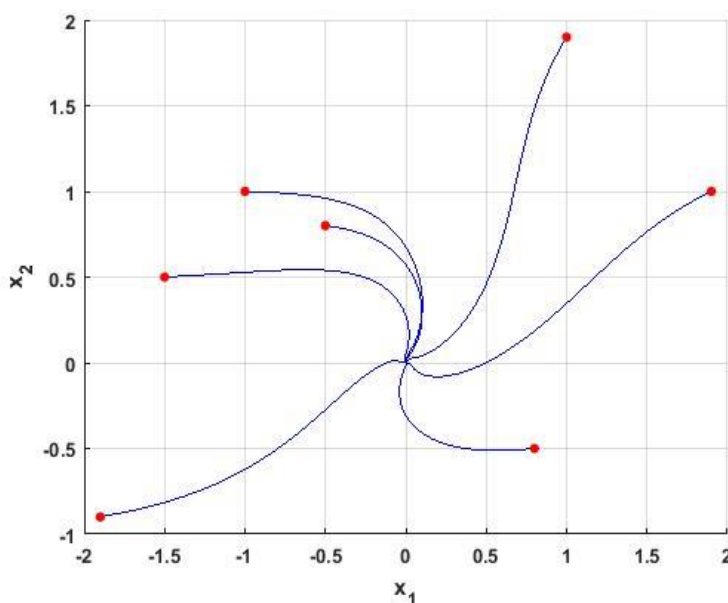
توابع عضویت نیز بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$h_1(z) = \frac{\sin x_1 + 0.217x_1}{1.271x_1}, \quad h_2(z) = \frac{x_1 - \sin x_1}{1.271x_1}$$

همانطور که مشخص است مدل فازای T-S دارای هشت قاعده برای نمایش سیستم غیرخطی (۳۲) است و پایداری سیستم در محدوده  $d_1$  و  $d_2$  بررسی می‌شود. با نمایش سیستم بصورت مدل فازای چندجمله‌ای مدل دقیق‌تری از سیستم غیرخطی بدست آمده و با تعریف  $x_1 \in [-\infty, \infty]$  و  $x_2 \in [-\infty, \infty]$  پایداری سراسری و تعداد قواعد نیز کاهش می‌یابد.

$${}_{t_0}^c D_t^q x(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(z) A_i(x) x$$

که  $x = [x_1, x_2]$  و  $z = x_1$



شکل ۱- منحنی حالت بر حسب  $x_1$  برای سیستم (۳۲)

مثال ۳. سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} {}_{t_0}^c D_t^{0.8} x_1(t) &= -x_1 - 2x_1x_2^2 - 2x_2^3 \\ {}_{t_0}^c D_t^{0.8} x_2(t) &= -2x_1^2x_2 - 2x_2 + 0.33x_2^3 \end{aligned} \quad (33)$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} -1 & -2x_1x_2 - 2x_2^2 \\ -2x_1x_2 & 0.33x_2^2 - 2 \end{bmatrix}$$

با استفاده از تولباکس SOSTOOLS داریم:

$$v(x) = 0.40401x_1^4 + 0.375x_1^2x_2^2 + 0.866x_1^2 + 0.396x_2^3x_1 - 0.026x_1x_2 + 0.473x_2^4 + 0.918x_2^2$$

حداقل درجه تابع لیپانوف بدست آمده در این مثال از  
 درجه چهار بوده و این در حالی است که با روش LMI  
 تابع لیپانوفی برای سیستم بدست نمی‌آید. با استفاده از  
 لم یک داریم:  
 که

$$v(x) = z^T Q z$$

$$z^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_1^2 \quad x_1 x_2 \quad x_2^2]$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.8662 & -0.0134 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0134 & 0.9180 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.4016 & 0.0000 & -0.1046 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.5843 & 0.1981 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.1046 & 0.1981 & 0.4737 \end{bmatrix}$$

برطبق قضیه یک داریم:

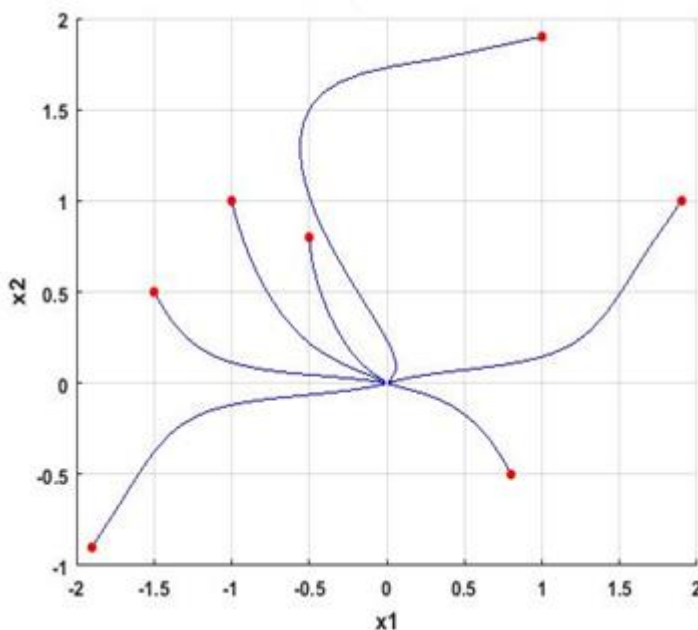
$$w_1(x) = 0.246x_1^4 + 0.22875x_1^2x_2^2 + 0.571x_1^2 + 0.1702x_2^3x_1 - 0.026x_1x_2 + 0.010x_2^4 + 0.605x_2^2$$

$$w_2(x) = 0.741x_1^8 + 0.695x_1^6x_2^2 + 1.866x_1^6 + 0.3315x_2^3x_1^5 - 0.0228x_1^5x_2 + 1.575x_2^4x_1^4 + 1.683x_2^2x_1^4 + 0.695x_1^4x_2^6 + 1.866x_1^2x_2^4 + 0.3315x_2^7x_1 - 0.0228x_2^5x_1 + 0.875x_2^8 + 1.683x_2^6$$

$$w_3(x) = -4.77x_1^4x_2^2 - 1.606x_1^4 - 5.590x_1^3x_2^3 + 0.053x_1^3x_2 - 0.0075x_1^2x_2^6 - 5.064x_1^2x_2^4 - 9.38x_1^2x_2^2 - 1.73x_1^2 - 0.011x_1x_2^7 - 1.935x_1x_2^5 - 6.192x_1x_1x_2^3 + 0.0803x_1x_1x_2^2 - 0.018x_2^8$$

مختلف به سمت نقطه تعادل صفر است. بنابراین  $x = 0$   
 پایدار میتج-لفلر است و سیستم (۳۲) پایدار است.

شکل یک به ازای شرایط اولیه مختلف رسم شده است که  
 نشان دهنده همگرایی مسیرهای حالت به ازای شرایط اولیه



شکل ۲- منحنی حالت  $x_1$  بر حسب  $x_2$  برای سیستم (۳۳)

مثال ۴. سیستم فازی چندجمله‌ای مرتبه کسری زیر را در نظر بگیرید:

$${}^c D_t^{0.8} x_1(t) = -2x_1 + x_1^3 + x_1^2 + x_1^2 x_2 - 2x_1 x_2^2$$

$${}^c D_t^{0.8} x_2(t) = -x_2 - \sin x_1$$

(۳۴)

با استفاده از بسط تیلور  $\sin x_1$  می‌توانیم سکتورها را به شرح ذیل بدست آوریم:

$$\begin{cases} h_1 \left( x_1 - \frac{x_1^3}{6} \right) + h_2 \left( x_1 - \frac{x_1^3}{6} + \frac{x_1^5}{120} \right) = \sin x_1 \\ h_2 + h_1 = 1 \end{cases}$$

که:

$$h_1 = \frac{120(x_1 - \sin x_1) - 20x_1^3}{x_1^5} + 1$$

$$h_2 = -\frac{120(x_1 - \sin x_1) - 20x_1^3}{x_1^5}$$

این معادلات را میتوان به شکل مدل فازی چندجمله‌ای بصورت زیر نوشت:

$$\text{If } x_1(t) \text{ is } h_1(z(t)) \quad \text{then } {}^c D_t^q x(t) = A_1(x)x$$

$$\text{If } x_1(t) \text{ is } h_2(z(t)) \quad \text{then } {}^c D_t^q x(t) = A_2(x)x$$

$$A_1(x(t)) = \begin{bmatrix} -2 + x_1^2 + x_1 + x_1 x_2 - 2x_2^2 & 0 \\ -1 + 1/6x_1^2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_2(x(t)) = \begin{bmatrix} -2 + x_1^2 + x_1 + x_1 x_2 - 2x_2^2 & 0 \\ -1 + 1/6x_1^2 - 1/120x_1^4 & -1 \end{bmatrix}$$

برای آنالیز پایداری روش LMI در این مثال پاسخی نداشته، بنابراین بر اساس قضیه ۲ و با استفاده از sostoools داریم:

$$\begin{aligned} v_1(x) = & -0.01052x_1^7 + 0.04174x_1^6x_2 + 0.1082x_1^6 - 0.01012x_1^5x_2^4 \\ & - 0.03304x_1^5x_2^3 - 0.04715x_1^5x_2^2 - 0.07967x_1^5x_2 + 0.0108x_1^4x_2^5 \\ & + 0.06112x_1^4x_2^4 + 0.02815x_1^4x_2^3 - 0.218x_1^4x_2^2 - 0.8291x_1^4x_2 \\ & - 2.079x_1^4 - 0.056x_1^3x_2^5 + 0.3667x_1^3x_2^3 + 0.01323x_1^3x_2^2 \\ & - 0.5358x_1^3x_2 - 1.922x_1^3 + 0.02439x_1^2x_2^6 - 0.01981x_1^2x_2^5 \\ & - 0.1946x_2^2x_2^4 + 0.7179x_1^2x_2^3 + 3.55x_1^2x_2^2 + 4.719x_1^2x_2 \\ & + 13.28x_1^2 - 0.0579x_1x_2^5 - 0.3184x_1x_2^4 - 1.092x_1x_2^3 \\ & + 2.945x_1x_2^2 + 15.54x_1x_2 - 0.1535x_2^5 + 1.083x_2^4 + 3.837x_2^3 \\ & + 10.81x_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2(x) = & 0.01338x_1^6 - 0.06867x_1^5x_2 + 0.06706x_1^5 - 0.02001x_1^4x_2^3 - 0.1452x_1^4x_2^2 - \\ & 0.271x_1^4x_2 - 0.5827x_1^4 - 0.01414x_1^3x_2^4 + 0.05148x_1^3x_2^3 - 0.0959x_1^3x_2^2 + \\ & 0.5371x_1^3x_2 - 0.6736x_1 + 0.2239x_1^2x_2^4 + 0.5572x_1^2x_2^3 + 2.853x_1^2x_2^2 + 2.02x_1^2x_2 + \\ & 5.593x_1^2 + 0.03517x_1x_2^5 + 0.2563x_1x_2^4 + 2.315x_1x_2^3 + 2.386x_1x_2^2 + 4.521x_1x_2 + \\ & 0.3822x_2^6 + 0.9785x_2^5 + 2.54x_2^4 + 2.89x_2^3 + 3.077x_2^2 \end{aligned}$$

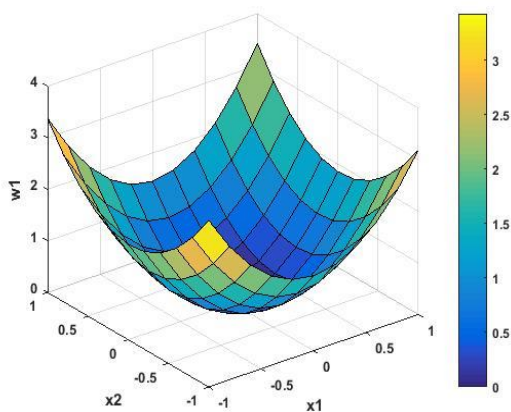
با در نظر گرفتن تابع لیپانوف بصورت  $v(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j v_j(x)$  داریم:

$$\begin{aligned} v(x) = & 0.0106x_1^7x_2 - 0.026x_1^7 + 0.101x_1^6x_2 + 0.238x_1^6 - 0.0101x_1^5x_2^4 \\ & - 0.7x_1^5x_2^3 - 0.031x_1^5x_2^2 - 0.291x_1^5x_2 + 0.66x_1^5 - 0.1318x_1^4x_2^3 \\ & - 0.7459x_1^4x_2^2 - 1.783x_1^4x_2 - 4.58x_1^4 - 0.01546x_1^3x_2^6 \\ & - 0.0489x_1^3x_2^5 - 0.1033x_1^3x_2^4 + 0.761x_1^3x_2^3 - 1.048x_1^3x_2^2 \\ & + 0.1466x_1^3x_2 - 5.1261x_1^3 + 0.1513x_1^2x_2^6 + 0.0451x_1^2x_2^5 \\ & + 1.87x_1^2x_2^4 + 2.11x_1^2x_2^3 + 14.28x_1^2x_2^2 + 9.5x_1^2x_2 + 31.091x_1^2 \\ & + 0.017x_1x_2^6 + 2.637x_1x_2^5 + 2.243x_1x_2^4 + 13.44x_1x_2^3 \\ & + 13.427x_1x_2^2 + 35.737x_1x_2 + 0.0538967x_2^8 + 0.1414x_2^7 \\ & + 5.5297x_2^6 + 7.894177x_2^5 + 14.719x_2^4 + 14.323x_2^3 + 22.043x_2^2 \end{aligned}$$

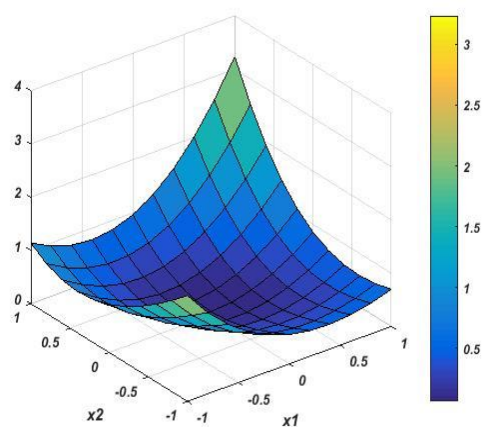
تابع لیپانوف بدست آمده دارای درجه ده بوده و تابع لیپانوف با درجه کمتر برای این سیستم وجود ندارد. با استفاده از روابط (۲۹) و (۳۰) و استفاده از توبلیاکس SOS داریم:

$$\begin{aligned} w_3(x) = & -0.010716x_1^{10}x_2 - 0.0333x_1^{10} + 0.0269x_1^9x_2 - 0.1909x_1^9 \\ & + 0.0677x_1^8x_2^3 + 0.1164x_1^8x_2^2 + 0.5073x_1^8x_2 + 1.2115x_1^8 \\ & + 0.02157x_1^7x_2^5 + 0.0148x_1^7x_2^4 - 0.4609x_1^7x_2^3 + 0.6627x_1^7x_2^2 \\ & - 0.0882x_1^7x_2 + 4.3186x_1^7 - 0.0147x_1^6x_2^6 - 0.2057x_1^6x_2^5 \\ & - 0.6064x_1^6x_2^4 - 2.4688x_2^3 - 6.3406x_1^6x_2^2 - 7.1670x_1^6x_2 \\ & - 17.2490x_1^6 + 0.0722x_1^5x_2^7 - 0.0147x_1^6x_2^6 - 0.2057x_1^6x_2^5 \\ & - 0.6064x_1^6x_2^4 - 2.4688x_1^6x_2^3 - 6.3406x_1^6x_2^2 - 7.1670x_1^6x_2 \\ & - 17.2490x_1^6 + 0.0722x_1^5x_2^7 + 0.0842x_1^5x_2^6 + 0.8299x_1^5x_2^5 \\ & - 0.3237x_1^5x_2^4 + 5.1705x_1^5x_2^3 - 16.6218x_1^5x_2^2 - 9.4039x_1^5x_2 \\ & - 33.6202x_1^5 - 0.0638x_1^4x_2^8 - 6.1499x_1x_2^7 - 6.6041x_1x_2^6 \\ & - 111.7159x_1x_2^5 - 119.2599x_1x_2^4 - 256.4758x_1x_2^3 - 139.6488x_1x_2^2 \\ & - 195.3861x_1x_2 - 0.4311x_2^8 - 0.989x_2^7 - 33.1784x_2^6 - 39.4708x_2^5 \\ & - 58.87x_2^4 - 42.969x_2^3 - 44.0872x_2^2 \end{aligned}$$

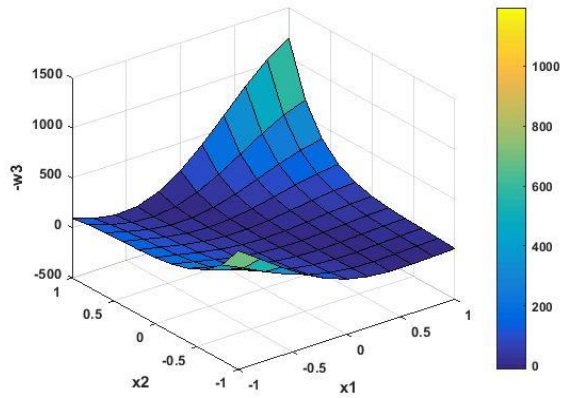
که  $w_1(x)$  و  $w_2(x)$  و  $-w_3(x)$  توابع SOS هستند.



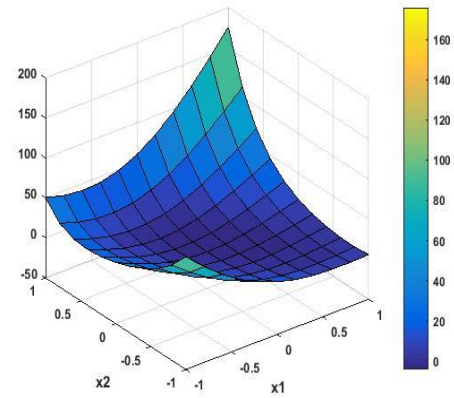
شکل ۴- رویه  $w_2(x)$



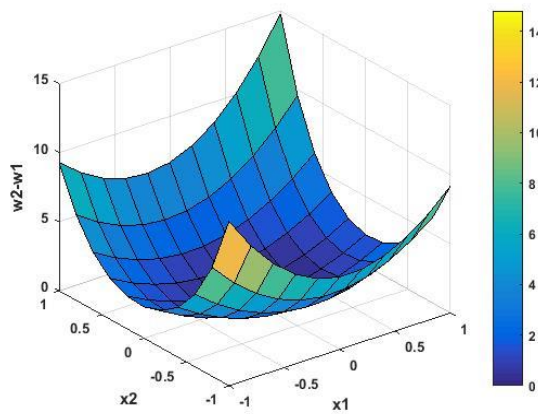
شکل ۳- رویه  $w_1(x)$



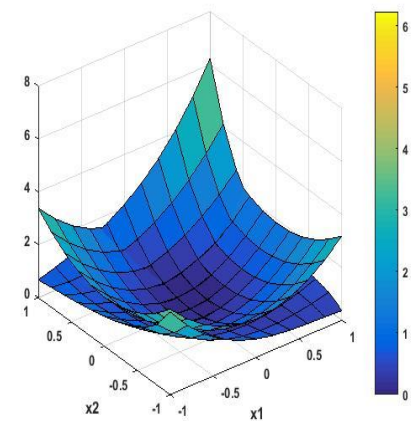
شکل ۶- رویه  $-w_3(x)$



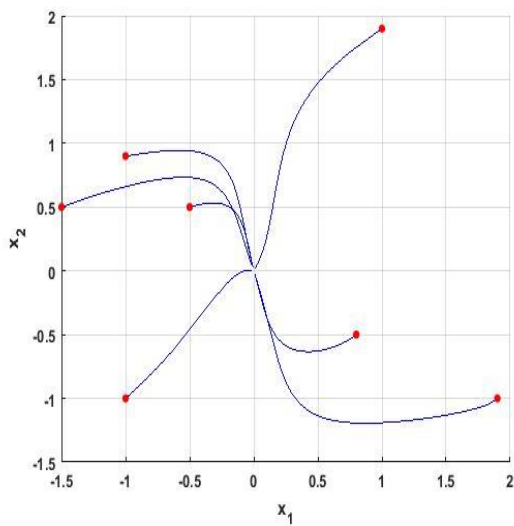
شکل ۵- رویه  $v(x)$



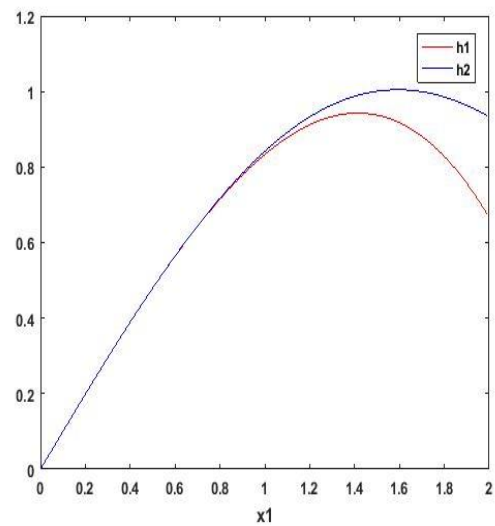
شکل ۸- رویه  $w_2(x) - w_1(x)$



شکل ۷- مقایسه رویه  $w_2(x)$  و  $w_1(x)$



شکل ۱۰- منحنی حالت  $x_1$  بر حسب  $x_2$  برای سیستم (۳۴)



شکل ۹- سکتورهای غیرخطی

## ۷- نقاط ضعف و قوت

در این مقاله به آنالیز پایداری سیستم‌های فازی چندجمله‌ای مرتبه کسری پرداخته‌ایم که بر این اساس فواید این روش به شرح زیر بیان می‌شود:

۱- در مقالات [۲۴] و [۲۶] آنالیز پایداری سیستم‌های فازی چندجمله‌ای مرتبه صحیح مورد بررسی قرار گرفته است. این در حالی است که در این مقاله، سیستم‌های فازی چندجمله‌ای مرتبه کسری مورد بررسی قرار گرفته است که در مدلسازی دقت بیشتری دارند.

۲- نتایج مقالات [۱۴] و [۲۲] و رفرنس‌های آنها بر اساس روش LMI بدست آمده است و این در حالی است که نامساوی‌های چندجمله‌ای را نمی‌توان با این روش حل کرد و سیستم‌های زیادی وجود دارند که نمی‌توان آنها را بر اساس نامساوی LMI بیان کرد. در این مقاله برای حل این مشکل از رویکرد مجموع مربعات برای سیستم‌های مرتبه کسری استفاده شده است و با روش SOS تابع کاندید لیاپانوف انتخاب شده است.

۳- در مقالات [۲۰] و [۳۳] آنالیز پایداری بر اساس تابع لیاپانوف درجه دو انجام شده است. این در حالی است که ممکن است سیستم غیرخطی وجود داشته باشد که تابع لیاپانوف مربعی برای آن وجود نداشته باشد. در این مقاله از رویکرد مجموع مربعات برای بدست آوردن توابع لیاپانوف با درجه بالاتر استفاده شده است و با ذکر یک مثال نشان داده

شده است.

۴- آنالیز پایداری با این روش درمقایسه با مقالات [۱۰] و [۲۵] که سیستم‌های کسری مرتبه صحیح را مورد بررسی قرار داده‌اند دارای عملکرد بهتری بوده و شرایط پایداری سراسری را فراهم می‌کند. در ادامه این کار، پایدارسازی و طراحی کنترلر برای سیستم‌های فازی مرتبه کسری پیشنهاد می‌شود.

## ۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله روشی جدید برای بررسی پایداری سیستم‌های فازی چندجمله‌ای مرتبه کسری ارائه شده است که تعداد قواعد با این روش به علت استفاده از سکتورهای غیرخطی به شدت کاهش می‌یابد. بر این اساس تابع کاندید لیاپانوف توسط روش مجموع مربعات بدست آمده است که تابع لیاپانوف بدست آمده می‌تواند درجه بالاتر نیز داشته باشد. بنابراین سیستم‌هایی که با روش LMI قادر به بررسی آنها نیستیم را می‌توان با این روش بررسی کرد. در این مقاله شرایط لازم و کافی برای پایداری میتج-لفر سیستم‌های فازی چندجمله‌ای مرتبه کسری با استفاده از روش SOS بیان و شرایط پایداری سیستم (۲۳) در قضیه (۲) آورده شده است و در پایان نیز کارآمدی روش فوق با ذکر دو مثال نشان داده شده است.

## ۹-مراجع

- [۱] محسن صادقی، حسین مروی وعلیرضا احمدی فرد، "ارائه یک روش نوین و کارآمد استخراج ویژگی برای بازشناسی گفتار مقاوم مبتنی بر تبدیل فوریه کسری و بهینه ساز تکامل تفاضلی"، نشریه مدل‌سازی در مهندسی، دوره ۱۸، شماره ۶۱، تابستان ۱۳۹۹، صفحه ۹۶-۸۵.
- [۲] عزیز عظیمی، شهاب غلامی و حسین بیاتی، "بررسی انتقال حرارت هدایت غیرفوریه‌ای در شن با استفاده از مدل‌های بر پایه حساب کسری"، نشریه مدل‌سازی در مهندسی، دوره ۱۵، شماره ۴۸، بهار ۱۳۹۹، صفحه ۲۲-۱۵.
- [3] M . D. Ortigueira, "Fractional calculus for scientists and engineers", Springer Science & Business Media, Vol. 84, 2011.
- [4] R . Caponetto, "Fractional order systems: modeling and control applications", World Scientific, Vol. 72, 2010.
- [5] J. C. Mayo-Maldonado, G. Fernandez-Anaya, O. F. Ruiz-Martinez, " Stability of conformable linear differential systems: a behavioural framework with applications in fractional-order control", IET Control Theory & Applications, 2020, pp.2900-2913.
- [۶] روح اله مقصودی، یعقوب حیدری و بهزاد مشیری، "یک تحلیل مقایسه ای از الگوریتم های هوش جمعی کلونی زنبور مصنوعی و بهینه سازی گروهی ذرات در طراحی یک کنترل کننده PID فازی کسری و پیاده سازی آن بر روی موتور DC"، نشریه مدل‌سازی در مهندسی، دوره ۱۱، شماره ۳۵، زمستان ۱۳۹۲، صفحه ۲۳-۱۱.

- [7] D. Idiou, A. Charef, A. Djouambi, "Linear fractional order system identification using adjustable fractional order differentiator", *IET Signal Processing*, 2013, pp.398-409.
- [8] R. Zhang, G. Tian, S. Yang, H. Cao, "Stability analysis of a class of fractional order nonlinear systems with order lying in  $(0, 2)$ ", *ISA transactions*, Vol.56, 2015, pp. 102-110.
- [9] D. Matignon, "Stability results for fractional differential equations with applications to control processing", *In Computational engineering in systems applications*, Vol. 2, No. 1, July 1996, pp. 963-968.
- [10] L. Chen, R. Wu, Y. Cheng, Y. Q. Chen, "Delay-dependent and order-dependent stability and stabilization of fractional-order linear systems with time-varying delay", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2019.
- [11] B. Li, X. Zhang, "Robust stability and stabilization of fractional-order interval systems control systems", *IET Control Theory & Applications*, Vol. 10, No. 14, 2016, pp. 1724-1731.
- [12] J. Sabatier, "On stability and performances of fractional order systems", *In 3rd IFAC Symposium FDA*, Vol. 10, 2008.
- [13] S. Wen, Z. Zeng, T. Huang, "Exponential stability analysis of memristor-based recurrent neural networks with time-varying delays. *Neurocomputing*", Vol. 97, 2012, pp. 233-240.
- [14] H. T. Tuan, H. Trinh, "Stability of fractional-order nonlinear systems by Lyapunov direct method", *IET Control Theory & Applications*, Vol. 12, No. 17, 2018, pp. 2417-2422.
- [15] Y. Boukal, M. Darouach, M. Zasadzinski, N. E. Radhy, "Large-scale fractional-order systems: stability analysis and their decentralized functional observers design", *IET Control Theory & Applications*, Vol. 12, No. 13, 2017, pp.359-367.
- [16] J. G. Lu, G. Chen, "State feedback control for a class of fractional-order nonlinear systems State feedback control for a class of fractional-order nonlinear systems *IEEE/CAA Journal of Automatic: an LMI approach*", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 54, No. 6, 2009, pp. 1294-1299.
- [17] B. Li, X. Zhang, "Observer-based robust control of  $0 < \alpha < 1$  fractional-order linear uncertain control systems", *IET Control Theory & Applications*, Vol. 10, No. 14, 2016, pp. 1724-1731.
- [18] K. Tanaka and H. O. Wang, *Fuzzy Control Systems Analysis and Design: A Linear Matrix Inequality Approach*, John Wiley and Sons Publisher, New York, 2001.
- [19] K. Tanaka, H. Yoshida, H. Ohtake and H. O. Wang "A Sum of Squares Approach to Stability Analysis of Polynomial Fuzzy Systems", *2007 American Control Conference*, New York, July, 2007, pp.4071-4076.
- [20] S. S. Farinwata, G. Vachtsevanos, "Stability analysis of the fuzzy logic controller designed by the phase portrait assignment algorithm" in *Proc. 2nd IEEE Int. Conf. Fuzzy Syst.*, San Francisco, CA, Apr. 1993, pp. 1377-1382.
- [21] Y. J. Chen, M. Tanaka and K. Tanaka, "Stability analysis and region-of-attraction estimation using piecewise polynomial Lyapunov functions: polynomial fuzzy model approach", *IEEE Transactions on Fuzzy systems*, Vol. 23, No. 4, 2014, pp. 1314-1322.
- [22] J. Chen, A. Tepljakov and E. Petlenkov, "Stabilization and stability robustness of coupled non-constant parameter time fractional PDEs", *IEEE Access*, 2019, pp. 163969-163980.
- [23] K. Tanaka, H. Yoshida, H. Ohtake and H. O. Wang, "A sum-of-squares approach to modeling and control of nonlinear dynamical systems with polynomial fuzzy systems", *IEEE Transactions on Fuzzy systems*, 2008, Vol. 17, No. 4, 2008, pp. 911-922.
- [24] N.T. Thanh, H. Trinh and V. N. Phat, "Stability analysis of fractional differential time-delay equations", *IET Control Theory & Applications*, 2017, Vol. 11, No. 7, pp. 1006-1015.
- [25] L. Chen, Y. Chai and R. Wu, "Stability and stabilization of a class of nonlinear fractional-order systems with Caputo derivative", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2012, Vol. 59, No. 9, pp. 602-606.
- [26] Y. Zhao, Y. Wang and X. Zhang, "Feedback stabilization control design for fractional order non-linear systems in the lower triangular form", *IET Control Theory & Applications*, 2016, Vol. 10, No. 9, pp. 1061-1068.
- [27] Y. Li, Y. Chen and I. Podlubny, "Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability", *Computers & Mathematics with Applications*, 2010, Vol. 59, No. 5, pp. 1810-1821.
- [28] Y. Li, Y. Chen and I. Podlubny, "Mittag-Leffler stability of fractional-order nonlinear dynamic systems", *Automatica*, 2009, Vol. 45, No. 8, pp. 1965-1969.

- [29] Q. Xiao, Z. Zeng, "Lagrange stability for T-S fuzzy memristive neural networks with time-varying delays on time scales", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 26, No. 3, 2017, pp. 1091-1103.
- [30] L. Bakule, "Decentralized control: An overview. Annual reviews in control", Vol. 32, No. 1, 2008, pp. 87-98.
- [31] V. Badri, M. S. Tavazoei, " Stability analysis of fractional order time-delay systems: constructing new Lyapunov functions from those of integer order counterparts", IET Control Theory & Applications, Vol. 13, No. 15, 2019, pp. 2476-2481.
- [32] J. Wloszek, Z. William. " Lyapunov based analysis and controller synthesis for polynomial systems using sum-of-squares optimization". University of California, Berkeley, 2003.
- [33] Y. Li, Y. Chen and I. Podlubny " Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems ", Automatica, 2009, Vol. 48, No. 5, pp. 1965-1969.