Journal of Modeling in Engineering 21 (2023) 263-277

Semnan University

Journal of Modeling in Engineering

Journal homepage: https://modelling.semnan.ac.ir/

Research Article

High order modeling of shocks and disturbances in compressible flows using WENO scheme

Mohammad Saleh-Abadi [1], Mojtaba Dehghan-Manshadi[2,*], Hamed Bagheri-Esfeh[3]

1. Malek-Ashtar University of Technology, Isfahan, Iran
2. Malek-Ashtar University of Technology, Isfahan, Iran
3. Department of Mechanical Engineering, Shahreza Campus, University of Isfahan, Iran

*Corresponding Author: mdmanshadi@alum.sharif.edu

PAPER INFO

Paper history:
Received: 24 August 2022
Revised: 20 February 2023
Accepted: 15 March 2023

Keywords:
High order scheme,
Supersonic flow,
shock-disturbance,
numerical dissipation,
smoothness indicator.

ABSTRACT

Two new higher order version of WENO schemes are introduces and problems are solved to investigate problems containing shocks and disturbances in compressible flow. The solver is capable of solving conservation laws using WENO scheme of up to 7th order. The scheme is a recently developed version of the WENO-η-z method with a modified Global Smoothness Indicator (GSI) of 12th order of accuracy, aimed to decrease numerical dissipation over critical points. The code is primarily investigated trough solving several 1D and 2D problems, including the Sod's shock tub, Lax's problem, the Shu-Osher problem, which some are presented here as verification. The 2-D shock-bobble interaction and Richtmyer-Meshkov instability are solved as problems including shocks and disturbances, in which proposed methods are compared with both original WENO- η-z and two similarly modified methodes from recent literature. In these problems, the introduced scheme shows lower dissipation in comparison with the original versions, while having more acceptable stability and symmetry against other modifien versions.

DOI: https://doi.org/10.22075/jme.2023.28134.2321

How to cite this article:
Salehabadi, M., Dehghan Manshadi, M., & Bagheri-Esfe, H. (2023). High order modeling of shocks and disturbances in compressible flows using WENO scheme. Journal of Modeling in Engineering, 21(73), 263-277. doi: 10.22075/jme.2023.28134.2321

مدل‌سازی مرتبه بالای شاک و اغتشاشات جریان تراکم پذیر با روش عددی ونو

محمد صالح‌آبادی[۱]، مجتبی دهقان منشادی [۲،*] و حامد باقری اسفه [۳]

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: پژوهشی
دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۰۶/۰۲
بازنگری مقاله: ۱۴۰۱/۱۲/۰۱
پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۱۲/۲۴

واژگان کلیدی:
روش عددی مرتبه بالا،
جریان مافوق صوت،
اغتشاش،
اتلاف عددی،
تابع همواری.

چکیده

روش عددی مرتبه بالای ونو در آشکارسازی نوسانات ناشی از تداخل شاک-شاک و شاک-اغتشاش با رویکرد بهینه‌سازی روش عددی مورد بررسی قرار گرفته است. دو نسخه‌ی جدید از روش ونو اتا-زی با رویکرد بهینه‌سازی تابع همواری توسعه یافته است. این روش‌ها پیش‌از این در مسائل بنیادی مورد تحلیل قرار گرفته است. کد عددی توسعه یافته که حلگر مرتبه‌بالای معادلات اویلر ۱ و ۲ بعدی است مورد آزمون‌های بسیاری واقع شده است، ازجمله انواع لوله شاک یک و دوبعدی، مسئله لکس، شو-اشر، و مسائل تداخل شاک و اغتشاش. در مقاله حاضر نتایج تعدادی از آزمون‌های یک و دوبعدی، به‌عنوان صحت‌سنجی کد در این مقاله ارائه شده و همچنین بخشی از توسعه کد عددی مرتبه بالا، شامل حل مسئله‌های تداخل شاک-حباب و ریشمیر-مشکف ارائه گردیده است. پاسخ مسأله شاک-حباب نشان‌دهنده‌ی اتلاف عددی کمتر روش‌های خانواده توسعه‌یافته در مقایسه با روش مشابه ونو اتا-زی است که تایید کننده‌ی پژوهش‌های پیشین به شمار می‌رود. در مسأله ریشمیر-مشکف توانمندی کد عددی در برخورد با گسستگی چگالی محک زده شده است و کد پایداری و تقارن مناسبی را در مقایسه با دو روش مشابه همین خانواده نشان می‌دهد که امکان استفاده‌ی بهینه در مسائل کاربردی را افزایش می‌دهد.

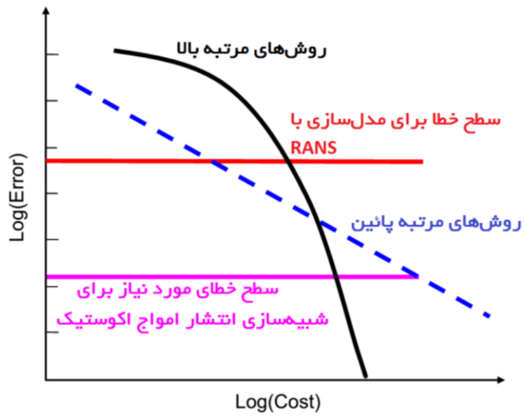
۱- مقدمه

شبیه‌سازی عددی جریان‌های سیال به روش دینامیک سیالات محاسباتی نقش مهمی در شناخت پدیده‌های جریانی و پیشبرد اهداف مختلف مهندسی، اعم از طراحی و بهینه‌سازی داشته است. آشکارسازی دقیق اغتشاشات جریان در مسائل بسیاری دارای اهمیت کاربردی است که نیازمند استفاده از روش‌های عددی مرتبه بالا می‌باشد. در شبیه‌سازی جریان‌های آشفته به روش شبیه سازی گردابی بزرگ [۲] [۱] و شبیه سازی عددی مستقیم [۳] [۲] یکی از الزامات جهت تضمین کیفیت نتایج حاصل از شبیه‌سازی، کاهش خطای عددی ناشی از گسسته‌سازی معادلات حاکم است. مورد دیگری که در مرتبه دقت روش عددی نقش مهمی را ایفا می‌کند، شبیه‌سازی شاک در جریان‌های تراکم‌پذیر با عدد ماخ بالا است. روش‌های مرسوم گسسته‌سازی (روش‌های تفاضل مرکزی، جریان‌نگر و ...) از مرتبه پایین (مرتبه کمتر از۳) معمولاً دقت لازم را برای استفاده در شبیه‌سازی‌های دقیق پدیده‌های جریانی که نیازمند آشکارسازی اغتشاشات و ناپایداری‌ها هستند، دارا نیستند [۳]. برای رسیدن به‌دقت دلخواه با این روش‌ها نیاز به تراکم شبکه بسیار بالاتر از توان محاسباتی موجود است. به‌منظور رفع این کاستی روش‌های سنتی، روش‌های عددی گوناگونی توسعه یافته و همچنان نیز در حال توسعه

* پست الکترونیک نویسنده مسئول mdmanshadi@alum.sharif.edu
۱. دانشجوی دکتری، دانشگاه مالک‌اشتر اصفهان، اصفهان.
۲. استاد، دانشگاه مالک‌اشتر اصفهان، اصفهان.
۳. استادیار، مرکز آموزش عالی شهرضا، دانشگاه اصفهان، اصفهان

[2] Large Eddy Simulation (LES)
[3] Direct Numerical Simulation (DNS)

هستند، ازجمله روش‌های ونو[1] [۷-۴] روش‌های عددی از دید نوع خطا دارای دو نوع خطای اتلاف و پخش هستند [۸]. خطاهای از نوع اتلاف از عبارات مرتبه زوج مشتق در خطا ناشی می‌شوند. به این دلیل روش‌های دارای مرتبه دقت فرد که دارای عبارات مشتق زوج در تابع خطا هستند، بیشتر دارای خطای اتلاف عددی هستند. اثر خطای اتلاف در میدان حل عددی، کاهش دامنه نوسانات است، به همین علت بر روی ناپیوستگی‌ها (شاک) ضخامت را افزایش خواهد داد و از سوی دیگر پایداری حل به دلیل سرکوب شدن نوسانات احتمالی پاسخ در نزدیکی ناپیوستگی بیشتر خواهد بود. افزایش مرتبه دقت به معنی کاهش بیشتر خطا با افزایش تراکم شبکه است (مرتبه همگرایی). روش‌های عادی (از مرتبه کمتر از ۳) معمولاً بر روی شبکه‌های دارای تراکم سلول کمتر بازدهی بهتری به دست خواهند داد. هنگامی‌که در شبیه‌سازی جریان سیال به دنبال افزایش سطح آشکارسازی پدیده‌های جریانی باشیم، افزایش مرتبه دقت روش عددی باعث افزایش راندمان محاسبات خواهد شد، به‌طوری‌که هزینه آشکارسازی پدیده‌ها با شبکه‌ی درشت‌تر و روش عددی مرتبه‌بالا بسیار کمتر از هزینه محاسباتی آشکارسازی با ایجاد تراکم شبکه خواهد بود [۹]. اثر افزایش مرتبه دقت روش عددی و تراکم سلول بر هزینه‌ی محاسبات به‌طور شماتیک در نمودار شکل۱ ارائه شده است. به همین دلیل در شبیه‌سازی‌های مربوط به آکوستیک و جریان آشفته، استفاده از روش عددی مرتبه‌بالا رواج دارد.



شکل ۱- مقایسه اثر مرتبه همگرایی بر دقت (کاهش خطا بر اساس هزینه)[۹]

جریان‌های تراکم‌پذیر در گستره ماخ بالا، معمولاً دارای پدیده‌ی شاک قدرتمند هستند که ضخامت شاک بسیار اندک است [۱۰] و با افزایش قدرت شاک (افزایش ماخ جریان پیش از شاک) ضخامت کاهش خواهد یافت و در عمل ناپیوستگی به شمار می‌رود. روش‌های عددی دارای خطای پخش در اطراف شاک نوسانات غیر فیزیکی ایجاد خواهند کرد. وجود نوسانات غیر فیزیکی در مسائلی که پدیده‌ی پخش[2] دارای اهمیت است، همانند پاشش [۱۱] و گسترش آلودگی [۱۲]، می‌تواند نتایج به‌دست‌آمده از مدل‌سازی را به‌شدت تحت تأثیر قرار دهد. نوسانات خطای اتلاف ضخامت شاک را افزایش خواهد داد و آن را به پیوستگی تبدیل خواهد کرد و به این دلیل پاسخ دارای خطا خواهد بود. همچنین ناپایداری‌های جریان در اثر اتلاف روش عددی محو خواهند شد. روش‌های ذاتاً بدون‌نوسان[3] علاوه بر دارا بودن خطای اتلاف اندک، در اطراف ناپیوستگی نوسان غیرفیزیکی ایجاد نمی‌کنند. با افزودن وزن به این روش‌ها، مشتق‌گیری یک‌سویه جریان‌نگر[4] ممکن خواهد شد. روش ونو یکی از روش‌های پرکاربرد در شاک‌گیری است که بر این اساس توسعه یافته است [۱۳]. در دو دهه گذشته، تلاش‌های زیادی برای بهبود روش‌های شاک‌گیری با اصلاح ونو صورت گرفته است[۱۴و۱۵]. روش انو هموارترین زیر استنسیل[5] را به کار می‌گیرد، در حالی که که طرح ونو از ترکیب وزنی از همه استنسیل ها استفاده می کند و به این ترتیب مرتبه دقت تقریب نهایی را افزایش می دهد[۱۸-۱۶]. نشانگر همواری سراسری[6] ترکیبی از استنسیل های فرعی است که با بهینه سازی و افزایش مرتبه این نشانگر دقت روش عددی در نقاط بحرانی افزایش می یابد[۲۱-۱۹].

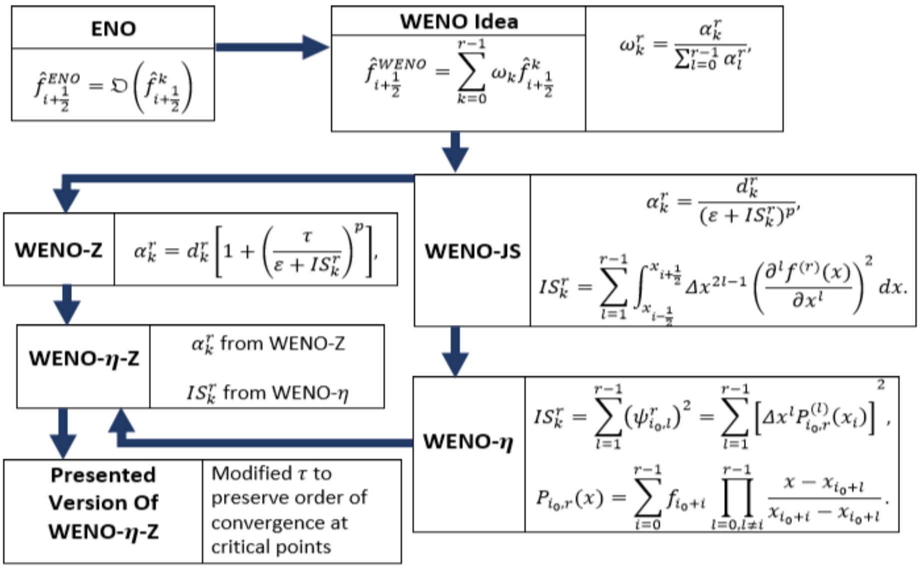
یکی از نوآوری‌های پژوهش حاضر، دستیابی به یک تابع جدید نشانگر سراسری همواری است که علاوه بر حفظ مرتبه همگرایی، در نقاط اکسترمم نسبی (نقاط بحرانی) خطای عددی کمتری اعمال کرده است. مرتبه همگرایی روش به‌دست‌آمده، در مقایسه با روش‌های بهینه مشابه، در شبکه‌های متراکم به‌طور مشخص بهتر است. در حل مسائل پایه مشخص شده است که روش به‌دست‌آمده خطای کمتری در نقاط بحرانی داشته است. نشانگر همواری بهینه

[1] WENO
[2] Diffusion
[3] Essentially Non Oscilatory (ENO)
[4] Upwind
[5] Stencil
[6] Global Smoothness Indicator(GSI)

بدست آمده در این پژوهش در مسائل دو بعدی حل شده با روش عددی جدید قابل تشخیص است. هر روش عددی با تعداد نامتناهی مسأله می‌تواند مورد آزمون قرار بگیرد و هر مسأله جنبه‌هایی از توانمندی روش را اثبات خواهد کرد. در ابتدا به منظور نمایش دقت کد عددی توسعه‌یافته، تعدادی مسائل رایج به‌عنوان بنچمارک[1] ارائه شده است که با مقالات پیشین مشترک است. در ادامه دو مسأله تداخل شاک–حباب و ریشتمیر–مشکف با کد عددی مورد استفاده حل گردیده و دقت پاسخ به دست آمده در مقایسه با روش‌های مشابه تحلیل شده است. نوآوری اصلی در مقایسه با مقاله‌های پیشین استخراج دو نسخه از روش ونو-زی با توسعه دو نشانگر همواری مرتبه بالای جدید بر مبنای افزایش مرتبه دقت در نقاط اکسترمم، حل مسائل دو بعدی جدید با روش‌های توسعه یافته، مقایسه کمی میان راندمان این روش‌ها و توسعه کد دو بعدی به منظور حل مسائل شاک-اغتشاش است.

۲- روش عددی

روش به‌کاررفته در کد عددی، روش ونو از مرتبه ۷ است. در فلوچارت شکل (۲) رابطه‌ی تکاملی برخی از روش‌های ونو در ارتباط با همدیگر ترسیم شده است که از مرور گسترده پیشینه پژوهش به دست آمده است. روش انو از میان تخمین‌های مختلف شار عددی، مسطح‌ترین آن را انتخاب می‌کند که به مرتبه دقت ۳ بر روی استنسیل ۵ نقطه‌ای خواهد انجامید. در حالت جامع روش ونو، با میانگین وزنی از سه شار عددی، مرتبه دقت در نقاط مسطح افزایش خواهد یافت (مرتبه ۵ بر روی استنسیل ۵ نقطه‌ای). در تعریف وزن‌های روش ونو ضرایب α_k^r از روش میانیابی به گونه‌ای استخراج می‌شوند که در مناطق مسطح مرتبه دقت را حفظ کنند. در این مقاله دو نسخه بهبودیافته از این روش، با در نظر گرفتن کاهش اتلاف عددی در نقاط اکسترمم ارائه شده است. روش جدید در مسائل یک‌بعدی و دوبعدی مورد آزمون قرار گرفته است تا کارایی آن در شبیه‌سازی مسائل دارای پدیده‌ی تداخل شاک و اغتشاش مشخص شود. دلیل انتخاب این پدیده، وجود همزمان ناپیوستگی (شاک) و نقاط اکسترمم است که در اغتشاش مشاهده می‌شود.



شکل ۲- نمودار انواع روش‌های ونو و جایگاه نوآوری روش حاضر

بهینه سازی کد عددی با استفاده از نرم‌افزار میپل[2] انجام شده و توابع همواری بهینه استخراج گردیده است. معادلات در دو زبان برنامه نویسی مختلف توسعه‌یافته و مورد آزمون واقع شده اند. معادلات خطی در نرم‌افزار متلب[3] حل شده اند. برای حل معادلات اویلر با توجه به حجم محاسبات، از زبان برنامه‌نویسی فرترن[4] که راندمان محاسباتی مناسبی را در اختیار می‌گذارد استفاده شده است.

[1] Benchmark
[2] Maple
[3] MATLAB
[4] Fortran

۲-۱- فرمول‌بندی روش ونو

به‌منظور ارائه فرمول‌بندی روش ونو، معادله‌ی بقا در فرم رابطه (۱) را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0 \qquad (۱)$$

در معادله‌ی (۱) متغیرهای t و x به ترتیب ابعاد مکان و زمان هستند. u پارامتر تابع مکان و زمان است و f تابع شار نام دارد. با در نظر گرفتن تابع در نقطه‌ی i می‌توان معادله را به فرم نیمه‌گسسته نوشت (رابطه (۲)).

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i=-f_i', \qquad (۲)$$

در معادله‌ی (۲)، f_i' یک تخمین از مشتق مکانی f در نقطه‌ی x_i است. در این مقاله نحوه‌ی تخمین این مشتق مکانی به روش ونو موردتوجه است.

$$,\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i=-\frac{1}{\Delta x}\left(h_{i+\frac{1}{2}}-h_{i-\frac{1}{2}}\right) \qquad (۳)$$

که در آن $h_{i\pm\frac{1}{2}}=h(x_{i\pm\frac{1}{2}})$ تعریف می‌شود. فرمول‌بندی خطی تابع به شکل رابطه (۴) است:

$$\hat{f}^L_{i+\frac{1}{2}}=\sum_{k=-r+1}^{r-1}a_k^{2r-1}f_{i+k}, \qquad (۴)$$

در رابطه (۴) ضرایب a_k^{2r-1} ثابت هستند و بالانویس L نشانگر جهت استنسیل است. در محاسبه‌ی تابع فوق، استنسیل $S^{(2r-1)}$ شامل r زیر-استنسیل به شکل $S_k^r=\{x_{i+k-r+1},\ldots,x_{i+k}\}$ است، که می‌توان معادله‌ی (۵) را بر این اساس به شکل ترکیبی از تابع شار در هر زیر-استنسیل نوشت:

$$\hat{f}^L_{i+\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{r-1}d_k^r\hat{f}^r_{k,i+\frac{1}{2}}, \qquad (۵)$$

که در آن ضرایب $\hat{d}_k^r$ وزن‌های خطی هستند که در مورد آن‌ها رابطه‌ی $\sum_{k=0}^{r-1}d_k^r=1$ برقرار است. تخمین ونو از یک ترکیب غیرخطی $\hat{f}^r_{k,i+\frac{1}{2}}$ برای تمام زیر-استنسیل‌ها استفاده می‌کند.

$$\hat{f}^L_{i+\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{r-1}\omega_k^r\hat{f}^r_{k,i+\frac{1}{2}}, \qquad (۶)$$

ضرایب ω_k^r در معادله‌ی (۶) وزن‌های غیرخطی نرمال شده برای هر زیر-استنسیل هستند که به این شکل محاسبه می‌شوند:

$$\omega_k^r=\frac{\alpha_k^r}{\sum_{l=0}^{r-1}\alpha_l^r}, \qquad (۷)$$

که در آن ضرایب α_k^r وزن‌های هر زیر-استنسیل (نرمال نشده) هستند. از معادله‌ی (۷) می‌توان نتیجه گرفت $\sum_{k=0}^{r-1}\omega_k^r=1$. وزن‌های ω_k^r به نحوی طراحی می‌شوند که در نواحی هموار $\omega_k^r\to d_k^r$ میل کند. یک فرمول‌بندی برای به دست آوردن این ضرایب [۹] به این شکل است:

$$\alpha_k^r=\frac{d_k^r}{(\varepsilon+IS_k^r)^p}, \qquad (۸)$$

نشانگرهای هموار جدید از مرتبه‌ی $O(\Delta x^{12})$ هستند و مطابق با رابطه (۹) و (۱۰) به کار گرفته شده است. هردو عبارت از مرتبه دقت ۱۲ هستند، که از مجموع و تفاضل دو تابع بهینه مرتبه ۱۲ تشکیل شده‌اند.

$$\begin{aligned}\tau_{ms3}=&\left(\psi_{0,1}^4+3\psi_{1,1}^4-3\psi_{2,1}^4-\psi_{3,1}^4\right)^2\\&+\left(\psi_{0,3}^4-3\psi_{1,3}^4+3\psi_{2,3}^4-\psi_{3,3}^4\right)^2\\&=O(\Delta x^{12}).\end{aligned} \qquad (۹)$$

$$\begin{aligned}\tau_{ms4}=&\left(\psi_{0,1}^4+3\psi_{1,1}^4-3\psi_{2,1}^4-\psi_{3,1}^4\right)^2\\&-\left(\psi_{0,3}^4-3\psi_{1,3}^4+3\psi_{2,3}^4-\psi_{3,3}^4\right)^2\\&=O(\Delta x^{12}).\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

جزئیات بیشتری از محاسبات منجر به استخراج تابع هموار در مرجع [۱۳] قابل‌دسترسی است. و در این مقاله با استفاده از مجموع مربعات توابع بهینه، یک نشانگر جدید استفاده شده است. این ترکیب به‌طور واضح دقت عددی را افزایش خواهد داد. رفتار روش ونو نسبت به‌دقت عددی قابل پیش‌بینی نیست و ممکن است افزایش دقت کاهش یا افزایش اتلاف عددی شود. با توجه به هدف بهینه‌سازی که این نشانگر هموار باعث افزایش دقت روش عددی در مسائل دربرگیرنده‌ی شاک و اغتشاش شود، باید مسائل پایه که بیانگر رفتار روش عددی در شبیه‌سازی شاک-اغتشاش شوند مورد بررسی قرار بگیرند. یکی دیگر از موارد دارای اهمیت در روش عددی بهینه‌سازی شده، نرخ همگرایی روش است. نرخ همگرایی به معنی سرعت نزدیک شدن پاسخ عددی به پاسخ دقیق معادلات اولیه با کوچک کردن

تفاضل است، که در عمل نشان‌دهنده‌ی به‌صرفه بودن روش در شبکه‌های بسیار متراکم است. توانایی شاک-گیری روش بهینه را می‌توان در حل مسائل لوله‌ی شاک مورد آزمایش قرار داد.

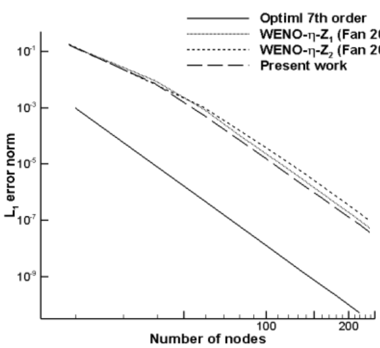
۲-۲- آزمون همگرایی

نخستین ویژگی مورد انتظار از روش عددی بهبودیافته، بهبود در همگرایی در کل میدان است. به‌منظور سنجش همگرایی روش توسعه داده شده مرتبه ۷ ونو، از حل معادله موج خطی (رابطه (۱۱)) به این منظور استفاده می‌شود. شرایط مرزی مورداستفاده در این مسئله متناوب[1] است و شرایط اولیه به شکل معادله‌ی (۱۲) در نظر گرفته می‌شود.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0, -1\le x\le 1. \qquad (۱۱)$$

$$u(x,t=0)=sin^{l}(\pi x), \qquad (۱۲)$$

شرایط اولیه شامل یک نقطه‌ی اکسترمم از مرتبه‌ی $l-1$ در نقطه‌ی $x=0$ برای $l>1$ است. به‌منظور مشخص شدن اثر روش گسسته‌سازی مکانی بر روی مرتبه همگرایی، عدد CFL در تمام محاسبات برابر با 0.05 در نظر گرفته شده است تا خطای ناشی از انتگرال‌گیری زمانی به حداقل برسد. روند همگرایی نرم خطا بر اساس تعداد نقاط در شکل (۳) نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که روند همگرایی روش بهبودیافته در مقایسه با روش مرتبه ۷ بهینه و روش‌های مرجع مشخص‌شده همگرایی بسیار بهتری دارند، و به‌طور ویژه از روش‌های مرجع [۲۲] نرخ همگرایی بسیار بالاتری دارند. به دلیل نزدیکی بسیار زیاد نمودارهای روش‌های توسعه‌یافته، تنها نتایج به‌دست‌آمده با روش اول (رابطه(۹)) در آزمون‌های یک‌بعدی ترسیم شده است.



شکل ۳- نرخ همگرایی خطای L_1 برای روش مرتبه هفت ونو-اتا و روش حاضر.

[1] Periodic

چنان‌که از نمودارهای شکل(۳) مشخص است، همگرایی روش‌های مورد بررسی دارای تفاوت جزئی می‌باشد. با تعریف نرخ همگرایی به شکل رابطه (۱۳)، که در آن L_1 نرم خطا و N تعداد نقاط است، می‌توان همگرایی روش‌های مورد بررسی را به طور کمی مشخص کرد [۲۳].

$$q=\frac{log(L_1^2/L_1^1)}{log(N^2/N^1)} \qquad (۱۳)$$

مقادیر کمی به دست آمده برای این کمیت در جدول۱ ارائه شده است. مشاهده می‌شود که این مقدار برای آزمون انجام گرفته در روش حاضر به بالاترین میزان رسیده است.

جدول۱- نرخ همگرایی خطای L_1 برای روش مرتبه هفت ونو-اتا و روش حاضر.

روش	اندازه نرخ همگرایی
$WENO\_\eta\_z_1$	۶.۸ Δx^7
$WENO\_\eta\_z_2$	۷.۲ Δx^7
روش حاضر	۷/۴ Δx^7

۳-معادلات حاکم

معادلات حاکم بر مسئله‌ی نهایی در این پژوهش، معادلات ناویر-استوکس در فرم بقایی هستند. این معادلات به شکل ماتریسی که در کد محاسباتی مورد استفاده قرار می‌گیرد، در رابطه‌های (۱۴) و (۱۵) بیان شده‌اند. [۲۴]

$$U_t+F(U)_x+G(U)_y=Q \qquad (۱۴)$$

$$U=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ E\end{bmatrix}\quad F=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ u(E+p)\end{bmatrix}\quad G=\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ v(E+p)\end{bmatrix} \qquad (۱۵)$$

که در این معادلات ماتریکس Q نیروهای حجمی را مشخص می‌کند. رابطه‌ی میان فشار (p) و انرژی درونی (E) طبق فرمول (۱۶) و روابط گاز کامل، که بیان‌گر ویژگی ترمودینامیکی گاز ایده آل است در نظر گرفته شده است

[۲۵].

$$E = \frac{p}{(\gamma - 1)} + \frac{1}{2}\,\rho(u^2 + v^2) \qquad (۱۶)$$

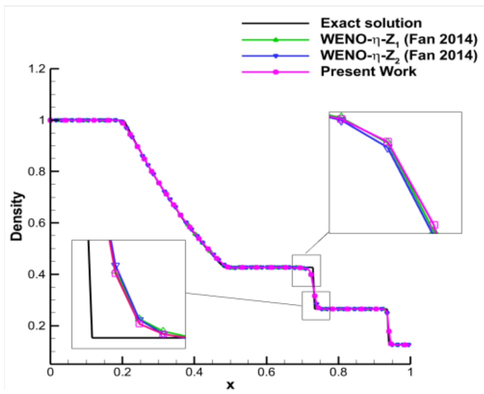
در حل مسائل یک‌بعدی عبارت $\boldsymbol{G}$ حذف می‌شود و همچنین نیروی حجمی در تمامی مسائل ارائه‌شده صفر در نظر گرفته شده است.

۴-مسائل مورد بررسی

در این بخش تعدادی از مسائل رایج و شناخته‌شده به‌عنوان بنچمارک جهت بررسی صحت حلگر عددی مورد بررسی و مقایسه با مراجع قرار گرفته است. تعریف تمامی مسائل در مرجع [۱۳] ارائه شده است. مسائل شامل شاک، اغتشاش، یا ترکیب هردو هستند. نخست مسائل یک‌بعدی که عموماً حل معادله اویلر یک‌بعدی هستند مورد بررسی قرار گرفته و در ادامه مسائل دوبعدی به ترتیب اهمیت ازنظر نتیجه‌گیری و مقایسه میان روش‌ها ارائه شده‌اند.

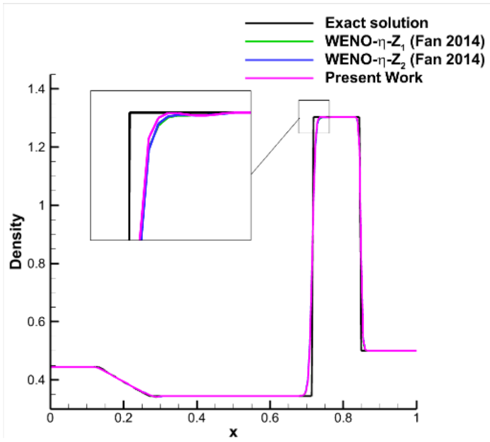
۴-۱- مسائل یک‌بعدی

دقت روش ارائه‌شده در آشکارسازی شاک، در حل دو مسئله یک‌بعدی استاندارد سنجیده شده است. مسئله شاک تیوب ساد، یک مسئله شناخته‌شده جهت بررسی توان روش‌های عددی در آشکارسازی شاک قدرتمند است. با توجه به هدف بهینه‌سازی در این مقاله که تنها بر روی کاهش اتلاف عددی در نقاط اکسترمم متمرکز است، در توان آشکارسازی انتظار عملکرد مشابه با روش مرجع است. در شکل (۴) پاسخ مسئله ساد برای روش‌های مرجع و روش حاضر ارائه شده است. مشاهده می‌شود که روش حاضر عملکردی مشابه و در نقاط نزدیک به شاک عملکردی تقریباً بهتر از روش‌های مرجع نشان می‌دهد.



شکل ۴- پاسخ مسئله شاک تیوب ساد برای روش حاضر در مقایسه با دو روش مرجع و حل دقیق

مسئله‌ی دیگری که در این بخش مورد مقایسه و بررسی قرار گرفته است، مسئله لکس[۱] است که به‌منظور توان آشکارسازی شاک حل شده است. مطابق پاسخ ارائه‌شده در شکل (۵)، روش بهبودیافته حاضر، عملکردی مشابه و اندکی بهتر از روش‌های مرجع نشان داده است. باید در نظر داشت که آنچه از حل این دو مسئله مورد انتظار است، عدم کاهش توان روش عددی در آشکارسازی شاک پس از بهینه‌سازی است، که این هدف کاملاً برآورده شده است، و به دلیل همگرایی بهتر روش حاضر، در برخی نقاط نزدیک به شاک در هر دو مسئله، پاسخ روش حاضر بهتر از روش های مرجع است.



شکل ۵- پاسخ مسئله لکس برای روش حاضر در مقایسه با دو روش مرجع و حل دقیق

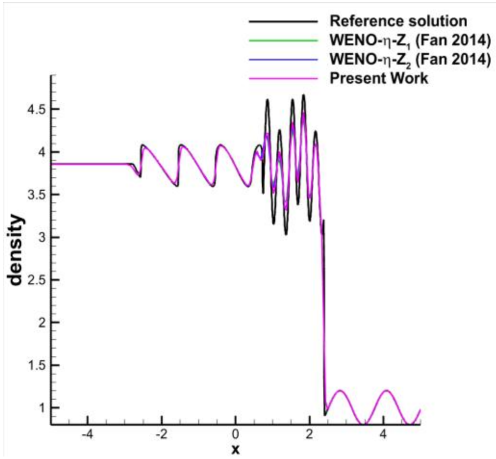
۴-۲- مسائل دوبعدی صحت‌سنجی

در این بخش دو مسئله شامل تداخل شاک و اغتشاش مورد بررسی قرار گرفته است. مسئله نخست، یک‌بعدی موسوم به مسئله شو-اوشر[۲] است که معادلات اویلر یک‌بعدی برای شرایط اولیه مشخص که شامل نوسانات در اطراف یک شاک است حل می‌شود. در شکل (۶) پاسخ این مسئله که با شبکه بسیار متراکم به دست آمده است به‌عنوان پاسخ مرجع در نظر گرفته شده است و پاسخ روش‌های ذکرشده با روش ارائه‌شده در کنار آن مقایسه شده است.

در شکل (۷) نمای نزدیک از نوسانات (اغتشاش) نمایش داده شده است. نزدیک بودن دامنه روش حاضر به دامنه حل مرجع مشخص است. دلیل بهبود در پاسخ به‌دست‌آمده، بهینه بودن روش حاضر به‌طور ویژه برای نقاط اکسترمم است.

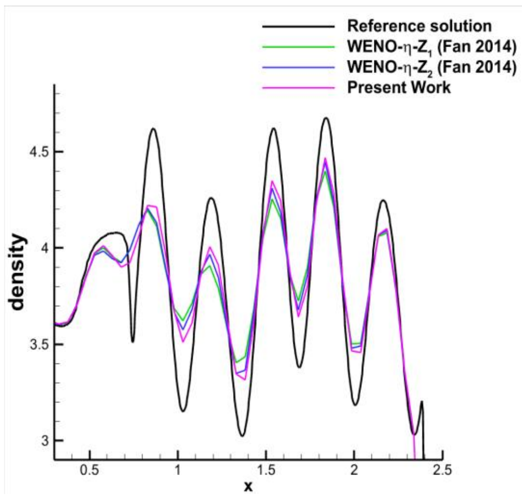
[1] Lax

[2] Shu-Osher

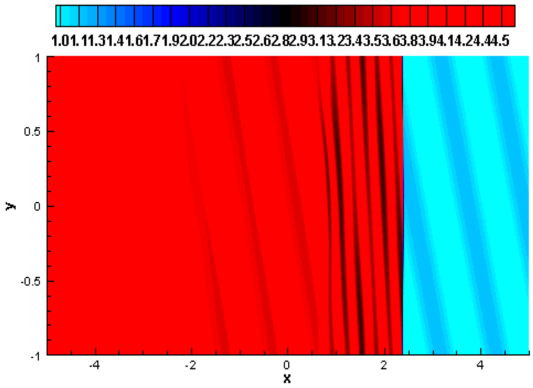


شکل ۶- پاسخ مسئله شو-اوشر به‌دست‌آمده با روش‌های مرجع در مقایسه با پاسخ روش حاضر و حل دقیق

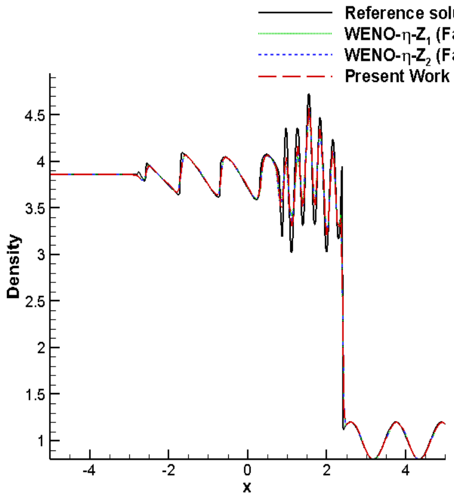
در شکل (۸) کانتورهای چگالی به‌دست‌آمده روی شبکه متراکم برای مسئله دوبعدی تداخل شاک-اغتشاش نمایش داده شده که شامل یک شاک متحرک است که از سمت چپ میدان به سمت راست حرکت می‌کند. اغتشاشات در نظر گرفته‌شده به شکل امواج در سمت راست، در گذر از شاک تغییر می‌کنند. به‌منظور مقایسه پاسخ روش حاضر با روش‌ها و حل مرجع، نمودار نوسانات چگالی در خط میانی میدان در شکل (۹) ترسیم شده است. نمای نزدیک از نوسانات اغتشاشی پشت شاک، در شکل (۱۰) ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که در مسئله دوبعدی نیز حل به‌دست‌آمده از روش عددی بهبودیافته دارای خطای کمتر و دامنه نوسانات با این روش به حل مرجع نزدیک‌تر است (شکل ۱۱).



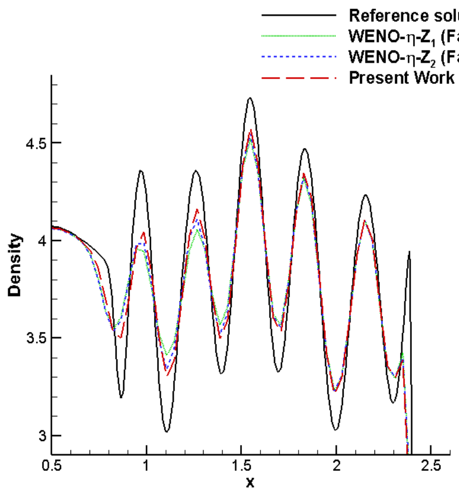
شکل ۷- نمای نزدیک از پاسخ مسئله شو-اوشر



شکل ۸- کانتورهای حل دقیق مسئله دوبعدی تداخل شاک-اغتشاش بر روی شبکه بسیار متراکم



شکل ۹- پاسخ مسئله دوبعدی تداخل شاک-اغتشاش در خط میانی، مقایسه‌ی پاسخ روش‌های مرجع در مقایسه با پاسخ روش حاضر و حل دقیق

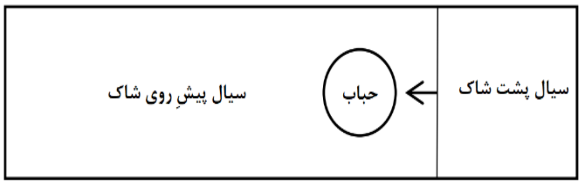


شکل ۱۰- نمای نزدیک از پاسخ مسئله دوبعدی تداخل شاک-اغتشاش

مطابق مسائل یک و دوبعدی بررسی‌شده، می‌توان از صحت عملکرد کد در آنها اطمینان حاصل کرد. .

۴-۳- مسئله تداخل شاک-حباب

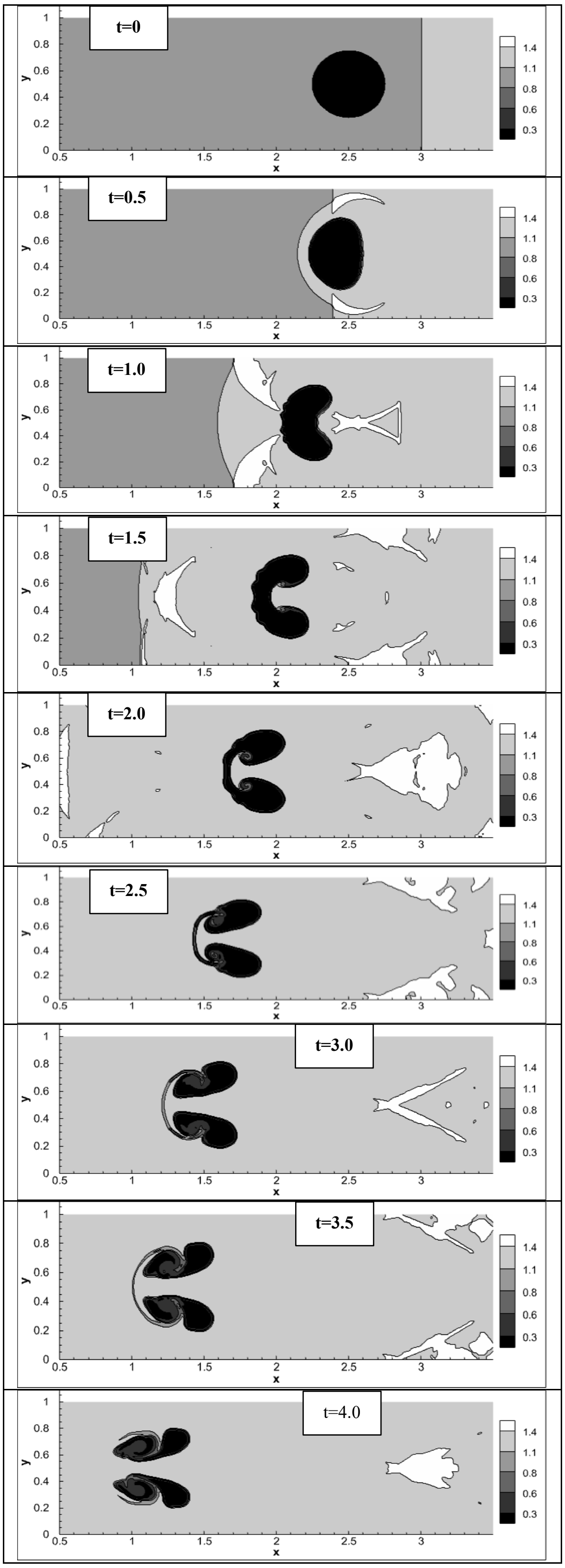
مسئله تداخل شاک-حباب [۲۶] در این پژوهش به‌عنوان بررسی شاک-اغتشاش مورد بررسی قرار گرفته است. در شکل (۱۱) شماتیک مسئله ارائه شده است که در آن یک شاک متحرک از سمت راست میدان به سمت چپ حرکت می‌کند و در برخورد با حباب، باعث ایجاد اغتشاشات می‌شود. تمامی نتایج مربوط به این مسئله بر روی شبکه دارای ۱۶۰*۶۴۰ سلول محاسبه شده است.



شکل ۱۱- شماتیک مسئله تداخل شاک-حباب

روند تکامل مسئله تداخل شاک-حباب در شکل (۱۲) با دنبال کردن روند زمانی تکامل آن ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که در ابتدا حباب به شکل یک ناپیوستگی چگالی دایروی در بخش دارای چگالی کمتر واقع شده است. شاک که حدفاصل میان دو بخش پرفشار و کم‌فشار است به سمت چپ حرکت می‌کند و در برخورد با حباب انواع مختلفی از ناپیوستگی را ایجاد می‌کند. با افزایش زمان در سطوح ناپیوستگی اغتشاشات به‌تدریج ایجاد می‌شود. روش‌های مرتبه پایین این اغتشاشات را که نوع ناپایداری کلوین-هلمهولتز هستند را تقریباً به‌طور کامل تلف می‌کنند. همچنین اگر روش دارای پایداری کافی نباشد، این نوع از اغتشاشات به حدی گسترش خواهند یافت که حل عددی واگرا می‌شود.

در شکل (۱۳) نتایج به‌دست‌آمده از حل مسئله برخورد شاک-حباب در زمان $t = 2$ با استفاده از روش‌های توسعه‌یافته حاضر، دو روش توسعه‌یافته مشابه [۲۹-۲۷] و روش‌های توسعه‌نیافته[۱۳] مورد مقایسه قرار گرفته است. در زمان $t = 2$ شاک از میدان خارج شده است و روش عددی توانایی خود را در پایداری تا زمان رساندن شاک به انتهای میدان نشان داده است. همچنین نوسانات ناشی از ناپایداری بر روی مرز حباب تا حد قابل قبولی تشکیل شده است. پاسخ به‌دست‌آمده با استفاده از روش‌های توسعه‌نیافته($WENO_{\eta z1,2}$)[۱۳] بیشتر نوسانات کوچک را از میان برده‌اند، که به دلیل مرتبه پایین‌تر نشانگر همواری در این روش‌هاست.

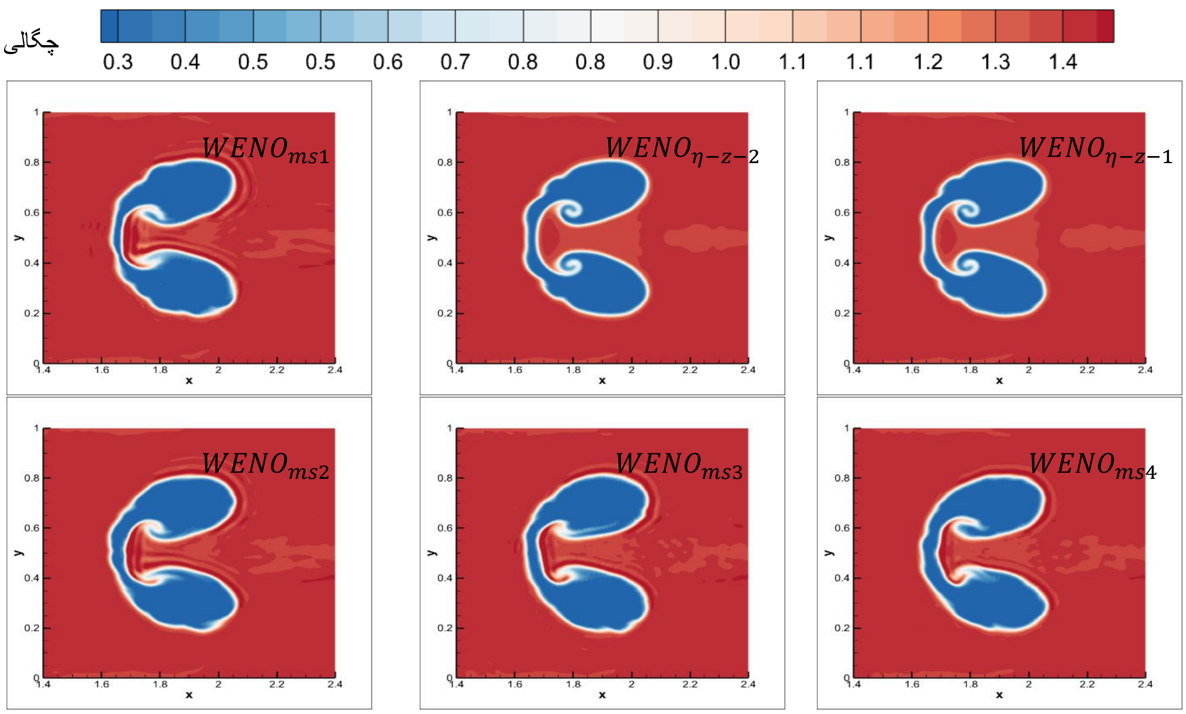


شکل ۱۲- بررسی روند توسعه مدل‌سازی تداخل شاک-حباب با استفاده از روش ارائه‌شده در زمان‌های مختلف

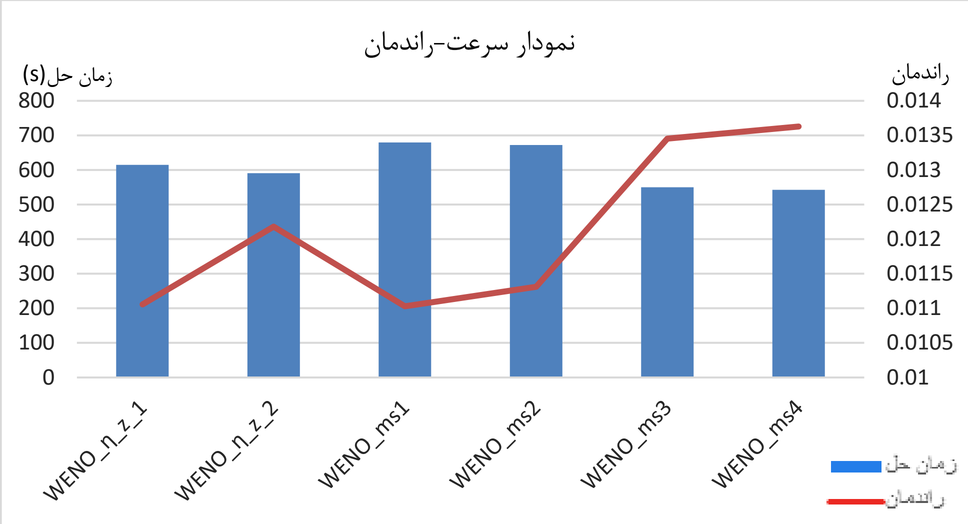
روش‌های بهبودیافته شماره ۱(WENO$_{ms1}$) [۲۶]و شماره ۲ (WENO$_{ms2}$) [۲۹] که دارای مرتبه نشانگر همواری مشابه با روش‌های توسعه‌یافته در این پژوهش هستند، بیشترین پراکندگی در نوسانات اغتشاشی را نشان می‌دهند. روش‌های توسعه‌یافته حاضر(WENO$_{ms3,4}$) در مقایسه با روش‌های توسعه‌نیافته به‌طور واضح اتلاف عددی کمتری دارند. در مقایسه با روش‌های توسعه‌یافته مشابه [۲۰-۱۸]، روش‌های حاضر پایداری بیشتری نشان می‌دهند. این پایداری از تقارن نسبی قابل‌مشاهده در پاسخ روش‌های توسعه‌یافته شماره ۳ و ۴ در برابر پاسخ روش‌های توسعه‌یافته ۱ و ۲ قابل‌برداشت است. البته تقارن علاوه بر پایداری روش، می‌تواند ناشی از عوامل دیگری در کدنویسی باشد که در مرجع [۳۰] در مورد آن بحث شده است. ولی در مقایسه فعلی تمام روش‌ها در کد مشابهی اعمال شده‌اند و تنها سابروتین محاسبه تابع همواری متفاوت است. باید در نظر داشت که در بسیاری از کاربردهای مهندسی، پایداری و تقارن پاسخ به‌دست‌آمده از شبیه‌سازی جریان به روش عددی دارای اهمیت است. برای نمونه در محاسبه نیروی وارد بر اجسام پرنده متقارن، عدم تقارن در پاسخ می‌تواند به خطای مهندسی منجر شود و در شبیه‌سازی بسیاری از جریان‌ها، ازجمله جریان‌های
منجر به ناپایداری کلوین-هلمهولتز، ناپایداری روش عددی مرتبه بالا، حتی به میزان بسیار اندک، می‌تواند منجر به واگرایی حل عددی شود. ملاحظه می شود روش حاضر در میان روش‌های بهینه بالاترین میزان همگرایی را نشان داده است. در مقایسه میان روش‌های بهینه‌سازی شده، استفاده از پارامتر زمان حل می‌تواند مقادیر معنی‌داری را مشخص کند. در جدول ۲ زمان حل مسأله شاک-حباب و حاصلضرب سرعت (معکوس زمان حل) را ارائه داده است. در این جدول برتری روش‌های حاضر در برآیند این دو سنجه به طور قابل ملاحظه‌ای بهبود یافته است، که بخشی از آن به دلیل افزایش پایداری و گام زمانی بزرگتر در حل عددی با CFL ثابت است.

جدول۲- مقایسه میان نرخ همگرایی روش‌های مورد استفاده (در مسأله موج یک‌بعدی) و مدت زمان حل مسأله تداخل شاک-حباب

روش	اندازه نرخ همگرایی	زمان حل مسأله شاک-حباب (CFL=0.5، t=2) به ثانیه	حاصلضرب سرعت در مرتبه همگرایی
$WENO\_\eta\_z_1$	۶.۸ Δx^7	۶۱۵	۰.۰۱۱۵۰۷
$WENO\_\eta\_z_2$	۷.۲ Δx^7	۵۹۱	۰.۰۱۲۱۸۳
$WENO_{ms1}$	۷.۵ Δx^7	۶۸۰	۰.۰۱۱۰۲۹
$WENO_{ms2}$	۷.۶ Δx^7	۶۷۲	۰.۰۱۱۳۱
$WENO_{ms3}$	۷.۴ Δx^7	۵۵۰	۰.۰۱۳۴۵۵
$WENO_{ms4}$	۷.۴ Δx^7	۵۴۳	۰.۰۱۳۶۲۸



شکل ۱۳- مقایسه پاسخ مسئله تداخل شاک-حباب در زمان **t = 2** با روش‌های مختلف.

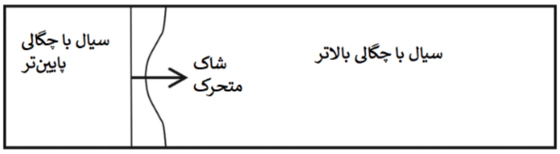


شکل ۱۴- مقایسه پاسخ مسئله تداخل شاک-حباب در زمان $\mathbf{t = 2}$ با روش‌های مختلف.

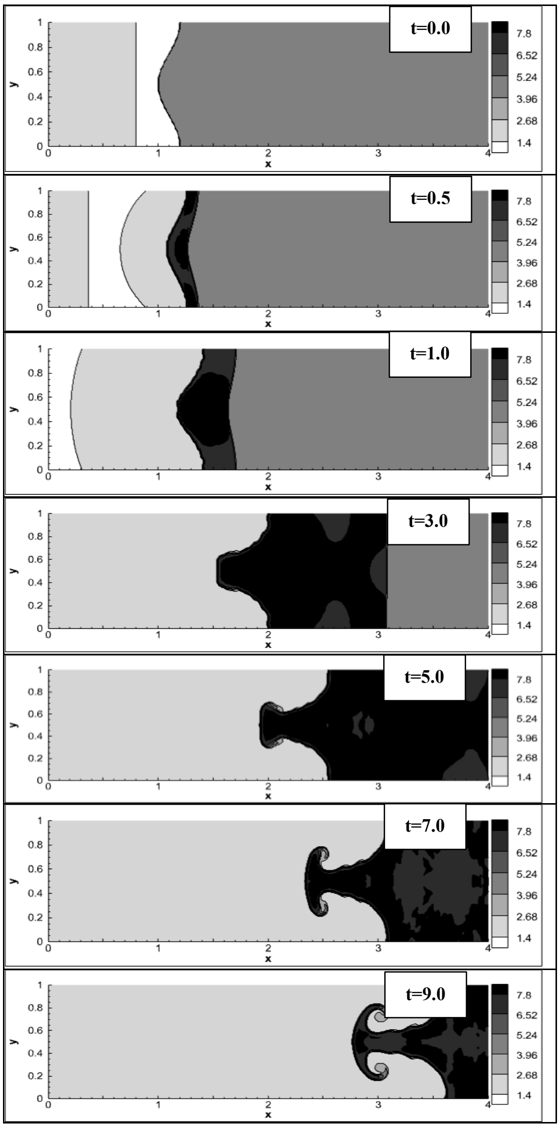
به منظور مقایسه کمّی میان روش‌های مورد بررسی، زمان حل مسأله تداخل شاک-حباب برای هر روش بر روی پردازشگر همسان مورد مقایسه قرار گرفته است که در شکل (۱۴) قابل مشاهده است. همچنین حاصلضرب سرعت (معکوس زمان حل) در نرخ همگرایی به عنوان کمیت راندمان ارائه گردیده است. این کمیت بیانگر ارزش محاسباتی روش عددی خواهد بود. در نمودهای شکل (۱۴) قابل مشاهده است که روش‌های حاضر راندمان بسیار بالاتری از دیگرروشهای بهینه و توسعه‌نیافته ارائه داده‌اند.

۴-۴- مسئله ریشتمیر-مشکف

مسئله ریشتمیر-مشکف [۲۶] بیانگر توسعه اغتشاشات در محیط غیر لزج تحت تأثیر حرکت شاک است. شماتیک آن در شکل (۱۵) ارائه شده است. به صورتی که دو سیال دارای چگالی بالا و پایین به‌واسطه‌ی یک ناحیه دارای چگالی بسیار پایین که در یک سمت آن اغتشاش اولیه با چگالی بسیار بالا در نظر گرفته شده است، جدا شده‌اند. به‌محض شروع حل عددی دو موج شاک به دو سوی میدان حرکت می‌کنند. شاک قدرتمندتر که طبق تصویر شکل (۱۵) از سمت چپ به سمت راست میدان حرکت می‌کند. تمامی نتایج مربوط به این مسئله بر روی شبکه دارای ۱۶۰*۶۴۰ سلول محاسبه شده است.



شکل ۱۵- شماتیک مسئله ناپایداری ریشتمیر-مشکف



شکل ۱۶- پاسخ مسئله دوبعدی تداخل شاک-اغتشاش در خط میانی، مقایسه¬ی پاسخ روش‌های مرجع در مقایسه با پاسخ روش حاضر و حل دقیق

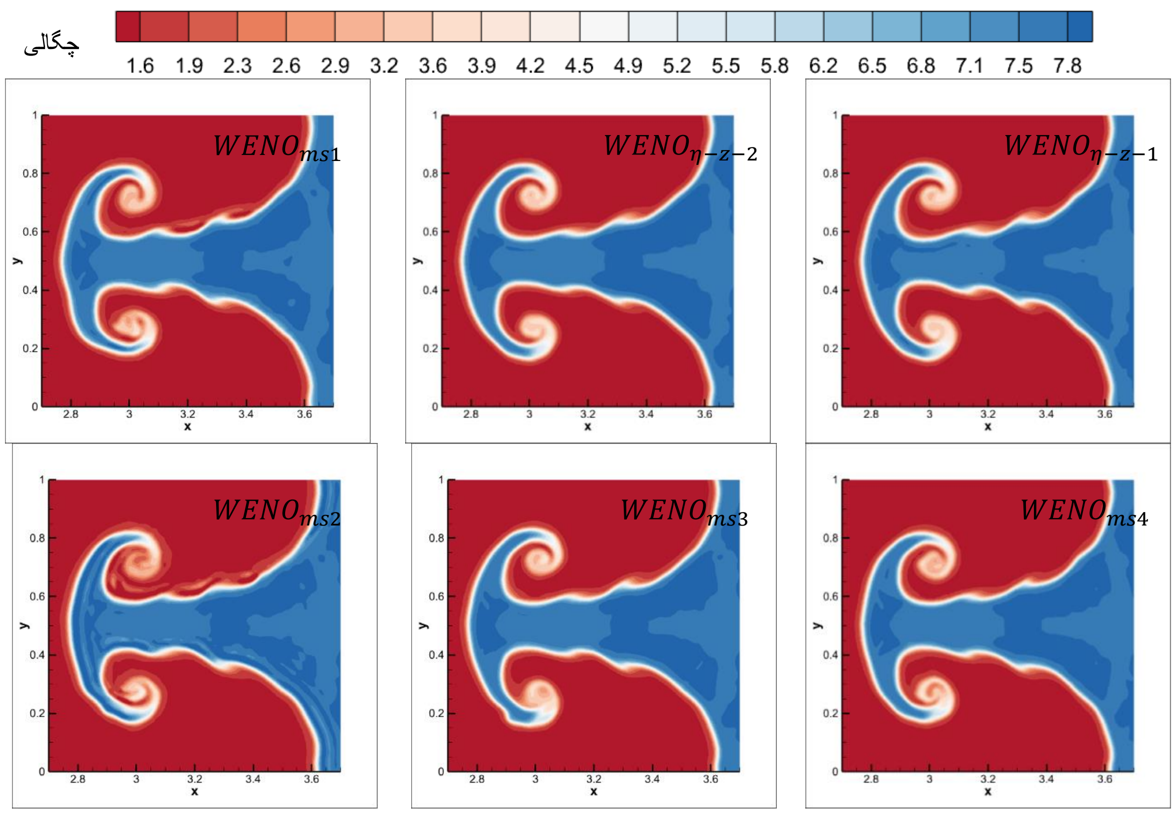
چنان‌که در شکل (۱۶) نمایش داده شده است، به‌تدریج با حرکت موج قدرتمند به سمت راست در ناحیه‌ی ناپیوستگی نوسانات ناشی از ناپایداری آشکار می‌شوند. این نوسانات به‌تدریج دو جریان مدور در اطراف مرز ناپیوستگی ایجاد می‌کنند که در زمان $t = 9$ به میزان قابل‌ملاحظه‌ای توسعه پیدا کرده است.

شکل (۱۷) نتایج به‌دست‌آمده از حل مسئله ناپایداری ریشتمیر-مشکف در زمان $t = 9$ با استفاده از روش‌های توسعه‌یافته حاضر، دو روش توسعه‌یافته مشابه [۲۰-۱۸] و روش‌های توسعه‌نیافته[۱۳] مورد مقایسه قرار گرفته است. کانتورهای وضعیت جریان در زمان مشخص بیانگر اتلاف عددی تقریباً بینابین برای روش‌های توسعه‌یافته جدید نسبت به روش توسعه‌نیافته و روش‌های شماره ۱ و ۲ است. با توجه به ناپایداری قابل‌مشاهده در کانتور مربوط به روش شماره سه که در سمت پایین چشمگیر است می‌توان گفت که روش شماره ۳ اتلاف عددی کمتری نسبت به روش شماره ۴ دارد. همچنین تقارن پاسخ روش‌های حاضر به‌طور واضح بهتر از روش‌های توسعه‌یافته پیشین است.

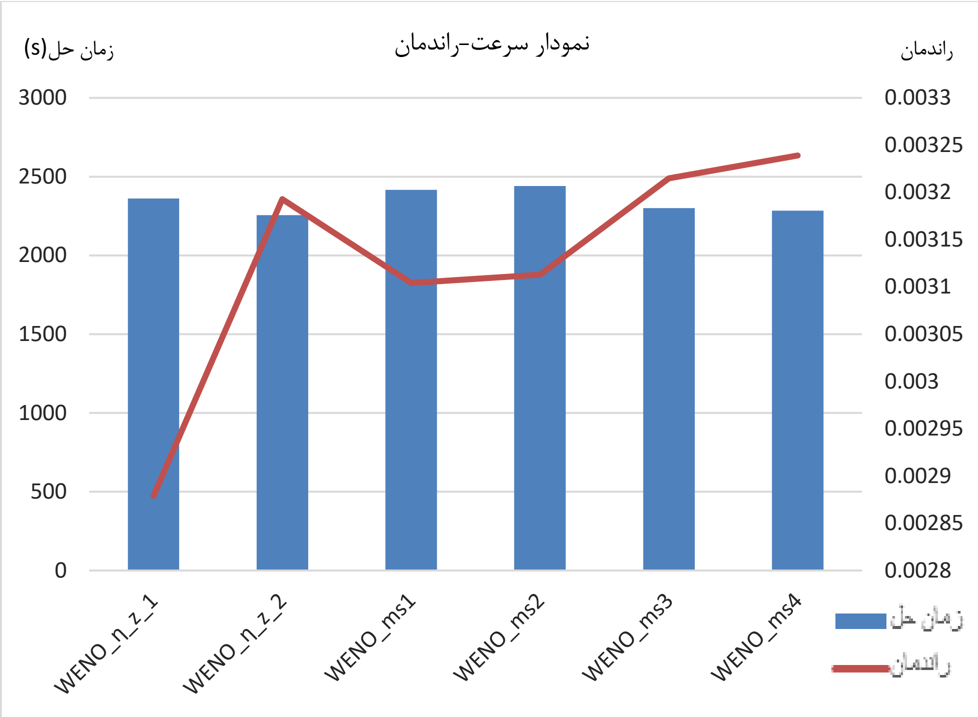
نتایج ارائه شده در جدول ۲ به منظور مقایسه، در قبال نمودارهای سرعت حل و راندمان در شکل (۱۸) ارائه گردیده است. در این نمودارها مشخص است که در این مسأله نیز همچنان روشهای توسعه یافته حاضر دارای راندمان بهتری نسبت به روش‌های پیشین هستند، هرچند این افزایش راندمان نسبت به مسأله شاک-حباب کمتر است.

جدول۲- مقایسه میان نرخ همگرایی روش‌های مورد استفاده (در مسأله موج یک‌بعدی) و مدت زمان حل مسأله ریشتمیر-مشکف

روش	اندازه نرخ همگرایی	مدت زمان حل مسأله ریشتمیر-مشکف (CFL=0.5، t=2) به ثانیه	حاصلضرب سرعت در مرتبه همگرایی
$WENO\_\eta\_z_1$	۶.۸ Δx^7	۲۳۶۲	۰.۰۰۲۸۷۹
$WENO\_\eta\_z_2$	۷.۲ Δx^7	۲۲۵۵	۰.۰۰۳۱۹۳
$WENO_{ms1}$	۷.۵ Δx^7	۲۴۶۱	۰.۰۰۳۱۰۴
$WENO_{ms2}$	۷.۶ Δx^7	۲۴۴۱	۰.۰۰۳۱۱۳
$WENO_{ms3}$	۷.۴ Δx^7	۲۳۰۱	۰.۰۰۳۲۱۵
$WENO_{ms4}$	۷.۴ Δx^7	۲۲۸۴	۰.۰۰۳۲۳۹



شکل ۱۷- مقایسه پاسخ مسئله تداخل ریشتمیر-مشکف در زمان $t = 4$ با روش‌های مختلف.



شکل ۱۸- مقایسه پاسخ مسئله تداخل ریشتمیر-مشکف در زمان $t = 4$ با روش‌های مختلف.

۵- نتیجه‌گیری

به‌منظور افزایش دقت محاسبات در مدل‌سازی عددی جریان تراکم‌پذیر، دو نسخه بهبودیافته از روش عددی ونو اتا - زی با رویکرد بهینه‌سازی تابع هموارى به هدف کاهش اتلاف عددی به دست آمده‌اند. به‌منظور بررسی عملکرد این دو روش عددی، حلگر جریان تراکم‌پذیر غیر لزج با روش ونو تا مرتبه ۷ توسعه یافته است. در مسائل یک‌بعدی، روش‌های توسعه‌یافته حاضر بهبود اندکی را نسبت به روش توسعه‌نیافته نشان می‌دهند که می‌تواند از اتلاف اغتشاشات پیشگیری کند. همچنین در مسائل یک‌بعدی که معادله موج خطی مورد بررسی قرار گرفته است، باتوجه‌به وجود پاسخ تحلیلی برای معادله، همخوانی نتایج با پاسخ تحلیلی بخشی از صحت‌سنجی کد توسعه‌یافته به شمار رفته است. درنهایت دو مسئله تداخل شاک - حباب و ناپایداری ریشتمیر-مشکف با کد عددی مورد بررسی قرار گرفت. بررسی دو روش توسعه‌نیافته ونو اتا-زی و دو روش توسعه‌یافته مشابه با روش‌های ارائه‌شده حاضر، نشان داد روش‌های حاضر در کنار ارائه اتلاف عددی کمتر نسبت به روش‌های توسعه‌نیافته، تقارن و پایداری نسبتاً بهتری را نسبت به دو روش توسعه‌یافته مشابه ارائه کرده‌اند. این روش‌ها در بررسی جریان‌های مختلف که در کنار پایداری، دستیابی به آشکارسازی مناسب شاک و ناپایداری‌های ناشی از اغتشاشات جریان اهمیت دارد می‌توانند کارایی بهتری داشته باشند. زیرا ناپایداری نسبی روش عددی، همانند آنچه در نتایج دو روش توسعه‌یافته مشابه قابل‌مشاهده است، باعث واگرایی حل عددی خواهد شد.

به‌منظور مقایسه کمی نتایج، دو پارامتر زمان و راندمان حل مورد بررسی قرار گرفت. راندمان حل پارامتر مناسبی است، زیرا علاوه بر سرعت حل عددی در شبکه ثابت، نرخ کاهش خطا با ریز کردن شبکه را نیز در خود جای‌داده است. مشاهده گردید که راندمان روش‌های توسعه‌یافته به طور معنی‌داری بهتر از راندمان روش‌های توسعه‌نیافته و روش‌های توسعه‌یافته پیشین است. این افزایش راندمان در حل مسائل سنگین محاسباتی می‌تواند اثر به سزایی داشته باشد که ارزش قابل‌قبولی به روش‌های توسعه‌یافته ارائه شده می‌دهد.

مراجع

[1] Ferziger JH. "Large eddy numerical simulations of turbulent flows". AIAA Journal,Vol. 15, NO. 5, Sep 1997, pp. 345 – 416

[2] Orszag SA, Israeli M. "Numerical simulation of viscous incompressible flows". Annual Review of Fluid Mechanics,Vol. 6, NO. 5, Sep 1974, pp. 281 – 318

[3] Ekaterinaris JA. "High-order accurate, low numerical diffusion methods for aerodynamics". Progress in Aerospace Sciences.Vol. 41, NO. 5 Apr 2005, pp. 192-300.

[4] Liu XD, Osher S, Chan T. "Weighted essentially non-oscillatory schemes." Journal of computational physics, Vol. 115, NO. 8 Nov 1994, pp. 200-12.

[5] Shu CW, Osher S. "Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes". Journal of computational physics, Vol. 77, NO. 9 Aug 1988, pp.39-71.

[6] Han SQ, Song WP, Han ZH. "An Improved WENO Method based on Gauss-kriging Reconstruction with an Optimized Hyper-Parameter." Journal of Computational Physics,Vol. 10, NO. 13 Aug 2020, pp. 56-82

[7] Wang Y, Du Y, Zhao K, Yuan L. "A new 6th-order WENO scheme with modified stencils." Computers & Fluids, Vol. 11, NO. 13, Jun 2020, pp. 104 – 130

[8] Anderson JD, Degrez G, Dick E, Grundmann R. "Computational fluid dynamics: an introduction." Springer Science & Business Media; Vol. 22, NO. 6, Mar 2013, pp. 151 – 170.

[9] Colonius T, Lele SK. "Computational aeroacoustics: progress on nonlinear problems of sound generation." Progress in Aerospace sciences,Vol. 17, NO. 5, August 2004, pp. 345 – 416.

[۱۰] مهرداد بزاز زاده، مجتبی دهقان منشادی، امین نظریان شهربابکی، علی شهریاری "طراحی کنترلر بهینه فشار در یک تونل باد فراصوت دمشی با استفاده از الگوریتم ژنتیک" نشریه مدل‌سازی در مهندسی، دوره ۱۴ شماره ۴۷، زمستان۱۳۹۵، صفحه ۱۵۵-۱۶۹.

[۱۱] مصطفی زاهد زاده، فتح اله امی" مطالعه عددی پاشش متقاطع جت‌های صوتی دو-مرحله ای در جریان عرضی مافوق صوت بعد از یک پله "نشریه مدل‌سازی در مهندسی، دوره ۱۷، شماره ۵۶، تابستان ۱۳۹۸، صفحه ۲۸۱-۲۹۱.

[۱۲] قاسم حیدری نژاد، امیر محمد جدیدی " شبیه‌سازی نحوه پخش آلودگی در پشت یک ساختمان با استفاده از یک روش RANS-LES " نشریه مدل‌سازی در مهندسی، دوره ۱۵، شماره ۴۹، تابستان ۱۳۹۶، صفحه ۱۷-۲۷.

[13] P. Fan. "High-order weighted essentially nonoscillatory WENO-η schemes for hyperbolic conservation laws." J. Comput. Phys., Vol. 269, August 2014, pp. 355 – 385.

[14] Tang S, Feng Y, Li M. "Novel weighted essentially non-oscillatory schemes with adaptive weights." Applied Mathematics and Computation, Vol. 420, NO. 1, May 202, pp. 126 – 161.

[15] Shen Y, Li S, Liu S, Cui K, Zheng G. "A robust common-weights WENO scheme based on the flux vector splitting for Euler equations." Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. Vol. 27, Jan 2023, pp. 107 – 122.

[16] Li R, Zhong W. "A general improvement in the WENO-Z-type schemes." Computers & Fluids, Vol. 198, NO. 6, Jan 2022, pp. 122 – 149.

[17] Takagi S, Fu L, Wakimura H, Xiao F. "A novel high-order low-dissipation TENO-THINC scheme for hyperbolic conservation laws." Journal of Computational Physics,Vol. 452, NO. 1, Mar 2022, pp. 452 – 467.

[18] Li R, Zhong W. "A robust and efficient component-wise WENO scheme for Euler equations." Applied Mathematics and Computation, Vol. 438, NO. 1, Feb 2023, pp. 215 – 233.

[19] Vevek US, Zang B, New TH. "A new mapped WENO method for hyperbolic problems." Aerospace, Vol. 19, NO. 10, Oct 2022, pp. 623 – 657.

[20] Tang S, Feng Y, Li M. "Novel weighted essentially non-oscillatory schemes with adaptive weights." Applied Mathematics and Computation, Vol. 420, NO. 1, May 2022, pp. 230 – 253.

[21] Zhang Y, Zhu J. "New mapped unequal-sized trigonometric WENO scheme for hyperbolic conservation laws." Computers & Fluids, Vol. 245, NO. 15, Sep 2002, pp. 105 – 138.

[22] Menter FR. "Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications." AIAA journal, Vol. 32, NO. 8, August 1994, pp. 184 – 208.

[23] Liu S, Shen Y, Guo S, Yong H, Ni G. "Efficient implementation of high-order WENO schemes with sharing function for solving Euler equations." Computers & Fluids, Vol. 251, NO. 30, Jn 2023, pp. 165 – 189.

[24] Hirsch C. "Numerical computation of internal and external flows: The fundamentals of computational fluid dynamics." Elsevier; Vol. 165 NO. 9, Jul 2007, pp. 331 – 352.

[25] Sarkar S. "The stabilizing effect of compressibility in turbulent shear flow". Journal of fluid Mechanic, Vol. 28, NO. 2, Jan 1995, pp. 214 – 236.

[26] Fardipour K, Mansour K. "A modified seventh-order WENO scheme with new nonlinear weights for hyperbolic conservation laws." Computers & Mathematics with Applications, Vol. 78, NO. 12, Dec 2019, pp. 37 – 56.

[27] Saleh-Abadi M, Dehghan-Manshadi M, Bagheri-Esfeh H. "An improved seventh-order WENO scheme with a novel smoothness indicator for flows containing discontinuity-disturbance interaction." Optik, Vol. 271, NO. 1, Dec 2022, pp. 130 – 170.

[28] Kamiya T, Asahara M, Nonomura T. "Application of central differencing and low-dissipation weights in a weighted compact nonlinear scheme." International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 84, NO. 3, May 2017, pp. 80 – 152

[29] Fardipour K, Mansour K. "Development of a Modified Seventh-Order WENO Scheme with New Nonlinear Weights." International Journal of Computational Fluid Dynamics, Vol. 32, NO. 4, Apr 2021, pp. 325 – 247.

[30] Fleischmann, N., Adami, S., & Adams, N. A. (2019). "Numerical symmetry-preserving techniques for low-dissipation shock-capturing schemes." Computers & Fluids, Vol. 189, NO. 6, Aug 2019, pp. 94 – 107.