



Semnan University

Journal of Modeling in Engineering

Journal homepage: <https://modelling.semnan.ac.ir/>

ISSN: 2783-2538



Research Article

A Stable Limit Cycle Existence Analysis in a Diaphragm Thermos-Acoustic Oscillator Using Lyapunov Stability Theorem of Perturbed Systems

Azam Teymuri^a, Aghileh Heydari^a , Mohammadreza Ramezani-al^{b,*}

^a Department of Mathematics, Payam Noor University, Tehran, Iran

^b Department of Electrical Engineering, Faculty of Electrical and Computer Engineering, Quchan University of Technology, Quchan, Iran

PAPER INFO

Paper history:

Received: 2025-04-14

Revised: 2025-06-09

Accepted: 2025-06-30

Keywords:

Diaphragm thermo-acoustic oscillator;
Nonlinear dynamics;
Lyapunov stability;
Limit cycle.

ABSTRACT

In this paper, the existence of a stable limit cycle in a diaphragm thermos-acoustic oscillator is analyzed using the Lyapunov stability theorem of perturbed dynamic systems. In this regard, first the dynamic differential equations of the thermos-acoustic oscillator are written as the state equations. Then, in order to system have a limit cycle, the error equations are extracted using the system equations and the desired states of the limit cycle. Next, a new Lyapunov function is introduced to asymptotic stability analysis of the error dynamics. Three conditions are examined, first condition of stability related to the positive definiteness of the Lyapunov function and the second condition related to the negativity of the derivative of this function. Third condition also guarantees that the error state is located within a certain bound to ensure that an asymptotic stable limit cycle occurs under these conditions. Besides, the upper and lower bounds of the error are obtained. Also, the effect of some important physical parameters of the system on the obtained error's bounds has been analyzed. The results obtained showed that the presented method has been able to successfully solve the most important challenge of this type of thermal oscillator, namely ensuring selecting the proper parameters for a thermo-acoustic oscillations.

DOI: <https://doi.org/10.22075/jme.2025.37356.2837>

© 2026 Published by Semnan University Press.

This is an open access article under the CC-BY 4.0 license. (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

* Corresponding author.

E-mail address: m-ramezani@qiet.ac.ir

How to cite this article:

A Teymuri, A Heydari and M R Ramezani-al, "A stable limit cycle existence analysis in a diaphragm thermos-acoustic oscillator using Lyapunov stability theorem of perturbed systems," Journal of Modeling in Engineering, 24 85 (2026): 169-186, doi: 10.22075/jme.2025.37356.2837

تحلیل وجود چرخه حدی پایدار در یک نوسانگر حرارتی-صوتی دیافراگمی با استفاده از نظریه پایداری لیاپانوف سیستم های غیرخطی دارای آشفتگی

اعظم تیموری^۱، عقيله حیدری^۱، محمد رضا رضانی آل^{۲*}

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت مقاله: ۱۴۰۴/۰۱/۲۵ بازنگری مقاله: ۱۴۰۴/۰۳/۱۹ پذیرش مقاله: ۱۴۰۴/۰۴/۰۹	در این مقاله به تحلیل وجود چرخه حدی پایدار در یک نوسانگر حرارتی-صوتی دیافراگمی با استفاده از نظریه پایداری لیاپانوف سیستم های دینامیکی دارای آشفتگی پرداخته شده است. در این راستا و با کمک نظریه پایداری لیاپانوف، ابتدا معادلات دیفرانسیلی دینامیکی حاکم بر نوسانگر حرارتی به صورت معادلات حالت بیان می شوند. سپس برای آنکه سیستم دارای چرخه حدی باشد معادلات حالت خطا به کمک معادلات سیستم و حالت های مطلوب چرخه حدی نوشته می شوند. در ادامه تابع لیاپانوف جدید برای دینامیک توصیف کننده خطا معرفی و شرایط پایداری مجانبی دینامیک خطا با توجه به این تابع لیاپانوف بررسی می گردد. از شروط ارائه شده شرط اول مربوط به مثبت معین بودن تابع لیاپانوف و شرط دوم مربوط به منفی بودن مشتق این تابع می باشد. سومین شرط نیز تضمین کننده آنست که بردار حالت خطا در یک کران معین قرار گیرد تا اطمینان یابیم چرخه حدی پایدار مجانبی تحت این شرایط رخ می دهد. از این رو کران بالا و پایین خطا به دست می آیند. همچنین تاثیر برخی پارامترهای مهم فیزیکی سیستم بر روی باند خطای به دست آمده تحلیل شده است. نتایج بدست آمده از این مقاله نشان می دهد که روش ارائه شده به خوبی توانسته است مهمترین چالش این نوع موتورها یعنی تضمین نوسانات پایدار قبل از ساخت را برطرف سازد.

واژگان کلیدی:

نوسانگر حرارتی-صوتی
دیافراگمی،
سیستم های غیرخطی،
پایداری لیاپانوفی،
چرخه حدی.

DOI: <https://doi.org/10.22075/jme.2025.37356.2837>

© 2026 Published by Semnan University Press.

This is an open access article under the CC-BY 4.0 license. (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

۱- مقدمه

منظور از مرز ناپایداری مرزی بین حالت پایدار و ناپایدار یک سیستم است. به عبارت دیگر سیستمی که در مرز ناپایداری قرار دارد به اغتشاشات کوچک بسیار حساس است و هراغتشاش کوچک می تواند باعث شود که سیستم به سمت پایداری یا ناپایداری حرکت کند. به این نمونه ها نوسانگر گفته می شود. نوسانگرها در حوزه های مختلفی در صنعت کاربرد دارند که شامل دستگاه های پزشکی، سیستم تعلیق خودروها، تجهیزات آزمایشگاهی، تجهیزات موسیقی،

اکثر تلاش ها در صنعت در راستای پایدارسازی دینامیک و رفتار انواع سازه ها صورت می پذیرد. در این راستا از روش ها و نظریه های گوناگونی به منظور پایدارسازی رفتار دینامیکی یک سیستم استفاده می گردد [۱ و ۲]. با این حال نمونه هایی در صنعت وجود دارند که نیاز است دینامیک آنها در حالتی که مدل سیستم خطی در نظر گرفته می شود در مرز ناپایداری قرار گیرد [۳ و ۴].

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: m-ramezani@qiet.ac.ir

۱. گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ص.پ. ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵ تهران، ایران

۲. گروه مهندسی برق، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی

قوچان، قوچان، ایران

استناد به این مقاله:

اعظم تیموری، عقيله حیدری و محمد رضا رضانی آل "تحلیل وجود چرخه حدی پایدار در یک نوسانگر حرارتی-صوتی دیافراگمی با استفاده از نظریه پایداری لیاپانوف سیستم های غیرخطی دارای آشفتگی"، مدل سازی در مهندسی، ۲۴ (۱۴۰۵): ۱۶۹-۱۸۶، doi: 10.22075/jme.2025.37356.2837

شبیه سازها (مانند شبیه سازها در پرواز و خودرو)، پل ها و سازه های بزرگ و سیستم های تولید انرژی می شود [۶ و ۵]. یکی از مهمترین کاربردها نوسانگرها به کارگیری آنها در سیستم های تولید انرژی است. در واقع در این نوع نوسانگرها با ایجاد نوسان و انتقال نوسانات ایجاد شده به ژنراتورها، انرژی الکتریسیته تولید می شود [۷ و ۸]. نوسانگرهای حرارتی یکی از مهمترین نوع نوسانگرهایی هستند که توانایی تبدیل حرارت به انرژی الکتریسیته را دارند. به بیان بهتر، حرارت در این نوع نوسانگرها به عنوان منبع گرما در نظر گرفته می شود و سپس با ایجاد نوسانات در دینامیک شان و انتقال آن به ژنراتورها، حرکت مکانیکی ایجاد شده به انرژی الکتریسیته تبدیل می گردد. نوسانگرهای حرارتی به انواع مختلفی تقسیم می شوند که مهمترین آنها شامل نوسانگرهای استرلینگ، نوسانگرهای حرارتی-صوتی، نوسانگرهای حرارتی تغییر فاز و نوسانگرهای حرارتی بی متال است [۹ و ۱۰]. نوسانگرهای استرلینگ و حرارتی-صوتی از معروفترین نوسانگرها به منظور تولید انرژی الکتریسیته از طریق انرژی خورشید هستند. نوسانگرهای حرارتی-صوتی از جدیدترین نوع نوسانگرهای حرارتی هستند که بر اساس ساختارشان به انواع مختلفی تقسیم بندی می گردند [۱۱].

نوسانگرهای حرارتی-صوتی بر اساس تعداد هسته به کاربرده شده در ساختارشان و همچنین استفاده یا عدم استفاده از تسهیل گر^۳ به انواع مختلفی تقسیم بندی می شوند [۱۲]. علاوه بر این، تحلیل و ارزیابی هر نوع از نوسانگرهای حرارتی-صوتی با دیگر انواع آنها تفاوت دارد و نیاز است هر یک از روش های ارائه شده برای هر یک این نوع نوسانگرها مورد بررسی قرار گیرد [۱۳]. در ساختار نوسانگرهای حرارتی-صوتی رابط های مکانیکی و فلابویل (چرخ لنگر که برای انتقال انرژی چرخشی استفاده می شود) حذف شده است و این کار مزیت هایی مانند کار در فرکانس بالا، بازده بالا و عدم نیاز به تعمیر اساسی برای آنها به ارمغان آورده است [۱۴]. اما در کنار این مزیت ها، چالش هایی در طراحی و ساخت این نوع نوسانگرها به وجود آمده است که مربوط به راه اندازی دینامیک آنها است [۱۵].

محققان تاکنون روش های مختلفی به منظور بررسی نوسانات پایدار و راه اندازی نوسانگرهای حرارتی ارائه داده اند

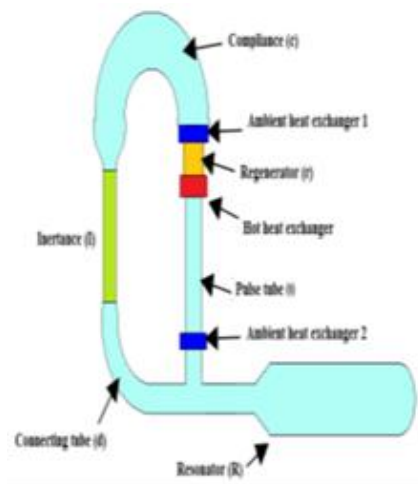
که در ادامه به مروری بر آنها پرداخته خواهد شد. بخشی از تحقیقات انجام شده در این حوزه، تحلیل های خطی بوده که صرفاً به ناپایداری دینامیکی نوسانگرهای حرارتی پرداخته اند. در این نوع تحقیقات با کمک قطب های غالب حلقه بسته سیستم، اقدام به بررسی دینامیک نوسانگر کرده اند. در این راستا هوفاکر و همکاران در [۱۶] با کمک یک مدل خطی به بررسی ناپایداری دینامیک یک نوسانگر حرارتی پرداختند. در این تحقیق عواملی مانند دما به عنوان یک عامل مهم در ناپایداری دینامیک این نوسانگرها معرفی شد. بیگات و همکاران در [۱۷] نیز با کمک تحلیل خطی دینامیک یک نوسانگر خطی را مورد بررسی قرار دادند و ناپایداری آن را بررسی کردند. در این مقاله نیز دمای آستانه برای ناپایدار کردن دینامیک نوسانگر حرارتی تعیین شد. یک تحلیل خطی دیگر به وسیله ی ریوفریو و همکاران در [۱۸] بر روی نوسانگر حرارتی ساخته شده به وسیله ی شرکت سان پاور انجام پذیرفت که هدف آن ناپایداری دینامیک نوسانگر در لحظه ی شروع بود. در این تحقیق، با استفاده از نمودار نایکوئیست رفتار دینامیکی نوسانگر بررسی شد. در یک تحقیق دیگر زارع و توکل پور صالح در [۱۹] پارامترهای طراحی نظیر سختی و جرم پیستون های نوسانگر استرلینگ را با به کارگیری یک تحلیل خطی و الگوریتم ژنتیک و بر اساس فرکانس مطلوب طراحی تخمین زدند. دوپل در [۲۰] به بررسی دینامیک خطی یک نوسانگر حرارتی اکوستیک پرداخته است. در این کار تاثیر نسبت دمای منبع گرم به سرد بر ناپایداری دینامیک نوسانگر مورد بررسی قرار گرفت و نتایج این تحقیق نشان داد که با افزایش این نسبت سیستم ناپایدارتر خواهد شد.

زارع و توکل پور صالح در [۲۱] دینامیک خطی یک نوسانگر حرارتی-صوتی را با استفاده از مکان قطب های حلقه بسته مورد بررسی و ارزیابی قرار دادند. در این مقاله اثر پارامترهای مختلف نوسانگر مانند طول رزوناتور و دمای منبع گرم بر ناپایداری دینامیک سیستم بررسی شد.

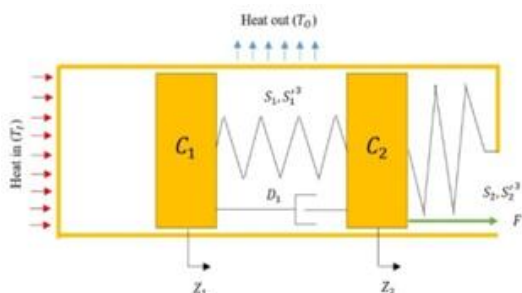
تاکنون مهمترین تحلیل های خطی به منظور بررسی ناپایداری دینامیک نوسانگرهای حرارتی استرلینگ و حرارتی-صوتی مرور گردید. اما بخشی از تحلیل های انجام شده غیرخطی هستند. اکثر این تحقیقات به صورت حل عددی معادلات غیرخطی بوده است و با شبیه سازی رفتار دینامیکی نوسانگرها، به بررسی ایجاد نوسانات پایدار در

³ Facillators² Thermal Phase Change Oscillators (TPCOs)

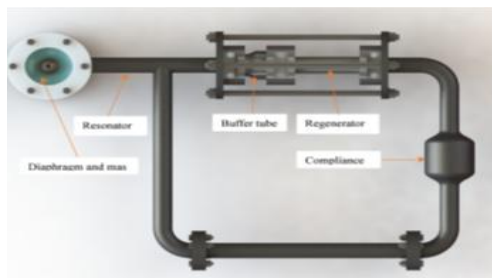
بود. وانگ و کیو در [۲۶] با ساخت یک موتور ترمواکوستیک چهارحالت (دارای چهار بازیاب) نشان دادند که افزایش تعداد هسته ی موتور باعث افزایش راندمان و همچنین کاهش نسبت دمایی موتورهای ترمواکوستیک خواهد شد. در این پژوهش دمای منبع گرم و سرد به ترتیب برابر با 573 کلوین و 300 کلوین در نظر گرفته شده است که قادر به تولید توانی معادل با 1. 223 کیلووات در فشار 3 مگا پاسکال است.



(الف) مدل مکانیکی ([۳۰])



(ب) طرحواره ([۳۰])



(ج) شکل واقعی نوسانگر حرارتی ([۳۱])

شکل ۱- نوسانگر حرارتی مورد مطالعه

یانگ و همکاران در [۲۷] به منظور کاهش دمای منبع گرم و افزایش راندمان، اقدام به ساخت یک موتور ترمواکوستیک

رفتار نوسانگر انجام شده است. به طور مثال زارع و توکل-پورصالح در [۲۲] با حل عددی به بررسی نوسانات پایدار یک نوسانگر حرارتی استرلینگ پرداخته و در ادامه اثر پارامترهای مهم این نوسانگر مانند دمای منبع گرم بر روی طول دامنه حرکت پیستون ها و نوسانات فشار مورد بررسی قرار گرفته است. فورموسا در [۲۳] به تحلیل عددی دینامیک غیرخطی یک نوسانگر حرارتی استرلینگ با استفاده از یک رویکرد ترمودینامیکی-مکانیکی پرداخته است. در این تحلیل علاوه بر بررسی نوسانات پایدار نوسانگر، به تخمین دمای گاز در بخش محفظه گرم نیز انجام شده است. همچنین زارع و توکل-پورصالح در [۲۴] به بررسی عددی دینامیک غیرخطی یک نوسانگر حرارتی-صوتی با استفاده از معادلات مکانیکی غیرخطی پرداختند. در این کار نوسانات پایدار پیستون ها در مدل مکانیکی مورد بررسی و ارزیابی قرار گرفته و نتایج شبیه سازی با نتایج آزمایشگاهی مورد مقایسه قرار گرفته است.

بررسی تحقیقات انجام شده نشان می دهد که تاکنون یک ارزیابی تحلیلی بر روی دینامیک غیرخطی یک نوسانگر حرارتی-صوتی دیافراگمی به منظور بررسی نوسانات پایدار انجام نشده است. بر همین اساس و در این مقاله با کمک روش پایداری لیپانوفی وجود یک چرخه حدی پایدار در یک نوسانگر حرارتی-صوتی دیافراگمی به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در این راستا ابتداء بخش ۲ به معرفی نوسانگر حرارتی-صوتی و معادلات دینامیکی حاکم بر آن پرداخته شده است. در ادامه و در بخش ۳ به کمک تحلیل پایداری لیپانوفی شرایط ایجاد نوسان در یک نوسانگر حرارتی-صوتی مورد تحلیل قرار می گیرد. سپس در بخش ۴ به بررسی و ارزیابی روش ارائه شده و بررسی شروط پایداری و تغییر تاثیر پارامترها برحد نهایی پرداخته خواهد شد. در پایان و در بخش ۵ نیز نتایج حاصل شده مورد ارزیابی و بررسی قرار خواهد گرفت و مهمترین چالش محققان در طراحی این نوع از موتورها(راه اندازی دینامیک آن ها) و تضمین نوسانات پایدار قبل از ساخت موتور را برطرف می سازد.

بی و همکاران در [۲۵] اقدام به ساخت یک موتور ترمواکوستیک سه حالت کردند. در این موتور از سه بازیاب به منظور کاهش نسبت دمایی و افزایش عملکرد موتور استفاده شده است. با استفاده از گاز هلیوم در فشار 6 مگا پاسکال، این موتور قادر به تولید توانی معادل 5 کیلووات

$$C_2 \ddot{Z}_2 - D_1(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2) - S_1(Z_1 - Z_2) - S'_1(Z_1^3 - Z_2^3) + S_2 Z_2 + S'_2 Z_2^3 = \left(\frac{T_I}{T_0} - 1\right) D_1(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2) \quad (4)$$

به صورت رابطه (۵) ساده سازی می گردد:

$$C_2 \ddot{Z}_2 - \left(\frac{T_I}{T_0}\right) D_1 \dot{Z}_1 + \left(\frac{T_I}{T_0}\right) D_1 \dot{Z}_2 - S_1 Z_1 + (S_1 + S_2) Z_2 - S'_1 Z_1^3 + (S'_1 + S'_2) Z_2^3 = 0 \quad (5)$$

متغیرهای Z_1 و Z_2 حرکت دو پیستون قدرت و پیستون جابه جا گر می باشند که در جدول ۱ معرفی شده است. به این ترتیب، معادلات نهایی دینامیک حاکم بر نوسانگر حرارتی برابر با معادلات (۱) و (۵) است. برای درک بهتر بخش بعد ابتدا معادلات سیستم را به صورت معادلات حالت می نویسیم. برای این منظور با انتخاب متغیرهای حالت $\dot{Z}_1 = \dot{Z}_1$ و $\dot{Z}_2 = \dot{Z}_2$ و $Z_3 = \dot{Z}_1$ و $Z_4 = \dot{Z}_2$ معادلات به صورت زیر در می آیند.

$$C_1 \dot{Z}_3 + D_1(Z_3 - Z_4) + S_1(Z_1 - Z_2) + S'_1(Z_1^3 - Z_2^3) = 0$$

$$C_2 \dot{Z}_4 - \left(\frac{T_I}{T_0}\right) D_1 Z_3 + \left(\frac{T_I}{T_0}\right) D_1 Z_4 - S_1 Z_1 + (S_1 + S_2) Z_2 - S'_1 Z_1^3 + (S'_1 + S'_2) Z_2^3 = 0 \quad (6)$$

معادلات حالات بالا را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \\ \dot{Z}_3 \\ \dot{Z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S_1 & D_1 & S_1 & D_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ S_1 & \left(\frac{T_I}{T_0}\right) D_1 & -S_1 - S_2 & -\left(\frac{T_I}{T_0}\right) D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ S'_1 Z_1^3 - S'_1 Z_2^3 \\ 0 \\ S'_1 Z_1^3 + (S'_1 + S'_2) Z_2^3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

که معادله (۷) را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 & \dot{Z}_2 & \dot{Z}_3 & \dot{Z}_4 \end{bmatrix}^T = c^{-1} g_1 Z + c^{-1} f_1(z) = \underbrace{g \cdot Z}_{\text{Nonlinear part}} + \underbrace{f(z)}_{\text{Linear part}} \quad (8)$$

سه حالتی کردند و این اقدام باعث کاهش دمای منبع گرم تا 468 کلوین شد. همچنین آنها در [۲۸] با ساخت یک موتور ترمواکوستیک، به بررسی اثر تعداد هسته‌ی موتور بر عملکرد موتور پرداخته‌اند. نتایج این تحقیق نشان داد که افزایش تعداد هسته‌های موتور باعث بهبود عملکرد موتور شده است.

۲- دینامیک نوسانگر حرارتی-صوتی دیافراگمی

شکل (۱) [۲۹] طرحواره یک نوسانگر حرارتی-صوتی دیافراگمی را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که دیافراگم در بخش انتقال قدرت در ساختار نوسانگر استفاده می‌گردد. مدل مکانیکی نوسانگر در شکل (۱-الف) شامل مدل مکانیکی (در برگیرنده اینرتانس^۴ و کامپالیانس^۵ است (۱)، منبع سرد ۱ (۲ و ۳)، بازیاب (۴)، منبع گرم (۵)، لوله‌ی بافر (۶)، منبع سرد ۲ (۷) و رزوناتور (۸ و ۹))

نشان داده شده است. شکل (۱-ب) مدل مکانیکی نوسانگر حرارتی-فراصوتی شامل دو پیستون، دوفنر و دو جرم و در شکل (۱-ج) شکل واقعی آن نمایش داده شده است. پارامترهای C_1 ، C_2 جرم پیستون‌های قدرت و جابجاگر و همچنین سایر پارامترهای استفاده شده در جدول‌های ۱ و ۲ فهرست نشانه‌های اختصاری درون مقاله و ویژگی‌های پارامترهای نوسانگر مورد مطالعه بیان شده‌اند.

با توجه به شکل (۱-الف) و با استفاده از قانون دوم نیوتن، معادلات مکانیکی نوسانگر حرارتی مورد نظر معادلات (۱) و (۲) به دست می‌آیند.

$$C_1 \ddot{Z}_1 + D_1(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2) + S_1(Z_1 - Z_2) + S'_1(Z_1^3 - Z_2^3) = 0 \quad (1)$$

$$C_2 \ddot{Z}_2 - D_1(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2) - S_1(Z_1 - Z_2) - S'_1(Z_1^3 - Z_2^3) + S_2 Z_2 + S'_2 Z_2^3 = F \quad (2)$$

معادله‌ی نیروی F به صورت زیر است.

$$F = \left(\frac{T_I}{T_0} - 1\right) D_1(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2) \quad (3)$$

T_0 دمای ورودی و T_I دمای خروجی از منبع گرم نوسانگر مورد مطالعه را نشان می‌دهند. در صورت جایگذاری (۳) در معادله دینامیکی حاکم بر نوسانگر حرارتی، معادله‌ی (۲) به صورت زیر بدست می‌آید:

⁵ Compiles

⁴ Inertans

$$e_1 = Z_1 - Z_{1d} = Z_1 - A_1 \sin(\omega t + \theta) \quad (11)$$

$$e_2 = Z_2 - Z_{2d} = Z_2 - A_2 \sin(\omega t) \quad (12)$$

در ادامه معادلات دینامیکی خطا را می نویسیم تا بتوانیم از نظریه پایداری لیاپانوفی برای تحلیل پایداری دینامیک خطا استفاده نماییم.

با جایگذاری معادلات خطای (۱۱) و (۱۲) و مشتقات آنها در معادلات دینامیک حاکم بر نوسانگر حرارتی (معادلات (۱) و (۵))، معادله دینامیک خطای نوسانگر حرارتی مورد نظر به صورت زیر به دست می آید:

$$C_1(\ddot{e}_1 - \omega^2 A_1 \sin(\omega t + \theta)) + D_1((\dot{e}_1 + \omega A_1 \cos(\omega t + \theta)) - (\dot{e}_2 + \omega A_2 \cos(\omega t))) + S_1(e_1 + A_1 \sin(\omega t + \theta) - (e_2 + A_2 \sin(\omega t))) + S'_1((e_1 + A_1 \sin(\omega t + \theta))^3 - (e_2 + A_2 \sin(\omega t))^3) = 0 \quad (13)$$

$$C_2(\ddot{e}_2 - \omega^2 A_2 \sin(\omega t)) - \left(\frac{T_1}{T_0}\right) D_1(\dot{e}_1 + \omega A_1 \cos(\omega t + \theta)) + \left(\frac{T_1}{T_0}\right) D_1(\dot{e}_2 + \omega A_2 \cos(\omega t)) - S_1(e_1 + A_1 \sin(\omega t + \theta)) + (S_1 + S_2)(e_2 + A_2 \sin(\omega t)) - S'_1(e_1 + A_1 \sin(\omega t + \theta))^3 + (S'_1 + S'_2)(e_2 + A_2 \sin(\omega t))^3 = 0 \quad (14)$$

که به صورت معادل زیر می توان نوشت:

$$C_2 \ddot{e}_2 + \left(\frac{T_1}{T_0}\right) D_1 \dot{e}_2 - \left(\frac{T_1}{T_0}\right) D_1 \dot{e}_1 + (S_1 + S_2)e_2 - S_1 e_1 + (S'_1 + S'_2)e_2^3 + 3(S'_1 + S'_2)e_2^2 A_2 \sin(\omega t) + 3(S'_1 + S'_2)e_2 (A_2 \sin(\omega t))^2 - S'_1 e_1^3 - 3S'_1 e_1^2 A_1 \sin(\omega t + \theta) - 3S'_1 e_1 (A_1 \sin(\omega t + \theta))^2 = H_1(t) \quad (15)$$

$$C_1 \ddot{e}_1 + D_1 \dot{e}_1 - D_1 \dot{e}_2 + S_1 e_1 - S_1 e_2 - S'_1 e_2^3 - 3S'_1 e_2^2 A_2 \sin(\omega t) - 3S'_1 e_2 (A_2 \sin(\omega t))^2 + S'_1 e_1^3 + 3S'_1 e_1^2 A_1 \sin(\omega t + \theta) + 3S'_1 e_1 (A_1 \sin(\omega t + \theta))^2 = H_2(t) \quad (16)$$

که در آن $H_1(t)$ و $H_2(t)$ به صورت زیر هستند.

همانگونه که دیده می شود بر طبق معادلات حالت رابطه (۸) سیستم از یک بخش غیرخطی و یک بخش خطی تشکیل شده است.

۳- تحلیل وجود چرخه حدی و شرایط پایداری لیاپانوف سیستم های دارای آشفتگی غیر صفر شونده بر روی نوسانگر حرارتی-صوتی

در این بخش به کمک نظریه پایداری لیاپانوفی سیستم های دارای آشفتگی نشان خواهیم داد سیستم نوسانگر توصیف شده با معادلات حالت (۸) تحت شرایطی دارای حرکات نوسانی با دامنه های متفاوت و فرکانس یکسان خواهد بود. برای این منظور روش پایداری لیاپانوف را می توان برای سیستم های غیرخطی به شکل $\dot{x} = f(x) + g(x, t)$ که دارای آشفتگی به صورت $g(x, t)$ هستند اعمال کرد [۳۱]. جمله $g(x, t)$ در واقع یک جمله آشفتگی است که می تواند ناشی از خطای مدل سازی، یا عدم قطعیت باشد. معمولاً مقدار دقیق این جمله نامشخص است اما می توان بر اساس ساختار سیستم یک حد بالا برای آن تعیین نمود. در اینجا نشان می دهیم که آشفتگی در سیستم مورد مطالعه به صورت غیر صفر شونده $g(0, t) \neq 0$ است.

قضیه ۱: سیستم نوسانگر توصیف شده با معادلات (۱) و (۵) را در نظر بگیرید. فرض می کنیم که آشفتگی در عبارت کران یکنواخت $\|g(e, t)\| \leq \beta$ صدق می کند یا به بیانی دیگر $|H_1(t)| \leq \beta_1$ و $|H_2(t)| \leq \beta_2$ در این صورت سیستم دارای چرخه حدی پایداری با دامنه ها و فرکانس توصیف شده به صورت روابط (۹) و (۱۰) خواهد بود.

اثبات : هدف نهایی ایجاد چرخه حدی پایدار در دینامیک نوسانگر است. بر همین اساس می توان Z_{1d} و Z_{2d} حرکت مطلوب پیستون قدرت و حرکت مطلوب پیستون جابجاگر با دامنه نوسانات A_1 و A_2 و فرکانس ω و اختلاف فاز θ را تعریف نمود که به شرح زیر است:

$$Z_{1d} = A_1 \sin(\omega t + \theta) \quad (9)$$

$$Z_{2d} = A_2 \sin(\omega t) \quad (10)$$

در واقع هدف این است که دینامیک نوسانگر حرارتی به حرکات مطلوب (۹) و (۱۰) تا حد امکان نزدیک شود. بر همین اساس معادلات خطا را به صورت زیر تعریف می گردند:

$$\dot{V}(e) \leq -c'_3 \|e\|^2 \quad (\text{ب})$$

در ابتدا شرط الف را بررسی می کنیم.

الف): برای بررسی شرایط تابع لیاپانوف باید مثبت معین بودن $V(e)$ بررسی شود برای این منظور آن را به صورت ماتریسی زیر می نویسیم.

$$V(e) = [e]^T Z [e] + \frac{1}{2} S'_1 e_1^4 + \frac{1}{2} S'_2 e_2^4 \quad (۲۰)$$

که

$$Z = \begin{bmatrix} (S_1 + S_2) & \frac{\sqrt{(S_1+S_2)C_2}}{2} & -\frac{\sqrt{(S_1+S_2)S_1}}{2} & -\frac{\sqrt{(S_1+S_2)C_1}}{2} \\ \frac{\sqrt{(S_1+S_2)C_2}}{2} & C_2 & 0 & -\frac{\sqrt{C_2C_1}}{2} \\ -\frac{\sqrt{(S_1+S_2)S_1}}{2} & 0 & S_1 & \frac{\sqrt{S_1C_1}}{2} \\ -\frac{\sqrt{(S_1+S_2)C_1}}{2} & -\frac{\sqrt{C_2C_1}}{2} & \frac{\sqrt{S_1C_1}}{2} & C_1 \end{bmatrix}$$

$$e = [e_1 \quad \dot{e}_1 \quad e_2 \quad \dot{e}_2]$$

$$\|e\| = \sqrt{e_1^2 + \dot{e}_1^2 + e_2^2 + \dot{e}_2^2}$$

با انتخاب

$$c'_1 = \lambda_{\max}(Z), c'_2 = \lambda_{\min}(Z) \quad (۲۱)$$

داریم:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + \dot{e}_1^2 + \dot{e}_2^2})^2 c'_1 \leq \\ & \frac{1}{2} S'_1 e_1^4 + \frac{1}{2} S'_2 e_2^4 + (S_1 + S_2) e_1^2 + \\ & S_1 e_2^2 + C_2 \dot{e}_1^2 + C_1 \dot{e}_2^2 + \\ & \sqrt{(S_1 + S_2)C_2} e_1 \dot{e}_1 - \\ & \sqrt{(S_1 + S_2)S_1} e_1 e_2 - \\ & \sqrt{(S_1 + S_2)C_1} e_1 \dot{e}_2 + \sqrt{S_1 C_1} \dot{e}_2 e_2 - \\ & \sqrt{C_2 C_1} \dot{e}_2 \dot{e}_1 \leq \\ & (\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + \dot{e}_1^2 + \dot{e}_2^2})^2 c'_2 \end{aligned} \quad (۲۲)$$

و در نتیجه قسمت الف به صورت زیر برقرار می شود.

$$c'_1 \|e\|^2 \leq V(e) \leq c'_2 \|e\|^2 \quad (۲۳)$$

از طرفی بنا بر معیار سیلوستر [۳۲]، مثبت بودن کهایای متوالی ماتریس متقارن Z رابطه (۲۰) شرط مثبت معین بودن تابع لیاپانوف مورد نظر را تضمین می کند که در اینجا برای راحتی کار مولفه های ماتریس Z با Z_{ij} برای $i, j = 1, 2, 3, 4$ و کهایای مرتبه ۱ تا ۴ ماتریس Z به صورت KH_{Z_i} برای $i = 1, 2, 3, 4$ نامگذاری شده اند. مقدار

$$\begin{aligned} H_1(t) = & -C_2 \omega^2 A_2 \sin(\omega t) - \\ & \left(\frac{T_1}{T_0}\right) D_1 A_2 \omega \cos(\omega t) + \\ & \left(\frac{T_1}{T_0}\right) D_1 A_1 \omega \cos(\omega t + \theta) - (S_1 + \\ & S_2) A_2 \sin(\omega t) + S_1 A_1 \sin(\omega t + \\ & \theta) - (S'_1 + S'_2) (A_2 \sin(\omega t))^3 + \\ & S'_1 (A_1 \sin(\omega t + \theta))^3 \end{aligned} \quad (۱۷)$$

$$\begin{aligned} H_2(t) = & -C_1 \omega^2 A_1 \sin(\omega t + \theta) - \\ & D_1 A_1 \omega \cos(\omega t + \theta) + \\ & D_1 A_2 \omega \cos(\omega t) - S_1 A_1 \sin(\omega t + \\ & \theta) + S_1 A_2 \sin(\omega t) - \\ & S'_1 (A_2 \sin(\omega t))^3 - S'_1 (A_1 \sin(\omega t + \\ & \theta))^3 \end{aligned} \quad (۱۸)$$

به سادگی می توان نشان داد که معادلات دیفرانسیل (۱۵) و (۱۶) می تواند به صورت بسته $\dot{e} = f(e) + g(e, t)$ نوشته می شود که همان جمله آشفتگی است و همچنین می توان نشان داد که $g(0, t) \neq 0$ است. (آشفتگی غیر صفر شده) در ادامه شرایط وجود چرخه حدی در سیستم توصیف شده با معادلات خطای (۱۵) و (۱۶) ثابت می گردد.

سیستم نوسانگر توصیف شده با معادلات خطای (۱۵) و (۱۶) را در نظر بگیرید. با انتخاب کاندیدای تابع لیاپانوف (۱۹) که تابعی از بردار خطا و مشتقات آنها بر اساس خطای تعریف شده در روابط (۱۱) و (۱۲) است، سیستم دارای چرخه حدی پایداری با دامنه ها و فرکانس توصیف شده به صورت (۹) و (۱۰) خواهد بود.

$$\begin{aligned} V(e) = & \frac{1}{2} S'_1 e_1^4 + \frac{1}{2} S'_2 e_2^4 + (S_1 + \\ & S_2) e_1^2 + S_1 e_2^2 + C_2 \dot{e}_1^2 + C_1 \dot{e}_2^2 + \\ & \sqrt{(S_1 + S_2)C_2} e_1 \dot{e}_1 - \\ & \sqrt{(S_1 + S_2)S_1} e_1 e_2 - \\ & \sqrt{(S_1 + S_2)C_1} e_1 \dot{e}_2 + \sqrt{S_1 C_1} \dot{e}_2 e_2 - \\ & \sqrt{C_2 C_1} \dot{e}_2 \dot{e}_1 \end{aligned} \quad (۱۹)$$

بر اساس لم ۳-۵ مرجع [۳۲]. فرض کنید $e = 0$ نقطه تعادل پایدار مجانبی یکنواخت سیستم توصیف شده $\dot{e} = f(e) + g(e, t)$ با سیستم نامی $\dot{e} = f(e)$ باشد. نشان می دهیم که تابع لیاپانوف (۱۹) در نامساوی های زیر صدق می نماید.

$$c'_1 \|e\|^2 \leq V(e) \leq c'_2 \|e\|^2 \quad (\text{الف})$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}(e) = & \sqrt{(S_1 + S_2)C_1} \dot{e}_2^2 + 2S_1 \dot{e}_1 e_1 + \\
& 2\dot{e}_1 \left(-D_1 \dot{e}_1 + D_1 \dot{e}_2 - S_1 e_1 + S_1 e_2 + S_1' e_2^3 + \right. \\
& 3S_1' e_2^2 A_2 \sin(\omega t) + 3S_1' e_2 (A_2 \sin(\omega t))^2 - S_1' e_1^3 - \\
& 3S_1' e_1 A_1 \sin(\omega t + \theta) - 3S_1' e_1 (A_1 \sin(\omega t + \theta))^2 + \\
& H_2(t) \left. \right) + \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} e_2 \left(-\left(\frac{T_1}{T_0}\right) D_1 \dot{e}_2 + \right. \\
& \left(\frac{T_1}{T_0}\right) D_1 \dot{e}_1 - (S_1 + S_2) e_2 + S_1 e_1 - (S_1' + S_2') e_2^3 - \\
& 3(S_1' + S_2') e_2^2 A_2 \sin(\omega t) - 3(S_1' + S_2') e_2 (A_2 \sin(\omega t))^2 + \\
& S_1' e_1^3 + 3S_1' e_1 A_1 \sin(\omega t + \theta) + 3S_1' e_1 (A_1 \sin(\omega t + \theta))^2 + \\
& H_1(t) \left. \right) - \\
& \sqrt{(S_1 + S_2)S_1} \dot{e}_2 e_1 - \sqrt{(S_1 + S_2)S_1} e_2 \dot{e}_1 - \\
& \sqrt{\frac{(S_1 + S_2)}{C_1}} e_2 \left(-D_1 \dot{e}_1 + D_1 \dot{e}_2 - S_1 e_1 + S_1 e_2 + \right. \\
& S_1' e_2^3 + 3S_1' e_2^2 A_2 \sin(\omega t) + 3S_1' e_2 (A_2 \sin(\omega t))^2 - \\
& S_1' e_1^3 - 3S_1' e_1 A_1 \sin(\omega t + \theta) - 3S_1' e_1 (A_1 \sin(\omega t + \theta))^2 + \\
& H_2(t) \left. \right) - \\
& \sqrt{(S_1 + S_2)C_1} \dot{e}_2 \dot{e}_1 + \sqrt{\frac{S_1}{C_1}} e_1 \left(-D_1 \dot{e}_1 + D_1 \dot{e}_2 - \right. \\
& S_1 e_1 + S_1 e_2 + S_1' e_2^3 + 3S_1' e_2^2 A_2 \sin(\omega t) + \\
& 3S_1' e_2 (A_2 \sin(\omega t))^2 - S_1' e_1^3 - 3S_1' e_1 A_1 \sin(\omega t + \theta) + \\
& \theta) - 3S_1' e_1 (A_1 \sin(\omega t + \theta))^2 + H_2(t) \left. \right) + \\
& \sqrt{S_1 C_1} \dot{e}_1^2 - \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \dot{e}_2 \left(-D_1 \dot{e}_1 + D_1 \dot{e}_2 - S_1 e_1 + \right. \\
& S_1 e_2 + S_1' e_2^3 + 3S_1' e_2^2 A_2 \sin(\omega t) + \\
& 3S_1' e_2 (A_2 \sin(\omega t))^2 - S_1' e_1^3 - 3S_1' e_1 A_1 \sin(\omega t + \theta) + \\
& \theta) - 3S_1' e_1 (A_1 \sin(\omega t + \theta))^2 + H_2(t) \left. \right) - \\
& \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \dot{e}_1 \left(-\left(\frac{T_1}{T_0}\right) D_1 \dot{e}_2 + \left(\frac{T_1}{T_0}\right) D_1 \dot{e}_1 - (S_1 + S_2) e_2 + \right. \\
& S_1 e_1 - (S_1' + S_2') e_2^3 - 3(S_1' + S_2') e_2^2 A_2 \sin(\omega t) - \\
& 3(S_1' + S_2') e_2 (A_2 \sin(\omega t))^2 + S_1' e_1^3 + \\
& 3S_1' e_1 A_1 \sin(\omega t + \theta) + 3S_1' e_1 (A_1 \sin(\omega t + \theta))^2 + \\
& H_1(t) \left. \right) + 2S_1' \dot{e}_2 e_2^3 + 2S_2' \dot{e}_1 e_1^3 + \\
& 2\dot{e}_2 \left(-\left(\frac{T_1}{T_0}\right) D_1 \dot{e}_2 + \left(\frac{T_1}{T_0}\right) D_1 \dot{e}_1 - (S_1 + S_2) e_2 + \right. \\
& S_1 e_1 - (S_1' + S_2') e_2^3 - 3(S_1' + S_2') e_2^2 A_2 \sin(\omega t) - \\
& 3(S_1' + S_2') e_2 (A_2 \sin(\omega t))^2 + S_1' e_1^3 + \\
& 3S_1' e_1 A_1 \sin(\omega t + \theta) + 3S_1' e_1 (A_1 \sin(\omega t + \theta))^2 + \\
& H_1(t) \left. \right) + 2(S_1 + S_2) \dot{e}_2 e_2
\end{aligned} \quad (26)$$

می‌توان رابطه (۲۶) را بصورت زیر ساده نویسی نمود:

کهادهای مرتبه ۱ تا ۴ ماتریس Z با جایگذاری در پارامترهای معرفی شده و داده های جدول ۲ به صورت زیر محاسبه شده است:

$$\begin{aligned}
KH_{Z_1} &= z_{11} = 210.08 > \\
0 & \text{ و } KH_{Z_2} = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix} = \\
10.55 & > 0 \\
KH_{Z_3} &= \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{vmatrix} = 1.47 \times \\
10^3 & > 0 \text{ و } KH_{Z_4} = \\
\begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} \end{vmatrix} &= 0.0739 > \\
0 &
\end{aligned} \quad (24)$$

(ب) در این مرحله نشان داده می شود مشتق تابع لیپانوف (۱۹) منفی است. ابتدا مشتق تابع لیپانوف به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(e) = & \sqrt{S_1 C_1} \ddot{e}_2 e_2 + \sqrt{S_1 C_1} \dot{e}_2^2 + \\
& 2(S_1 + S_2) \dot{e}_1 e_1 + 2S_1 \dot{e}_2 e_2 + \\
& 2C_2 \dot{e}_1 \ddot{e}_1 + 2C_1 \dot{e}_2 \ddot{e}_2 + \\
& \sqrt{(S_1 + S_2)C_1} \dot{e}_1^2 + \\
& \sqrt{(S_1 + S_2)C_2} e_1 \ddot{e}_1 - \\
& \sqrt{(S_1 + S_2)S_1} \dot{e}_1 e_2 - \\
& \sqrt{(S_1 + S_2)S_1} e_1 \dot{e}_2 - \\
& \sqrt{(S_1 + S_2)C_1} e_1 \ddot{e}_2 - \\
& \sqrt{(S_1 + S_2)C_1} \dot{e}_1 \dot{e}_2 - \sqrt{C_1 C_2} \ddot{e}_2 \dot{e}_1 - \\
& \sqrt{C_1 C_2} \dot{e}_2 \ddot{e}_1 + 2S_1' \dot{e}_1 e_1^3 + 2S_2' \dot{e}_2 e_2^3
\end{aligned} \quad (25)$$

با استفاده از روابط (۱۵) و (۱۶) داریم:

$$\begin{aligned}
 K_{12} &= K_{21} \\
 &= \sqrt{C_2/C_1} S_1 \\
 &+ 3\sqrt{C_2/C_1} S'_1 (A_2 \sin(\omega t))^2 \\
 &+ 6(S'_1 + S'_2) (A_2 \sin(\omega t))^2 \\
 &+ \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} \left(\frac{T_I}{T_O} \right) D_1 \\
 &+ \sqrt{(S_1 + S_2)/C_1} D_1
 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
 K_{13} &= K_{31} = \left(-S_1 \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} - \right. \\
 &S_1 \sqrt{(S_1 + S_2)/C_1} - \sqrt{S_1/C_1} S_1 - \\
 &3\sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} S'_1 (A_1 \sin(\omega t + \theta))^2 - \\
 &3\sqrt{(S_1 + S_2)/C_1} S'_1 (A_1 \sin(\omega t + \theta))^2 - 3\sqrt{S_1/C_1} S'_1 (A_2 \sin(\omega t))^2 \left. \right)
 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
 K_{41} &= K_{14} = \\
 &- \left(\frac{T_I}{T_O} \right) D_1 \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} - \\
 &3\sqrt{C_1/C_2} (S'_1 + S'_2) (A_2 \sin(\omega t))^2 - \\
 &2S_1 - 6S'_1 (A_2 \sin(\omega t))^2 + \\
 &\sqrt{(S_1 + S_2)S_1} - D_1 \sqrt{\frac{(S_1 + S_2)}{C_1}} - \\
 &\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} (S_1 + S_2)
 \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
 K_{22} &= -\sqrt{(S_1 + S_2)C_1} + \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} D_1 + \\
 &2 \left(\frac{T_I}{T_O} \right) D_1
 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
 K_{23} &= K_{32} = \\
 &-3\sqrt{C_2/C_1} S'_1 (A_1 \sin(\omega t + \theta))^2 - \\
 &6S'_1 (A_1 \sin(\omega t + \theta))^2 - 2S_1 + \\
 &\sqrt{(S_1 + S_2)S_1} - \sqrt{S_1/C_1} D_1 - \\
 &\sqrt{C_2/C_1} S_1
 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
 K_{24} &= K_{42} = +\sqrt{(S_1 + S_2)C_1} - \\
 &\sqrt{C_1/C_2} \left(\frac{T_I}{T_O} \right) D_1 - \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} D_1 - \\
 &2 \left(\frac{T_I}{T_O} \right) D_1 - 2D_1
 \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
 K_{34} &= K_{43} = +\sqrt{S_1/C_1} D_1 + \\
 &\sqrt{C_1/C_2} S_1 + 6S'_1 (A_1 \sin(\omega t + \theta))^2 + \\
 &3\sqrt{C_1/C_2} S'_1 (A_1 \sin(\omega t + \theta))^2
 \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(e) &= \left[- \left(S'_1 \sqrt{\frac{(S_1 + S_2)}{C_1}} + (S'_1 + \right. \right. \\
 &S'_2) \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} \left. \right) e_2^4 + \\
 &\left(3\sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} S'_1 A_1 \sin(\omega t + \theta) + \right. \\
 &3\sqrt{\frac{(S_1 + S_2)}{C_1}} S'_1 A_1 \sin(\omega t + \theta) \left. \right) e_2 e_1^2 + 2\dot{e}_2 H_1(t) + \\
 &2\dot{e}_1 H_2(t) + \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} e_2 e_1 H_1(t) - \\
 &\sqrt{\frac{(S_1 + S_2)}{C_1}} e_2 H_2(t) + \sqrt{\frac{S'_1}{C_1}} e_1 H_2(t) - \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \dot{e}_2 H_2(t) - \\
 &\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \dot{e}_1 H_1(t) + \left(S'_1 \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} + \right. \\
 &S'_1 \sqrt{\frac{(S_1 + S_2)}{C_1}} \left. \right) e_2 e_1^3 - S'_1 \sqrt{\frac{S_1}{C_1}} e_1^4 + S'_1 \sqrt{\frac{S_1}{C_1}} e_1 e_2^3 - \\
 &\left(2S'_2 + S'_1 \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \right) \dot{e}_2 e_2^3 + \left(2S'_1 + S'_1 \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \right) \dot{e}_2 e_1^3 + \\
 &\left(2S'_2 - 2S'_1 - \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} S'_1 \right) \dot{e}_1 e_1^3 + \left(2S'_1 + \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} (S'_1 + \right. \\
 &S'_2) \left. \right) \dot{e}_1 e_2^3 - \left(3S'_1 \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} A_2 \sin(\omega t) + \right. \\
 &3(S'_1 + S'_2) A_2 \sin(\omega t) \left. \right) e_2^3 - 3\sqrt{\frac{S_1}{C_1}} S'_1 A_1 \sin(\omega t + \theta) e_1^3 + \\
 &3\sqrt{\frac{S_1}{C_1}} S'_1 A_2 \sin(\omega t) e_1 e_2^2 - \left(6(S'_1 + \right. \\
 &S'_2) A_2 \sin(\omega t) + 3S'_1 A_2 \sin(\omega t) \left. \right) \dot{e}_2 e_2^2 + \\
 &\left(6S'_1 A_1 \sin(\omega t + \theta) + 3\sqrt{\frac{C_2}{C_1}} S'_1 A_1 \sin(\omega t + \theta) \right) \dot{e}_2 e_1^2 - \\
 &\left(6S'_1 A_1 \sin(\omega t + \theta) - \right. \\
 &3\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} S'_1 A_1 \sin(\omega t + \theta) \left. \right) \dot{e}_1 e_1^2 + \left(3\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} (S'_1 + \right. \\
 &S'_2) A_2 \sin(\omega t) + 6S'_1 A_2 \sin(\omega t) \left. \right) \dot{e}_1 e_2^2 \left. \right] (A) \\
 &- \underbrace{\begin{bmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix}}_Q (B)
 \end{aligned} \quad (27)$$

به این ترتیب $\dot{V}(e)$ را می‌توان بصورت $\dot{V}(e) = A + B$ نوشت که در آن $B = [e]^T Q [e]$. همانطور که مشاهده می‌گردد، بخشی از جملات مشتق تابع لیاپانوف به صورت یک ماتریس درآمد تا بتوان راحت‌تر به تعیین علامت آن پرداخت. در معادله‌ی (۲۷) مولفه‌های ماتریس Q به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= \left((S_1 + S_2) \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} + \right. \\
 &S_1 \sqrt{(S_1 + S_2)/C_1} + \\
 &3\sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} (S'_1 + \\
 &S'_2) (A_2 \sin(\omega t))^2 + \\
 &3\sqrt{(S_1 + S_2)/C_1} S'_1 (A_2 \sin(\omega t))^2 \left. \right)
 \end{aligned} \quad (27)$$

بپردازیم. لازم به ذکر است که دو حد بالای β_1 و β_2 را با توجه به پارامترها و داده های جدول ۲، مقادیر فرکانس و دامنه نوسانات توصیف شده به صورت $\beta_2 = 0.0263$ و $\beta_1 = 4.12$ تخمین زده می شوند. لذا داریم:

$$|H_1(t)| \leq \beta_1, |H_2(t)| \leq \beta_2 \quad (39)$$

درنتیجه مشتق تابع لیپانوف باتوجه به رابطه های (۳۸) و (۴۰) به صورت زیر بازنویسی می شود.

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) \leq & + \sqrt{\frac{S_1}{C_1}} |e_1| \beta_2 + \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} |\dot{e}_2| \beta_2 + \\ & \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} |\dot{e}_1| \beta_1 + \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} |e_2| \beta_1 + \\ & \sqrt{\frac{(S_1 + S_2)}{C_1}} |e_2| \beta_2 - \left(S'_1 \sqrt{\frac{(S_1 + S_2)}{C_1}} + (S'_1 + S'_2) \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} \right) e_2^4 + \\ & \left(S'_1 \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} + S'_1 \sqrt{\frac{(S_1 + S_2)}{C_1}} \right) |e_2 e_1^3| - S'_1 \sqrt{\frac{S_1}{C_1}} e_1^4 + \\ & S'_1 \sqrt{\frac{S_1}{C_1}} |e_1 e_2^3| + \left(2S'_2 + S'_1 \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \right) |\dot{e}_2 e_2^3| + \left(2S'_1 + S'_1 \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \right) |\dot{e}_2 e_1^3| + \left(2S'_2 - 2S'_1 - \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} S'_1 \right) |\dot{e}_1 e_1^3| + \left(2S'_1 + \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} (S'_1 + S'_2) \right) |\dot{e}_1 e_2^3| + \left(3S'_1 \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} A_2 + 3(S'_1 + S'_2) A_2 \right) |e_2^3| + 3 \sqrt{\frac{S_1}{C_1}} S'_1 A_1 |e_1^3| + \left(3 \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} S'_1 A_1 + 3 \sqrt{\frac{(S_1 + S_2)}{C_1}} S'_1 A_1 \right) |e_2 e_1^2| + 3 \sqrt{\frac{S_1}{C_1}} S'_1 A_2 |e_1 e_2^2| + (6(S'_1 + S'_2) A_2 + 3S'_1 A_2) |\dot{e}_2 e_2^2| + \left(6S'_1 A_1 + 3 \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} S'_1 A_1 \right) |\dot{e}_2 e_1^2| + \left(6S'_1 A_1 - 3 \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} S'_1 A_1 \right) |\dot{e}_1 e_1^2| + \left(3 \sqrt{C_1/C_2} (S'_1 + S'_2) A_2 + 6S'_1 e_2^2 A_2 \right) |\dot{e}_1 e_2^2| - k_1 \|e\|^2 + 2|\dot{e}_2| \beta_1 + 2|\dot{e}_1| \beta_1 \end{aligned} \quad (40)$$

ازطرفی می توان به کمک نامساوی $\|e_i\| \leq \|e\|$ ، مشتق تابع لیپانوف را ساده تر نمود. بر همین اساس این نامساوی در معادله ی (۴۱) جایگزین شده است:

$$K_{44} = 2D_1 + \sqrt{C_1/C_2} \left(\frac{T_1}{T_0} \right) D_1 + \sqrt{S_1 C_1} \quad (35)$$

$$K_{33} = \sqrt{S_1/C_1} S_1 + 3S'_1 \sqrt{S_1/C_1} (A_1 \sin(\omega t + \theta))^2 \quad (36)$$

می توان ملاحظه کرد که برطبق رابطه (۲۷) مولفه های ماتریس متغیر با زمان Q مثبت می باشد. پس ماتریس متقارن Q بین دو ماتریس $k_1 I$ و $k_2 I$ با درایه های مثبت قرار می گیرد. در رابطه (۳۸) ماتریس I معادل ماتریس همانی است و k_1 و k_2 نیز ضرایب ثابت مثبتی هستند

$$0 < k_1 I < Q < k_2 I \quad (37)$$

با توجه به مولفه های ماتریس Q و پارامترهای آن و مقادیر داده های جدول ۲، $k_1 = 1706.1$ محاسبه شده است. در ادامه به تعیین علامت $\dot{V}(e)$ می پردازیم. با توجه به رابطه (۲۷) و قسمت B آن، تعیین علامت ماتریس Q انجام می شود که با نگاه به علامت منفی قبل از ماتریس Q می توان فهمید که تنها در صورتی مشتق تابع منفی معین خواهد بود که ماتریس Q مثبت معین گردد بنا بر معیارسیلوستر در [۳۲] باید کهدهای اصلی ماتریس متقارن Q نیز مثبت باشند تا خود ماتریس مثبت معین گردد. به طور مشابه با رابطه (۲۴) کهدهای مرتبه ۱ تا ۴ ماتریس Q به صورت زیر در رابطه (۳۹) آورده شده اند. مقدار کهدهای ماتریس Q با جایگذاری پارامترها به کمک داده های جدول ۲ به صورت زیر محاسبه شده اند:

$$KH_{Q_i} > 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$KH_{Q_1} = 3.1759 \times 10^5 > 0,$$

$$KH_{Q_2} = 3.0973 \times 10^6 > 0$$

$$\begin{aligned} KH_{Q_3} &= 3.5124 \times 10^3 \\ &> 0, \quad KH_{Q_4} = 1.11 \times 10^3 \\ &> 0 \end{aligned} \quad (38)$$

در ادامه با توجه به رابطه (۲۷) و قسمت A این رابطه به تعیین علامت عبارت های قبل از ماتریس Q پرداخته و با توجه به اینکه در این قسمت از معادله (۲۷) مقادیر $H_1(t)$ و $H_2(t)$ روابط (۱۷) و (۱۸) وجود دارند برای جملات اختلال دو حد بالای β_1 و β_2 در نظر می گیریم تا به کمک این دو حد بالا به تعیین علامت قسمت A رابطه (۲۷)

$$O_2 = \left(3\sqrt{\frac{S_1}{c_1}} S'_1 A_1 + 3S'_1 \sqrt{(S_1 + S_2)/S_2} A_2 + 3\sqrt{(S_1 + S_2)/S_2} S'_1 A_1 + 3\sqrt{\frac{(S_1 + S_2)}{c_1}} S'_1 A_1 + 3\sqrt{\frac{c_1}{S_2}} (S'_1 + S'_2) A_2 + 6S'_1 A_2 + 3\sqrt{\frac{S_1}{c_1}} S'_1 A_2 + 9(S'_1 + S'_2) A_2 + 3S'_1 A_2 + 12S'_1 A_1 + 3\sqrt{\frac{S_2}{c_1}} S'_1 A_1 - 3\sqrt{\frac{c_1}{S_2}} S'_1 A_1 \right) \quad (45)$$

$$O_3 = 2S'_1 + 4S'_2 + S'_1 \sqrt{\frac{S_1}{c_1}} S'_1 \sqrt{(S_1 + S_2)/S_2} + S'_1 \sqrt{\frac{(S_1 + S_2)}{c_1}} + 2S'_1 \sqrt{\frac{S_2}{c_1}} + \sqrt{\frac{c_1}{S_2}} S'_2 \quad (46)$$

با توجه به پارامترها و جایگذاری داده های جدول ۲ در روابط (۴۴) و (۴۵) و (۴۶) مقادیر $O_1 = 313.08$ و $O_2 = 1.26$ و $O_3 = 8.60$ به دست می آیند.

با تقسیم عبارت $k_1 \|e\|^2$ به دو بخش $\sigma k_1 \|e\|^2$ و $(1 - \sigma) k_1 \|e\|^2$ ، که $(0 < \sigma < 1)$ ، مشتق تابع لیاپانوف به صورت زیر خواهد شد:

$$\dot{V}(e) \leq O_1 \|e\| + O_2 \|e\|^3 + O_3 \|e\|^4 - \left(S'_1 \sqrt{\frac{(S_1 + S_2)}{c_1}} + (S'_1 + S'_2) \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} \right) e_2^4 - \sigma k_1 \|e\|^2 - S'_1 \sqrt{\frac{S_1}{c_1}} e_1^4 - (1 - \sigma) k_1 \|e\|^2 \quad (47)$$

از طرفی نشان می دهیم $\|e\|$ روابط (۱۲) و (۱۳) دارای حد پایین و بالایی هست که در ادامه می خواهیم این حد پایین و بالا را بدست بیاوریم. برهمن اساس ρ_1 را حد بالای نرم $\|e\|$ فرض کرده $(\|e\| \leq \rho_1)$ و در رابطه (۴۷) به صورتی که در رابطه (۴۸) نشان داده شده است، جایگذاری می گردد.

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) \leq & - \left(S'_1 \sqrt{\frac{(S_1 + S_2)}{c_1}} + (S'_1 + S'_2) \sqrt{(S_1 + S_2)/S_2} \right) e_2^4 - S'_1 \sqrt{\frac{S_1}{c_1}} e_1^4 + \\ & \sqrt{\epsilon} \|e\| - k_1 \|e\|^2 + \left(3S'_1 \sqrt{(S_1 + S_2)/S_2} A_2 + 3\sqrt{\frac{S_1}{c_1}} S'_1 A_1 + 3\sqrt{(S_1 + S_2)/S_2} S'_1 A_1 + 3\sqrt{\frac{(S_1 + S_2)}{c_1}} S'_1 A_1 + 3\sqrt{\frac{S_1}{c_1}} S'_1 A_2 + 9(S'_1 + S'_2) A_2 + 3S'_1 A_2 + 12S'_1 A_1 + 3\sqrt{\frac{S_2}{c_1}} S'_1 A_1 - 3\sqrt{\frac{c_1}{S_2}} S'_1 A_1 + 3\sqrt{\frac{c_1}{S_2}} (S'_1 + S'_2) A_2 + 6S'_1 A_2 \right) \|e\|^3 + \\ & \left(S'_1 \sqrt{(S_1 + S_2)/S_2} + S'_1 \sqrt{\frac{S_1}{c_1}} + 2S'_1 \sqrt{\frac{S_2}{c_1}} + 2S'_1 + 4S'_2 + \sqrt{\frac{c_1}{S_2}} S'_2 \right) \|e\|^4 \end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned} \epsilon = & (2\beta_1)^2 + (2\beta_2)^2 + \left(\sqrt{(S_1 + S_2)/S_2} \beta_1 \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{(S_1 + S_2)}{c_1}} \beta_2 \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{S_1}{c_1}} \beta_2 \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{S_1}{c_1}} \beta_2 \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{S_2}{c_1}} \beta_2 \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{c_1}{S_2}} \beta_1 \right)^2 \end{aligned}$$

با ساده سازی نامساوی (۴۲) مشتق تابع لیاپانوف نوسانگر حرارتی به صورت زیر تبدیل می گردد:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) \leq & O_1 \|e\| + O_2 \|e\|^3 + O_3 \|e\|^4 - \left(S'_1 \sqrt{\frac{(S_1 + S_2)}{c_1}} + (S'_1 + S'_2) \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} \right) e_2^4 - k_1 \|e\|^2 - S'_1 \sqrt{\frac{S_1}{c_1}} e_1^4 \quad (48) \end{aligned}$$

در نامساوی (۴۳) مقادیر O_1 تا O_3 به ترتیب برابرند با:

$$O_1 = \sqrt{\epsilon} \quad (49)$$

$$\dot{V}(e) \leq - \left(S'_1 \sqrt{\frac{(S_1+S_2)}{C_1}} + (S'_1 + S'_2) \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} \right) e_2^4 - \sigma(1 - \varphi) k_1 \|e\|^2 - S'_1 \sqrt{\frac{S_1}{C_1}} e_1^4 \quad (46)$$

اگر

$$\|e\| \geq \mu = \frac{O_1}{\varphi \sigma k_1} = 0.2867 \quad (47)$$

انتخاب شود که مقدار μ با توجه به مقادیر O_1 و k_1 و φ و σ محاسبه شده است. با نگاه به نامساوی (۵۲) می توان دریافت که شرط (ب) نظریه پایداری نیز برآورده شده است. روند پیاده سازی نظریه پایداری بر روی دینامیک خطای نوسانگر حرارتی مورد نظر نشان داد که تمام شروط این نظریه برآورده شده است. همچنین، با توجه به مقدار حد بالا و پایین برای نرم $\|e\|$ حد نهایی برای دینامیک خطای نوسانگر بدست آمده است.

۴- شبیه سازی نتایج

در این بخش به شبیه سازی و ارائه نتایج می پردازیم. به منظور شبیه سازی و بررسی تاثیر تغییر پارامترهای نوسانگر حرارتی بر مقدار حد نهایی، از بخش SIMULINK برنامه MATLAB 2023 و از روش حل ODE 45 استفاده شده است. در بخش قبل ما به بررسی سه شرط برای برقراری نوسانات پایدار در دینامیک این نوسانگر پرداختیم. برای بررسی شرط اول و دوم به محاسبه کدهای ماتریس Q, Z پرداخته شد که با توجه به روابط (۲۴) و (۳۹) مشاهده می شود که مقادیر محاسبه شده KH_{Q_i}, KH_{Z_i} برای $i = 1, 2, 3, 4$ مثبت هستند. لذا دو شرط اولیه برای بررسی نوسانات پایدار در این نوسانگر برآورده شده است. برای بررسی شرط سوم با بررسی حداقل و حداکثر مقدار $\|e\|$ از رابطه های (۴۹) و (۵۳) نیز مشخص است، مقدار حداقل نرم از مقدار ماکزیمم نرم کمتر است و این یعنی شرط سوم پیاده شده برای نوسانگر حرارتی مورد نظر برآورده شده است. طرحواره حداقل و حداکثر مقدار نرم $\|e\|$ در شکل (۲) نشان داده شده است.

$$\dot{V}(e) \leq - \left(S'_1 \sqrt{\frac{(S_1+S_2)}{C_1}} + (S'_1 + S'_2) \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} \right) e_2^4 - \sigma k_1 \|e\|^2 - S'_1 \sqrt{\frac{S_1}{C_1}} e_1^4 + O_1 \|e\| + \underbrace{O_3 \rho_1^2 \|e\|^2 + O_2 \rho_1 \|e\|^2 - (1 - \sigma) k_1 \|e\|^2}_{\dot{E}} \quad (48)$$

قسمتی از رابطه (۴۸) که با $\dot{E}$ نشان داده شده یک معادله درجه دوم به صورت $a\rho_1^2 + b\rho_1 + c = 0$ برحسب ρ_1 هست که با حل آن مقدار ρ_1 در رابطه (۴۹) به دست می آید (با توجه به حد بالای نرم $\|e\|$ مقدار مثبت قبل از رادیکال در نظر گرفته شده است).

$$\rho_1 = \frac{-O_2 + \sqrt{O_2^2 + 4O_3(1-\sigma)k_1}}{2O_3} = 6.23 \quad (49)$$

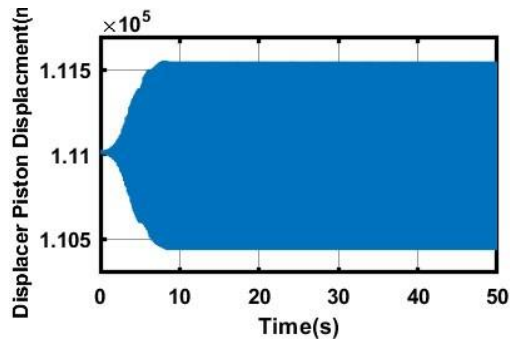
با توجه به مقادیر k_1 و O_2 و O_3 و σ برابر با ۰.۸ (عدد ۰.۸ به عنوان عدد فرضی بین ۰، ۱ در نظر گرفته شده) (جدول ۲) مقدار ρ_1 بدست می آید.

حال می توان نامساوی (۴۸) را به شکل زیر نوشت:

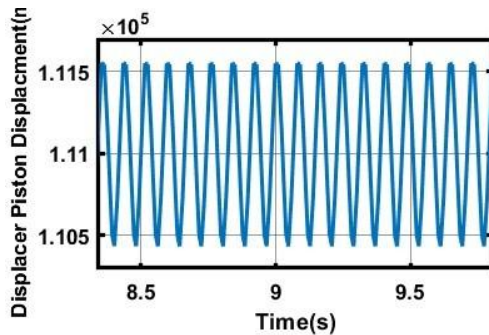
$$\dot{V}(e) \leq - \left(S'_1 \sqrt{\frac{(S_1+S_2)}{C_1}} + (S'_1 + S'_2) \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} \right) e_2^4 - \sigma k_1 \|e\|^2 - S'_1 \sqrt{\frac{S_1}{C_1}} e_1^4 + O_1 \|e\| \quad (44)$$

در ادامه کران پایین خطا محاسبه می گردد تا بتوان محدوده ای را که رفتار دینامیک خطای نوسانگر حرارتی در نزدیکی نقطه تعادل در آن نوسان می کند را به دست آورد. بر این اساس نیاز است که عبارت $\sigma k_1 \|e\|^2$ به دو بخش $\sigma \varphi k_1 \|e\|^2$ و $\sigma(1 - \varphi) k_1 \|e\|^2$ تقسیم گردد ($0 < \varphi < 1$) همانطور که در رابطه ی (۵۱) نشان داده شده است:

$$\dot{V}(e) \leq - \left(S'_1 \sqrt{\frac{(S_1+S_2)}{C_1}} + (S'_1 + S'_2) \sqrt{(S_1 + S_2)/C_2} \right) e_2^4 - \sigma(1 - \varphi) k_1 \|e\|^2 - \sigma \varphi k_1 \|e\|^2 - S'_1 \sqrt{\frac{S_1}{C_1}} e_1^4 + O_1 \|e\| \quad (45)$$

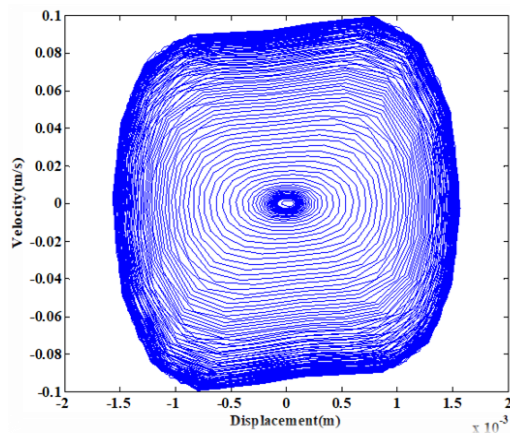


(الف)



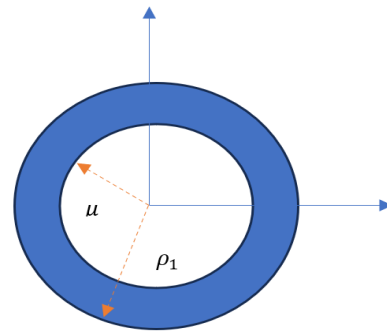
(ب)

شکل ۴- الف) نوسانات حرکت پیستون جابجاگر (ب) قسمت بزرگ شده نوسانات



شکل ۵- چرخه حدی ایجاد شده برای پیستون قدرت و پیستون جابجاگر

بعد از ارزیابی ۳ شرط ارائه شده، اکنون می‌توان بررسی کرد که تا چه میزان یکی از اهداف مساله (مقدار هرچه کمتر حد نهایی) برآورده شده است. این موضوع را می‌توان با کمک شاخص حد نهایی ارزیابی کرد. با توجه به معادله (۲۳) و آخرین شرط نظریه پایداری، مقدار شاخص را می‌توان محاسبه نمود. قابل بیان است که برای محاسبه مقدار حد نهایی در شرط آخر نظریه پایداری (رسیدن به کمترین مقدار باند نهایی) مقدار دو ثابت C_1 و C_2 را

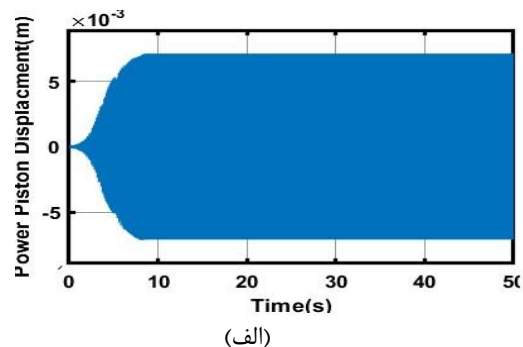


شکل ۲- طرحواره طوق ایجاد شده در نزدیکی مبدا برای نشان دادن حداقل و حداکثر خطا برای نوسانگر حرارتی

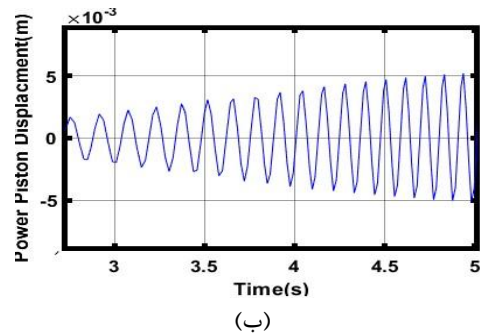
شکل (۳) جابجایی پیستون قدرت برحسب زمان را نشان می‌دهد. از روی این شکل می‌توان دامنه و فرکانس نوسان را به دست آورد. شکل (۳-ب) در فاصله زمانی ۰ تا ۵ ثانیه حالت گذرای (۳-الف) را نشان می‌دهد. با توجه به اینکه سیستم مکانیکی و دارای دینامیک است این حالت گذرا تا رسیدن به نوسان پایدار طبیعی است.

شکل (۴) نیز جابجایی پیستون جابجاگر برحسب زمان را نشان می‌دهد. از روی این شکل نیز می‌توان دامنه و فرکانس نوسان را به دست آورد. شکل (۴-ب) نیز حالت گذرای (۴-الف) را نشان می‌دهد.

شکل (۵) چرخه حدی ایجاد شده در سیستم نوسانگر را نشان می‌دهد. نمودار عمودی سرعت و نمودار افقی جابجایی را نشان می‌دهد و این یک چرخه حدی پایدار است.



(الف)



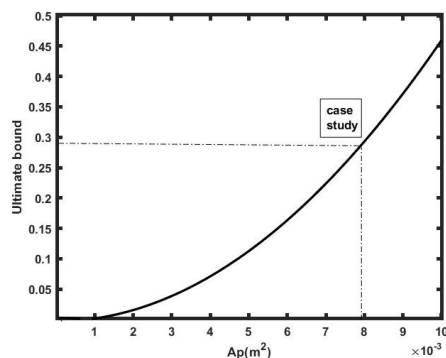
(ب)

شکل ۳- الف) نوسانات حرکت پیستون قدرت (ب) قسمت بزرگ شده از نوسانات

۱۰۰۰ نیوتن بر متر مربع منجر به کاهش مستمر مقدار حد نهایی شده است. قابل ذکر است که ممکن است با افزایش بیش از حد این مقدار، روند تغییرات مقدار حد نهایی تغییر کند (بازه تغییرات بر اساس فیزیک مساله تعیین شده است).

دمای ورودی به نوسانگر حرارتی دیگر پارامتری است که می توان تغییر مقدار آن بر حد نهایی را مورد بررسی و ارزیابی قرار داد. در شکل (۸) اثر تغییر مقدار دمای ورودی به محفظه نوسانگر حرارتی بر مقدار حد نهایی نشان داده شده است. با توجه به شکل (۸)، افزایش مقدار دمای ورودی منجر به افزایش مقدار حد نهایی شده است. همچنین در شکل (۹) نیز تاثیر تغییرات دمای خروجی از نوسانگر حرارتی نشان داده شده است. با توجه به شکل (۹)، این افزایش منجر به افزوده شدن مقدار حد نهایی گردیده است. به بیان بهتر، افزایش مقدار دمای ورودی از ۳۰۰ کلوین تا ۵۰۰ کلوین باعث افزایش مقدار باند نهایی از ۰.۲۸۶۷ تا ۰.۸۷ شده است.

حجم فضا در بخش سرد یکی دیگر از پارامترهایی است که می توان تاثیر آن را بر مقدار حد نهایی مورد مطالعه قرار داد. به طور کلی مقدار حجم فضای در این نوع نوسانگرها در یک بازه مشخص منجر به بهبود عملکرد سیستم خواهد شد، اما افزایش بیش از حد یا کاهش بیش از حد آن خود منجر به پایدار شدن دینامیک نوسانگر می گردد. با توجه به این موضوع، افزایش مقدار حجم فضای سرد در بازه انتخابی در این مقاله اثر مثبت بر حد نهایی داشته و کاهش مستمر آن را در پی داشته است (شکل ۱۰). همچنین، تغییر مقدار حد نهایی در اثر تغییر مقدار حجم فضای گرم نوسانگر حرارتی کاهشی بوده است (البته ممکن است با افزایش بیشتر یا کاهش بیشتر مقدار حجم فضای گرم، مقدار حد نهایی افزایشی شود) (شکل ۱۱).



شکل ۶- تاثیر سطح مقطع پیستون قدرت بر باند نهایی

می توان با هم برابر در نظر گرفته شوند. بر این اساس مقدار حد نهایی برای نوسانگر حرارتی مورد مطالعه برابر خواهد بود با:

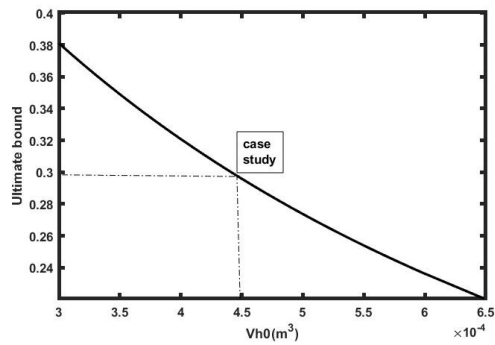
$$b = \mu \sqrt{\frac{c_2'}{c_1'}} \frac{c_1 = c_2}{\mu} = 0.2867 \quad (54)$$

با توجه به عبارت مربوط به نرم $\|e\| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + \dot{e}_1^2 + \dot{e}_2^2}$ مقدار حد نهایی برای نوسانگر حرارتی مورد نظر کاملاً منطقی به نظر می آید. در نتیجه می توان گفت که دینامیک خطای غیرخطی نوسانگر حرارتی بخوبی با کمک روش پایداری توانسته است به مبدا نزدیک شود. اما واضح است که هرچه بتوان مقدار حد نهایی را کاهش داد، اهداف مساله که همان پایداری هرچه بیشتر دینامیک خطای غیر خطی نوسانگر است (یا نوسانات پایدار دینامیک غیرخطی)، بیشتر محقق خواهد شد. بر همین اساس می توان به بررسی تغییر مقدار برخی از پارامترهای موثر بر این موضع پرداخت که در ادامه به آن پرداخته خواهد شد. ذکر دوباره این نکته مهم است که مقدار حد نهایی برای دینامیک خطای غیرخطی نوسانگر به دلیل وجود جملات اغتشاش هیچگاه صفر نخواهد شد و تنها مقدار آن به صفر نزدیک تر خواهد گشت.

۴-۱- تحلیل تاثیر تغییر پارامترها

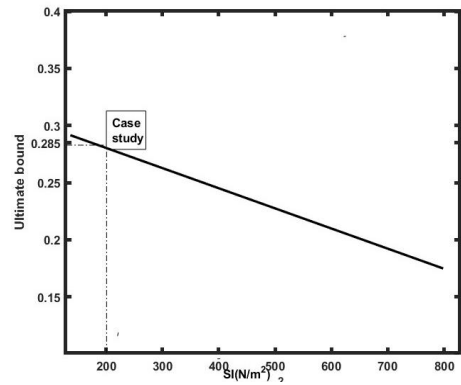
اولین پارامتری که می توان مورد بررسی قرار داد، سطح مقطع پیستون قدرت در مدل دینامیکی ارائه شده برای نوسانگر حرارتی است. در شکل (۶) تاثیر تغییر این پارامتر بر مقدار حد نهایی رابطه (۵۴) نشان داده شده است. همانطور که از شکل (۶) مشخص است، با افزایش مقدار سطح مقطع پیستون قدرت، مقدار حد نهایی افزایش پیدا کرده است که بر اساس تعریفی از حد نهایی ارائه شده، افزایش مقدار این پارامتر اثر مخرب بر عملکرد نوسانگر حرارتی مورد نظر خواهد داشت. شایان ذکر است که بازه انتخاب شده برای تغییرات این پارامتر بر اساس فیزیک مساله بوده است و امکان این که با تغییر بازه انتخابی روند تغییرات مقدار حد نهایی نیز تغییر کند وجود دارد.

سختی فنر متصل به پیستون قدرت در مدل دینامیکی تعیین شده برای نوسانگر حرارتی اکوستیکی دومین پارامتری است که می توان اثر تغییر مقدار آن بر مقدار حد نهایی را مورد بررسی و ارزیابی قرار داد. با توجه به شکل (۷) تغییر مقدار این پارامتر از ۳۰ نیوتن بر متر مربع تا

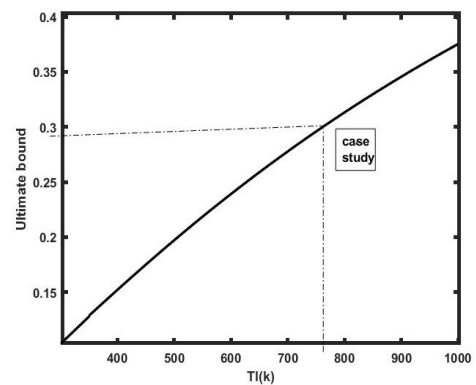
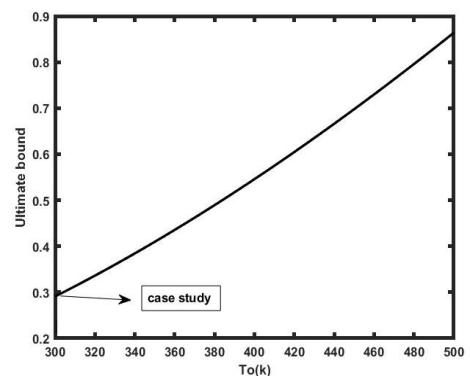
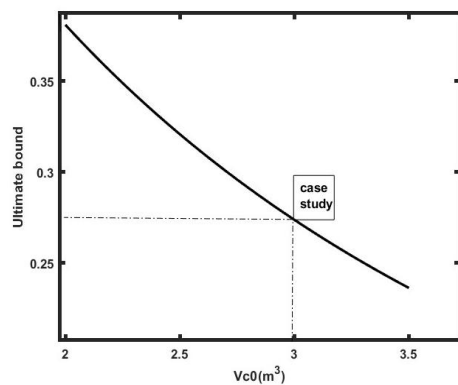

 شکل ۱۱- تاثیر مقدار حجم فضای گرم V_{h0} بر باند نهایی

جدول ۱- فهرست نشانه های اختصاری

نشانه	توصیف	نشانه	توصیف
V_{C0}	حجم اولیه فضای سرد	C_1	جرم پیستون قدرت
V_{h0}	حجم اولیه فضای گرم	C_2	جرم پیستون جابجا گر
μ	حد پایین $\ e\ $	p	فشار
z_2	حرکت پیستون جابجاگر	$\dot{S}_2$ و S_2	ثابت های سختی فنر جرم پیستون جابجاگر
z_1	حرکت پیستون قدرت	$\dot{S}_1$ و S_1	ثابت های سختی فنر متصل به جرم پیستون قدرت
F	نیرو	T_I	دمای ورودی
Q_{ij}	مولفه i از j ام ماتریس Q	T_0	دمای خروجی
$[e]^T Z [e]$	تابع لیاپانوف به فرم ماتریسی	D_1	ضریب میرایی
β_1	حد بالا $ H_1(t) $	φ, σ	مقدار فرضی بین صفر و یک
β_2	حد بالا $ H_2(t) $	$v(e)$	تابع لیاپانوف
ρ_1	حد بالای $\ e\ $	ρ	چگالی
A_p	سطح مقطع پیستون قدرت	R	ثابت گاز
t	زمان	KH_{Q_i}	کهاد مرتبه i ام ماتریس Q
c'_1, c'_2, k_2	اعداد ثابت	A_1 و A_2	دامنه نوسانات
θ	اختلاف فاز	ω	فرکانس



شکل ۷- تاثیر سختی فنر مربوط به پیستون قدرت بر باند نهایی


 شکل ۸- تاثیر مقدار دمای ورودی T_1 بر باند نهایی

 شکل ۹- تاثیر مقدار دمای خروجی T_0 بر باند نهایی

 شکل ۱۰- تاثیر مقدار حجم فضای سرد V_{c0} بر باند نهایی

جدول ۲- ویژگی های نوسانگر مورد مطالعه [۳۲]

مقدار	پارامتر	مقدار	پارا متر
0.001(kg)	C_2	0.067(kg)	C_1
0.08(N/m ²)	S_2	210(N/m ²)	S_1
300(K)	T_0	40(rad/s)	ω
825(K)	T_1	4.81 (kg/m ³)	ρ
0.005 ,0.0225 (m)	A_1, A_2	287 (N × m/kg)	R
0.0263	β_2	4.12	β_1
1.26	α_2	313.08	α_1
1706.1	k_1	8.60	α_3
0.8	φ, σ	50°	θ
42(N/m ²)	$\hat{S}_2$	1(N/m ²)	$\hat{S}_1$

هدف این مقاله ارائه یک روش به منظور بررسی نوسانات پایدار این نوع نوسانگرها ست. در این راستا ابتدا به معرفی نوسانگر حرارتی-صوتی دیافراگمی پرداخته شد. سپس روش پایداری بر روی دینامیک غیرخطی این نوسانگر پیاده سازی و با استفاده از داده های یک نوسانگر حرارتی دیافراگمی ساخته شده، روش ارائه شده مورد ارزیابی قرار گرفت. در پایان نیز نتایج مورد تحلیل قرار گرفتند. نتیجه این تحقیق ارائه ۳ شرط پارامتریک است که در صورت برقرار شدن این ۳ شرط، نوسانات پایدار نوسانگر حرارتی مورد مطالعه تضمین خواهد شد و در نتیجه مهمترین چالش طراحان در این زمینه برطرف می گردد.

تعارض منافع

نویسندگان اعلام می کنند که هیچ گونه تعارض منافع در مورد انتشار این مقاله وجود ندارد.

تاییدیه اخلاقی

نویسندگان متعهد می شوند که مطالب این مقاله را در هیچ مجله دیگری به چاپ نرسانده اند.

مشارکت های نویسندگان

خانم اعظم تیموری: ایده، نوشتن نسخه ابتدایی مقاله، پیاده سازی نتایج

دکتر عقیده حیدری: ایده، نظارت، بررسی نتایج، نهایی سازی نسخه

دکتر محمدرضا رضائی آل: ایده، نظارت، بررسی نتایج، نهایی سازی نسخه. نویسنده مسئول

منابع مالی

برای این پژوهش هیچگونه حمایت مالی دریافت نشده است.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله به کمک نظریه پایداری دینامیک یک نوسانگر حرارتی-صوتی دیافراگمی مورد تحلیل قرار گرفت و وجود چرخه حدی در آن با برقراری شرایطی اثبات شد. در واقع

مراجع

- [1] Hajimiri, Ali, and Thomas H. Lee. The design of low noise oscillators. Boston, MA: Springer US, 1999.
- [2] Adler, Robert. "A study of locking phenomena in oscillators." Proceedings of the IRE 34, no. 6 (1946): 351-357.
- [3] Jenkins, Alejandro. "Self-oscillation." Physics Reports 525, no. 2 (2013): 167-222.
- [4] Strogatz, Steven H., and Ian Stewart. "Coupled oscillators and biological synchronization." Scientific American 269, no. 6 (1993): 102-109.
- [5] Maleki, Lute. "The opto-electronic oscillator (OEO): Review and recent progress." In 2012 European Frequency and Time Forum, pp. 497-500. IEEE, 2012.
- [6] Gammaitoni, Luca, Igor Neri, and Helios Vocca. "Nonlinear oscillators for vibration energy harvesting." Applied Physics Letters 94, no. 16 (2009).

- [7] Csaba, Gyorgy, and Wolfgang Porod. "Coupled oscillators for computing: A review and perspective." *Applied Physics Reviews* 7, no. 1 (2020).
- [8] Javad Faghihi, Mohammad, Mohammad Haddad, Zahra Mazaheri, and Hamid Reza Baghshahi. "Nonlinear thermal coherent states." *Journal of the Optical Society of America B* 37, no. 8 (2020): 2299-2307.
- [9] Pan, Y., F. R. Riedijk, and J. H. Huijsing. "A new class of integrated thermal oscillators with duty-cycle output for application in thermal sensors." *Sensors and Actuators A: Physical* 22, no. 1-3 (1990): 655-659.
- [10] Xuereb, André, Alberto Imparato, and Aurélien Dantan. "Heat transport in harmonic oscillator systems with thermal baths: application to optomechanical arrays." *New Journal of Physics* 17, no. 5 (2015): 055013.
- [11] Backhaus, Swift, and Gregory William Swift. "A thermoacoustic Stirling heat engine." *Nature* 399, no. 6734 (1999): 335-338.
- [12] Biwa, Tetsushi, Daichi Hasegawa, and Taichi Yazaki. "Low temperature differential thermoacoustic Stirling engine." *Applied Physics Letters* 97, no. 3 (2010).
- [13] Zare, Shahryar, A. R. Tavakolpour-Saleh, A. Aghahosseini, and Reza Mirshekari. "Thermoacoustic Stirling engines: A review." *International Journal of Green Energy* 20, no. 1 (2023): 89-111.
- [14] Tijani, M. E. H., and S. Spoelstra. "A hot air driven thermoacoustic-Stirling engine." *Applied Thermal Engineering* 61, no. 2 (2013): 866-870.
- [15] Dashti, Ehsan, Nima Ghiyasi Tabari, Shahryar Zare, and Hanif Shabanpour. "An analytical investigation of a thermoacoustic stirling engine." *Arabian Journal for Science and Engineering* 49, no. 8 (2024): 11073-11090.
- [16] Hofacker, Mark E., John M. Tucker, and Eric J. Barth. "Modeling and validation of free-piston Stirling engines using impedance controlled hardware-in-the-loop." In *Dynamic Systems And Control Conference*, vol. 54754, pp. 153-160. 2011.
- [17] Bégot, Sylvie, Guillaume Layes, François Lanzetta, and Philippe Nika. "Stability analysis of free piston Stirling engines." *The European Physical Journal-Applied Physics* 61, no. 3 (2013): 30901..
- [18] Riofrio, José A., Khalid Al-Dakkan, Mark E. Hofacker, and Eric J. Barth. "Control-based design of free-piston stirling engines." In *2008 American Control Conference*, pp. 1533-1538. IEEE, 2008.
- [19] Zare, S. H., and A. R. Tavakolpour-Saleh. "Frequency-based design of a free piston Stirling engine using genetic algorithm." *Energy* 109 (2016): 466-480.
- [20] De Waele, A. T. A. M. "Basic treatment of onset conditions and transient effects in thermoacoustic Stirling engines." *Journal of Sound and Vibration* 325, no. 4-5 (2009): 974-988.
- [21] Zare, Shahryar, and AliReza Tavakolpour-Saleh. "Design of a traveling wave thermo-acoustic engine based on genetic algorithm." *International Journal of Energy Research* 43, no. 14 (2019): 8790-8801.
- [22] Zare, S. H., and Ali Reza Tavakolpour-Saleh. "Nonlinear dynamic analysis of solar free piston hot-air engine." *Modares Mech. Eng* 15, no. 9 (2015): 223-234.
- [23] Formosa, Fabien. "Coupled thermodynamic–dynamic semi-analytical model of free piston Stirling engines." *Energy Conversion and Management* 52, no. 5 (2011): 2098-2109.
- [24] Zare, Shahryar, and A. R. Tavakolpour-Saleh. "Modeling, construction, and testing of a diaphragm thermoacoustic Stirling engine." *Energy Conversion and Management* 243 (2021): 114394.
- [25] Bi, Tianjiao, Zhanghua Wu, Limin Zhang, Guoyao Yu, Ercang Luo, and Wei Dai. "Development of a 5 kW traveling-wave thermoacoustic electric generator." *Applied Energy* 185 (2017): 1355-1361.
- [26] Wang, Kai, and Limin Qiu. "Numerical analysis on a four-stage looped thermoacoustic Stirling power generator for low temperature waste heat." *Energy Conversion and Management* 150 (2017): 830-837.
- [27] Yang, Rui, Yi Wang, Ye Feng, Tao Jin, and Ke Tang. "Performance of a looped thermoacoustic engine with multiple loads capable of utilizing heat source below 200 C." *Applied Thermal Engineering* 148 (2019): 516-523.
- [28] Yang, Rui, Yi Wang, Jiaqi Luo, Jingqi Tan, and Tao Jin. "Performance comparison of looped thermoacoustic electric generators with various thermoacoustic stages." *International Journal of Energy Research* 44, no. 2 (2020): 1103-1112.
- [29] Tavakolpour-Saleh, A. R., and Shahryar Zare. "Justifying performance of thermo-acoustic Stirling engines based on a novel lumped mechanical model." *Energy* 227 (2021): 120466.

[30] Zare, Shahryar, Fathollah Pourfayaz, A. R. Tavakolpour-Saleh, and Reza Ahmadi Lashaki. "A design method based on neural network to predict thermoacoustic Stirling engine parameters: Experimental and theoretical assessment." *Energy* 309 (2024): 133113.

[31] Hassan, K. K. "Nonlinear systems. Departement of Electrical and Computer Engineering, Michigan State University." (2002).

[32] Zare, Shahryar. "Investigation of instability in a Stirling Thermo-acoustic oscillator using extended Lyapunov stability theory: Analytical and experimental study (Doctoral dissertation). Shiraz University of Technology." (2021). (in Persian)