

بررسی انتقال حرارت هدایت غیر فوری‌ای در شن با استفاده از مدل‌های بر پایه حساب کسری

عزیز عظیمی^{۱*}، شهاب غلامی^۲، حسن بیاتی^۳

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت مقاله: ۱۳۹۳/۰۲/۱۸	<p>در این مقاله، به بررسی هدایت حرارتی غیر فوری‌ای در شن ریخته‌گری پرداخته شده‌است که درون یک جعبه قرار داشته و ناگهان تحت یک شار گرمایی لحظه‌ای قرار می‌گیرد. با توجه به ناکارآمدی مدل فوری‌ای در مدل کردن رفتار این مساله به سبب وجود اختلاف انتقال حرارت بین فازهای شن و توانایی مدل‌های بر پایه حساب کسری در مدل کردن رفتارهای غیرعادی در مواد مختلف، در این مقاله از مدل‌های بر پایه حساب کسری استفاده شده که به تازگی وارد حوزه فیزیک شده‌اند. خواص ترموفیزیکی، شرایط مرزی و اولیه مساله معلوم است. مساله در یک الگوریتم سعی و خطا به منظور بدست آوردن مقادیر تاخیر زمانی و مرتبه کسری با استفاده از یک روش ضمنی گسسته‌سازی و حل شده‌است. نتایج نشان می‌دهند که مدل کسری استفاده شده برای شرایط فرایخشی و فروپخشی هیچ کدام به تنهایی قادر به مدل کردن انتقال حرارت در شن نیستند. همچنین می‌توان مشاهده نمود که در لحظات اولیه شرایط فروپخشی و در لحظات بعدی شرایط فرایخشی حاکم بر مساله می‌باشد. با بکارگیری همزمان مدل‌های فروپخشی و فرایخشی، نتایج عددی حاضر توانسته‌اند داده‌های تجربی مربوط به توزیع دما درون جعبه را هم‌پوشانی کنند.</p>
پذیرش مقاله: ۱۳۹۳/۰۹/۱۹	
<p>واژگان کلیدی: انتقال حرارت غیر فوری‌ای، حساب کسری، مدل‌های کسری، مدل فروپخشی-فرایخشی</p>	

۱- مقدمه

غیر فوری‌ای گردید. از جمله زمینه‌هایی که توسط این مدل‌ها مورد بررسی قرار گرفته‌است، می‌توان به محیط‌های با ساختار غیرهمگن اشاره کرد. به طور کلی، نتایج پاسخ حرارتی در بافت‌های زیستی، ساختارهای غیرهمگن و ساختارهای تحت پاسخ آنی بین شار گرمایی گرادیان دما، شرایط عدم تعادل محلی، نشان از وجود تاخیر زمانی بین گرادیان دمایی و شار گرمایی دارد [۱]. اولین مشاهده تجربی مبنی بر محدود بودن سرعت انتشار

مدل هدایت حرارتی فوری‌ای توانایی خود را در مدل کردن بسیاری از کاربردها به اثبات رسانده‌است. ولی با ظهور زمینه‌های کاربردی جدید در هدایت حرارتی مواد مختلف در دهه‌های اخیر، تردیدهایی در مورد اعتبار مدل کلاسیک فوری‌ای ایجاد شده‌است. به همین علت محققان درصدد معرفی مدلی برآمدند تا این ناکارآمدی را اصلاح کنند که این مشکل زمینه‌ساز ایجاد مدل‌های هدایت حرارتی

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: a.azimi@scu.ac.ir

۱. استادیار، گروه مهندسی مکانیک، مرکز تحقیقات حفاری، دانشگاه شهید

چمران اهواز

۲. کارشناس ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز

۳. دانشجوی دکتری، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز

اغتشاشات گرمایی در سال ۱۹۴۴ توسط پشکوف [۲] در طی آزمایش‌هایی که بر روی هلیوم مایع انجام داد، مشاهده شد. پس از مطالعات تجربی پشکوف [۲] سایر محققین مطالعات بسیاری را در خصوص یافتن انتشار دما با سرعت محدود در سایر مواد تحت شرایط حرارتی خاص انجام دادند. از کارهای موجود در این زمینه، می‌توان به کارهای تجربی لیوکف [۳-۴] در مواد ناهمگن اشاره کرد. لیوکف نشان داد که انتشار اغتشاشات گرمایی در دمای اتاق در اینگونه مواد، بدلیل اثر تجمعی مکانیزم‌های انتقال حرارت در ماده، از نوع موجی می‌باشد. همچنین می‌توان به مطالعه تجربی کامینسکی [۵] بر روی موادی غیرهمگن همچون NaHCO_3 ، اسیدهای H، شن، دانه‌های شیشه و چند ماده متخلخل اشاره کرد. کامینسکی [۵] در آزمایش‌های خود با انطباق نتایج مدل کاتانو-ورنات بر روی نتایج تجربی، مقدار ثابت زمانی را برای اینگونه مواد استخراج نمود. همچنین کامینسکی [۵] بیان کرد که تاخیر زمانی T بیانگر اندرکنش اجزاء مختلف تشکیل دهنده ساختار داخلی ماده در طول انتقال حرارت می‌باشد. از جمله مطالعات تجربی صورت گرفته دیگر، می‌توان به آزمایش‌های میترا و همکارانش [۶] بر روی بافت حیوانی اشاره کرد. هدف از این آزمایشات، مشاهده پخش اغتشاشات با سرعت محدود بود. در سال ۲۰۰۳ راتزل و همکارانش [۷] به طراحی چند سری آزمایش جدید روی مواد غیرهمگن مختلف پرداختند و تاثیر عوامل جانبی گوناگون از قبیل اندازه ذرات، گاز پرکننده بکار رفته در حفره‌ها و همچنین فشار و دمای آن را نیز بررسی نمودند. نتایج بدست آمده از آزمایش‌های راتزل و همکاران [۷] وجود اثرهای غیرفوری‌ای انتقال حرارت را تایید نمود. تنها تفاوت نتایج آنها با نتایج پیشین گزارش شده توسط کامینسکی [۵] و میترا و همکاران [۶]، میزان و اندازه این اثرهای غیرفوری‌ای بود. نتایج مطالعات ذکر شده در بالا همگی با استفاده از مدل کاتانو-ورنات بدست آورده شده‌اند.

را بررسی کرد و یک روش عددی برای حل معادله حرارت کسری معرفی کرد. قاضی‌زاده و همکارانش [۱۵] به بررسی

در سال‌های اخیر نتایج مطالعات تجربی با استفاده از مدل تاخیر زمان دوگانه (DPL) نشان داده شده است که می‌توان به موارد زیر اشاره کرد. لیانگ ژینگانگ و همکارانش [۸] به بررسی انتقال حرارت در شن با استفاده از مدل تاخیر فاز دوگانه پرداختند. آنها در بررسی خود با در نظر گرفتن شن به صورت دو فاز، جامد و گاز به بررسی توزیع دمایی در آن پرداختند. به گونه‌ای که τ_q و τ_T زمان محدود برای انتقال انرژی از فاز جامد به فاز گاز را نشان می‌داد. در سال ۲۰۰۵، آنتاکی [۹] با استفاده از نتایج تجربی میترا و همکاران [۶] و با استفاده از مدل تاخیر زمان دوگانه بجای مدل کاتانو، نشان داد که این مدل قابلیت بالاتری نسبت به مدل کاتانو در توصیف رفتار انتقال حرارت در محیط بافت حیوانی را دارا می‌باشد. او همچنین توانست مقدار تاخیرهای زمانی τ_q و τ_T برای این محیط را استخراج کند. از مطالعات تجربی صورت گرفته در محیط متخلخل می‌توان به دو مطالعه تجربی صورت گرفته توسط آگوانانا و همکارانش [۱۰ و ۱۱] اشاره کرد که این مطالعات نشان داد که استفاده از مدل DPL در شرایط عدم تعادل حرارتی بواسطه وجود تحریک حرارتی ناگهانی و کوتاه و تغییر فاز در محیط متخلخل منجر به پیشبینی دقیق‌تر توزیع دما می‌گردد.

در راستای استفاده از مدل‌های غیرفوری‌ای در مدل‌سازی پخش غیرعادی در مواد غیرهمگن، بافت زنده و شرایط هندسی و فیزیکی خاص، امروزه حساب کسری به عنوان یک ابزار ریاضی توانایی بالای خود را در مدل‌سازی رفتار پخش غیرعادی نشان داده‌است. اما تاکنون مطالعات کمی در زمینه بررسی انتقال حرارت در اجسام مختلف با استفاده از حساب کسری انجام شده‌است که می‌توان به موارد زیر اشاره کرد. باتاگلیا و همکارانش [۱۲ و ۱۳]، رفتار حرارتی گذرای یک سیستم را از طریق یک رابطه خطی مرتبه کسری بین دما و شار حرارتی مطالعه کردند. موریو [۱۴] مسأله معکوس معادله حرارتی کسری در یک قطعه محدود هدایت حرارتی در یک قطعه بافت زیستی با استفاده از روش تاخیر فاز منفرد کسری پرداختند.

عادی است. اگر شرایط پخش به صورتی باشد که در آن اجزا پرش‌های سریع داشته باشند فرآیند از نوع فرایپخشی می‌شوند که در این حالت پخش سریع‌تر از پخش عادی اتفاق می‌افتد. در زمینه حساب کسری مدل‌های زیادی معرفی شده که در ادامه به دو مدل از آنها اشاره می‌شود.

۲-۱- مدل انتقال حرارت غیرفوری‌های

فرایپخشی

مدل غیرفوری‌ه تأخیر زمانی منفرد کسری برای شرایط فرایپخشی با در نظر گرفتن رابطه‌ی تأخیر زمانی منفرد به شکل رابطه (۱) می‌باشد.

$$q(x, t + \tau_q) = -KVT(x, t) \quad (1)$$

در معادله بالا q شار گرمایی و K رسانندگی گرمایی می‌باشد. با بسط دادن ترم شارحرارتی بوسیله‌ی بسط تیلور کسری که به تازگی توسط ادیبیات و شوافه [۱۹] ارائه شده‌است و همچنین با صرفنظر از جملات مرتبه دوم و بالاتر، رابطه (۱) به رابطه (۲) تبدیل می‌شود:

$$\left(1 + \tau_q \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\right) q(x, t) = -KVT(x, t) \quad (2)$$

در معادله بالا α مرتبه مشتق کسری می‌باشد و مقدار آن $0 < \alpha < 1$ است. همچنین قابل ذکر است که $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ مشتق زمانی مرتبه کسری، بر اساس تعریف کاپوتو می‌باشد که برای اطلاع بیشتر در مورد چگونگی رفتار حساب کسری می‌توان به کتاب معادلات دیفرانسیل کسری نوشته پودلونی [۲۰] مراجعه شود. با ترکیب معادله (۹) با معادله انرژی در نهایت معادله تأخیر زمانی منفرد کسری به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau^\alpha \frac{\partial^{1+\alpha} T}{\partial t^{1+\alpha}} = \frac{K}{\rho C} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3)$$

۲-۲- مدل انتقال حرارت غیرفوری‌های

فروپخشی

مدل پخشی-موجی از تعمیم معادله انتقال حرارت فوری‌های

برجستگی مقاله حاضر در بدست آوردن توزیع دما در یک جسم متخلخل حاوی شن با استفاده معادله هدایت حرارتی بر پایه حساب کسری است بطوری که بتوان با دقت بیشتری داده‌های حاصل از آزمایشات تجربی [۱۶] را هم‌پوشانی نمود. این در حالی است که نتایج حاصل از تحقیق حاضر دارای دقت بالاتری نسبت به نتایج بدست آمده از مدل DPL [۸] می‌باشند.

در مقاله حاضر، انتقال حرارت غیرفوری‌ه در شن ریخته‌گری با استفاده از مدل‌های بر پایه حساب کسری به منظور پاسخ بهتر نسبت به مدل تأخیر زمان دوگانه مورد بررسی قرار گرفته‌است. مساله با استفاده از یک روش ضمنی گسسته‌سازی شده‌است. همچنین خواص ترموفیزیکی شن کاملاً ثابت در نظر گرفته شده‌است. در آخر نتایج بدست آمده از مدل‌های برپایه حساب کسری با نتایج حاصل از آزمایش انجام شده توسط یونشنگ و همکارانش [۱۶] مورد مقایسه قرار گرفته‌است.

۲- معادلات حاکم

به‌طور کلی حساب کسری توانایی بالای خود را به عنوان یک ابزار ریاضی در مدل‌سازی رفتار پخش غیرعادی نشان داده است. به‌طوری که اگر γ یک عدد کسری باشد آنگاه $(\partial^\gamma / \partial t^\gamma)$ ، پخش غیرعادی با تأخیر زمانی را بازتاب می‌کند. لین و زو [۱۷] بیان کردند، که مشتقات کسری زمانی، ارائه دهنده درجه‌ای از حافظه ماهیت پخش می‌باشند. به عبارت ساده‌تر مقدار دما بدست آمده در هر نقطه به تاریخچه‌ای که سیستم تا این مرحله زمانی طی کرده بستگی دارد، که این حفظ تاریخچه به عنوان اثر حافظه‌ای شناخته می‌شود.

γ توان پخش غیرعادی می‌باشد، در صورتی که $0 < \gamma < 1$ شرایط فروپخشی، اگر $\gamma = 1$ پخش عادی و اگر $1 < \gamma < 2$ شرایط فرایپخشی برقرار می‌باشد. لینج و همکاران [۱۸] بیان کردند که پخش غیرعادی ممکن است به خاطر در تله افتادن اجزا در خط سیرشان باشد. به آن شرایط فروپخشی گفته می‌شود. در این حالت فرایند پخش کندتر از پخش

$$\frac{\partial^\alpha T}{\partial t^\alpha} = \sigma_\alpha \sum_{j=1}^n \omega_j^\alpha (T_i^{n-j+1} - T_i^{n-j})$$

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{\Delta t^\alpha}$$

$$\omega_j^{1+\alpha} = j^{1-\alpha} - (j-1)^{1-\alpha} \quad (7)$$

۳- تعریف مساله

مساله فیزیکی مورد بررسی در مطالعه حاضر شامل آزمایش مربوط به شن ریخته‌گری می‌باشد که درون یک جعبه به اندازه‌های $280 \text{ mm} \times 100 \text{ mm} \times 140 \text{ mm}$ ریخته شده‌است. ذرات شن دارای اندازه‌های مختلفی هستند از گرد و خاک گرفته تا اندازه $0/8$ میلیمتر که به طور متوسط اندازه ذرات شن برابر $0/2$ میلیمتر در نظر گرفته شده‌است. خواص ترموفیزیکی شن برای مقدار رسانندگی گرمایی $0/29 \text{ W/mK}$ و نفوذگرایی $3/25 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ در نظر گرفته شده‌است. جزئیات پیکربندی این جعبه در شکل ۱ نشان داده شده‌است. حرارت مورد نیاز برای انجام آزمایش توسط یک صفحه نازک به ضخامت 120 میکرومتر که به عنوان یک هیتر الکتریکی به یک منبع با ولتاژ 220 ولت و فرکانس 50 هرتز وصل شده، تامین می‌شود. مقدار شار گرمایی وارد شده به سیستم برابر $5/1 \text{ W/cm}^2$ بوده و این آزمایش به ازای پالس گرمایی برابر $0/56$ ثانیه انجام شده‌است. در پایین این صفحه گرمایی، هشت ترموکوپل تعبیه شده که این ترموکوپل‌ها در فواصل $0/4$ ، $1/5$ ، $2/1$ ، $3/6$ ، $4/5$ ، $5/7$ ، $7/8$ ، $10/2$ میلیمتر قرار داده شده‌اند. خطا در اندازه‌گیری ترموکوپل‌ها برابر 10 میلی ثانیه و خطا در اندازه‌گیری دما برابر $0/15$ کلوین در نظر گرفته شده‌است. بنابراین شرایط مرزی استفاده شده برای مدل کسری با توجه به بسط تیلور مرتبه کسری به صورت رابطه (۹) در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} x=0 & , \quad -k_e \frac{\partial T}{\partial x} = q + \tau^\alpha \frac{\partial^\alpha q}{\partial t^\alpha} \quad 0 \leq t \leq t_e \\ x=L & , \quad T=0 \\ t=0 & , \quad T(x,t)=0 \end{aligned} \quad (9)$$

از طریق جایگزینی مشتق زمانی با مشتق کسری برای شرایط فروپختی بصورت زیر بدست می‌آید [۲۱].

$$\rho c \frac{\partial^\alpha T}{\partial t^\alpha} = k \tau^{1-\alpha} \nabla^2 T \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (4)$$

با فرض شرایط تعادل حرارت محلی می‌توان از معادله بالا به عنوان معادله حاکم بر مساله استفاده کرد.

۲-۳- گسسته‌سازی معادلات

جهت گسسته‌سازی معادلات از یک روش ضمنی استفاده شده‌است. همانطور که ملاحظه می‌شود مدل انتقال حرارت غیرفوری‌ای فراپختی شامل ترمی با مشتق غیرصحیح می‌باشد. قاضی‌زاده و همکارانش [۲۲] یک روش برای بدست آوردن مقدار مشتق غیرصحیح ارائه دادند. آنها با تقریب عددی مشتق کسری بر پایه تعریف کاپوتو توانستند مقدار مشتق غیرصحیح را بدست آورند. با در نظر گرفتن تقریب عددی مشتق کسری معادله (۳) به صورت زیر گسسته‌سازی می‌شود.

$$\frac{\partial^{1+\alpha} T}{\partial t^{1+\alpha}} = \sigma_{1+\alpha} \sum_{j=1}^k \omega_j^{1+\alpha} (T_i^{k-j+1} - 2T_i^{k-j} + T_i^{k-j-1})$$

$$\sigma_{1+\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{\Delta t^{1+\alpha}}$$

$$\omega_j^{1+\alpha} = j^{1-\alpha} - (j-1)^{1-\alpha} \quad (5)$$

و همچنین گسسته‌سازی عبارات شامل مشتق صحیح به صورت زیر می‌باشد.

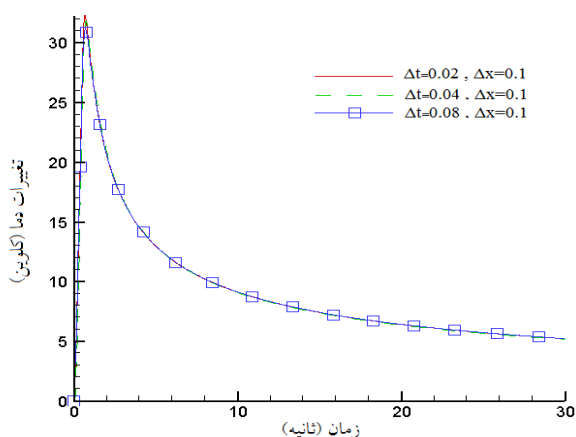
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{3T_i^k - 4T_i^{k-1} + T_i^{k-2}}{2\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i-1}^k - 2T_i^k + T_{i+1}^k}{\Delta x^2}$$

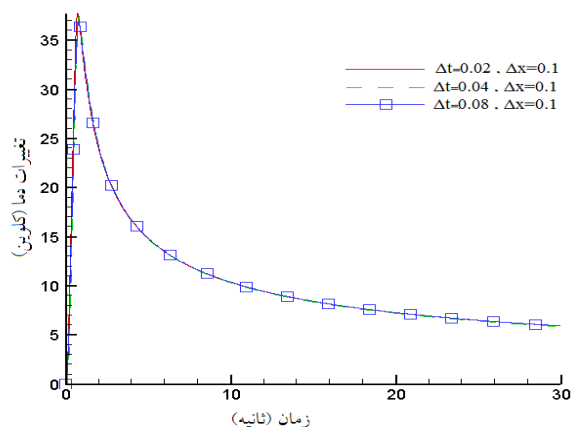
$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1}^k - T_{i-1}^k}{2\Delta x} \quad (6)$$

مدل انتقال حرارت غیرفوری‌ای فروپختی مشابه روش تقریب عددی به کار رفته توسط قاضی‌زاده و همکارانش [۲۲] به صورت زیر گسسته‌سازی می‌شود [۲۳].

زمانی، ثانیه $\Delta t = 0.04$ ، و گام مکانی، میلی‌متر $\Delta x = 0.1$ دیگر تغییراتی در توزیع دمای جسم حاصل نمی‌شود و با کوچک کردن گام زمانی تغییرات ثابت می‌ماند. بنابراین همانند مدل فروپختی، گام‌های زمانی و مکانی فوق جهت بدست آوردن نتایج عددی در مدل فروپختی در نظر گرفته شده‌اند.



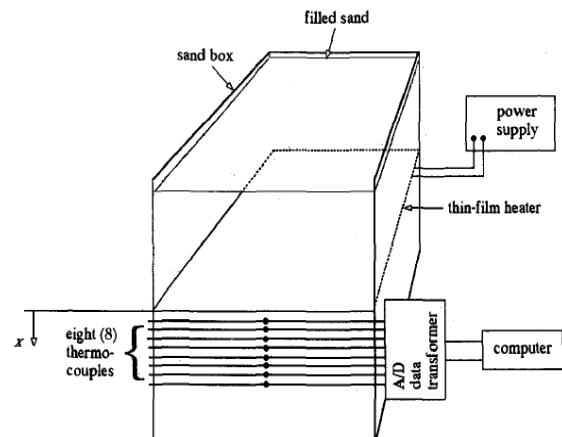
شکل ۲- توزیع دمای مدل کسری فروپختی برای گام‌های زمانی مختلف



شکل ۳- توزیع دمای مدل کسری فروپختی برای گام‌های زمانی مختلف

۲-۴- نتایج مدل فروپختی

شرایط فروپختی برای مواد مختلف به شرایطی گفته می‌شود که مقدار مرتبه کسری $2 > \gamma = 1 + \alpha > 1$ باشد. شکل ۴ نتایج مدل تاخیر زمان منفرد کسری فروپختی را برای پالس گرمایی 0.56 ثانیه نشان می‌دهد. نتایج این شکل با استفاده از روش سعی و خطا بدست آمده که بهترین



شکل ۱- شماتیک آزمایش

۴- نتایج و بحث

پس از آنکه اثبات شد در مکان‌های نزدیک به منبع گرمایی فیزیک حاکم بر انتقال حرارت با پالس کوتاه از نوع غیرفوری‌ای می‌باشد [۸]. همچنین مدل‌های بر پایه حساب کسری توانایی خود را در مدل کردن شرایط غیرعادی نشان داده‌اند [۱۵]. بنابراین هدف این مطالعه، بررسی هدایت حرارتی در شن با استفاده از مدل تاخیر زمانی منفرد کسری به منظور پاسخ بهتر نسبت به مدل تاخیر زمان دوگانه می‌باشد.

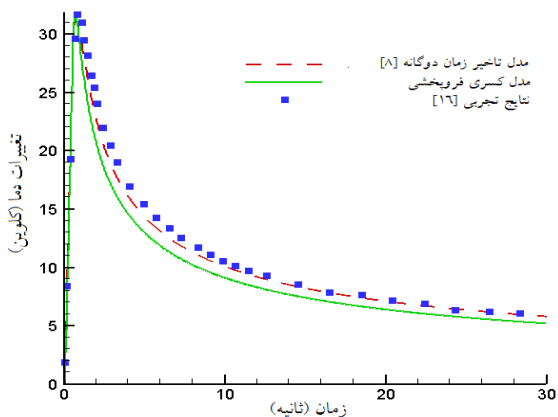
۴-۱- استقلال شبکه

به منظور بدست آوردن توزیع دما در جسم با استفاده از روش عددی، می‌بایست مقدار گام زمانی و گام مکانی به طور صحیح و مناسب انتخاب شود، شکل ۲ توزیع دمای جسم برای گام زمانی و گام مکانی مختلف را برای مدل تاخیر زمان منفرد کسری فروپختی نشان می‌دهد. همانگونه که مشاهده می‌شود به ازای مقدار گام زمانی، ثانیه $\Delta t = 0.04$ و گام مکانی، میلی‌متر $\Delta x = 0.1$ ، دیگر تغییراتی در توزیع دمای جسم حاصل نمی‌شود. بنابراین گام‌های زمانی و مکانی بدست آمده جهت بررسی در نظر گرفته می‌شوند.

همچنین برای مدل کسری فروپختی، توزیع دمای جسم برای گام زمانی و گام مکانی مختلف در شکل ۳ ارائه شده‌است. همانگونه که مشاهده می‌شود به ازای مقدار گام

فروپخشی نشان می‌دهد. پس از سعی و خطای بسیار مقادیر $\alpha = 0.98$ و $\tau = 0.005$ برای پالس گرمایی 0.56 ثانیه که نزدیک‌ترین پاسخ به داده‌های تجربی را داشت، بدست آمده‌اند. نتایج نشان می‌دهند که مدل فروپخشی به خوبی توانسته توزیع دما را در لحظات اولیه پیش‌بینی کند، اما مقادیر به مراتب پایین‌تری را نسبت به داده‌های تجربی برای زمان‌های بعدی پیش‌بینی می‌کند.

بنابراین مدل کسری فروپخشی نیز قادر به مدل‌سازی انتقال حرارت هدایتی در جعبه حاوی شن نمی‌باشد. با مشاهده نمودارهای بدست‌آمده از مدل‌های حساب کسری به نظر می‌رسد که مدل فروپخشی برای زمان‌های اولیه پاسخ بهتری نسبت به مدل فروپخشی را نشان می‌دهد. اما برای زمان‌های بعدی پاسخ مدل فروپخشی به مراتب بهتر از مدل فروپخشی می‌باشد. به نظر می‌رسد با گذشت زمان مقدار مرتبه کسری در جسم عوض می‌شود. در واقع فیزیک انتقال حرارت نسبت به زمان متغیر بوده، از فروپخشی به فروپخشی تبدیل می‌شود. بنابراین شاید بتوان انتقال حرارت در شن را با استفاده از مدل‌های حساب کسری مرتبه متغیر بهتر بیان کرد.

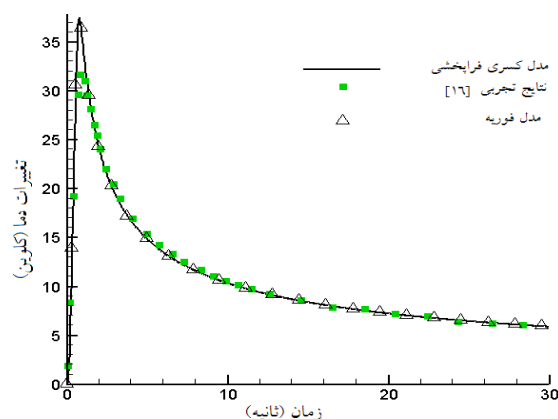


شکل ۵- توزیع دمای مدل کسری فروپخشی برای پالس گرمایی برابر 0.56 ثانیه

۴-۴- مدل تاخیر زمان منفرد کسری با مرتبه متغیر

با توجه به آنکه در شرایط فروپخشی برای لحظات اولیه شارگرمایی پاسخ بهتری نسبت به شرایط فروپخشی دارد، برای زمان‌های اولیه از مدل فروپخشی و برای زمان‌های

پاسخ گرمایی را برای مدل تاخیر زمان منفرد کسری فروپخشی نشان می‌دهد. مقادیر مرتبه کسری و تاخیر زمانی بدست آمده برای پالس گرمایی 0.56 ثانیه برابر $\alpha = 0.3$ و $\tau = 0.005$ می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که در بهترین حالت ممکن نتایج با نتایج بدست آمده از مدل فوریه برابر می‌باشد و اینکه توزیع دمای بدست آمده با استفاده از مدل کسری فروپخشی مقادیری به مراتب بالاتر از داده‌های تجربی را نشان می‌دهد. این موضوع نشان از عدم موفقیت این مدل در پیش‌بینی توزیع دما در شن می‌باشد. بنابراین به نظر رسید که ممکن است فیزیک حاکم بر مساله فروپخشی نباشد. به همین منظور از مدل کسری فروپخشی جهت بررسی انتقال حرارت هدایتی در جعبه حاوی شن استفاده شده‌است.



شکل ۴- توزیع دمای مدل کسری فروپخشی برای پالس گرمایی برابر 0.56 ثانیه

۴-۳- نتایج مدل فروپخشی

شرایط فروپخشی برای مواد مختلف شرایطی می‌باشد که مقدار مرتبه کسری $0 < \alpha = \gamma < 1$ باشد. جهت بررسی انتقال حرارت در شن با استفاده از حساب کسری برای شرایط فروپخشی از مدل غیرفوریه کسری برای مدل کردن هدایت حرارتی در شن استفاده شده‌است.

شکل ۵ نتایج مدل تاخیر زمان منفرد کسری فروپخشی برای پالس گرمایی 0.56 ثانیه را نشان می‌دهد. با استفاده از روش سعی و خطا نتایج شکل بدست آمده‌است که پاسخ گرمایی خوبی را برای مدل تاخیر زمان منفرد کسری

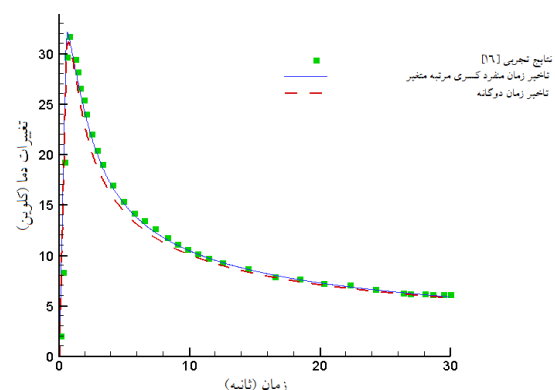
۵- نتیجه گیری

در این مطالعه انتقال حرارت غیرفوری در شن ریخته‌گری با استفاده از مدل‌های بر پایه حساب کسری مورد بررسی قرار گرفت. مساله با استفاده از یک روش ضمنی گسسته‌سازی شده‌است و خواص ترموفیزیکی شن کاملاً ثابت در نظر گرفته شده‌است. نتایج با استفاده از مدل‌های بر پایه حساب کسری با نتایج حاصل از آزمایش مورد مقایسه قرار گرفته شدند.

نتایج نشان دادند که توزیع دمای بدست آمده با استفاده از مدل کسری فرایخشی مقدار به مراتب بالاتری را از نتایج تجربی پیش‌بینی می‌کند که نشان از عدم موفقیت این مدل در پیش‌بینی توزیع دما در شن بود. همچنین نتایج نشان می‌دهد که مدل کسری فرایخشی نیز قادر به مدل کردن انتقال حرارت در شن نمی‌باشد و اینکه مدل فرایخشی برای زمان‌های اولیه پاسخ بهتری نسبت به مدل فرایخشی را نشان می‌دهد. اما برای زمان‌های بعدی پاسخ مدل فرایخشی به مراتب بهتر از مدل فرایخشی می‌باشد. بنابراین به نظر می‌رسد که با گذشت زمان مقدار مرتبه کسری در جسم عوض می‌شود. با استفاده از ترکیب دو مدل به گونه‌ای که در لحظات اولیه مدل فرایخشی حاکم بر مساله و در لحظات بعدی مدل فرایخشی حاکم بر مساله باشد توزیع دما در شن به خوبی بدست آمد که نشان‌دهنده موفقیت نگرش تأخیر زمانی کسری در توصیف رفتارهای غیرفوری‌ای انتقال حرارت در مواد مختلف نسبت به مدل DPL می‌باشد.

بعدی از مدل فرایخشی استفاده شده‌است. با استفاده از روش سعی و خطا مقادیر $\alpha = 0/977$ و $\tau = 0/005$ برای شرایط فرایخشی در زمان کمتر از $0/84$ ثانیه و برای شرایط فرایخشی $\alpha = 0/2$ و $\tau = 0/005$ در زمان کمتر از ۳ ثانیه و برای زمان‌های بعد مقادیر $\alpha = 0/36$ و $\tau = 0/005$ بدست آمد که نزدیک‌ترین پاسخ به داده‌های تجربی را دارا بود. نتایج حاصل از این روش در شکل ۶ نشان داده شده‌است که به خوبی توانسته انتقال حرارت در شن را مدل کند.

نتیجه مهمی که از این مبحث گرفته می‌شود را بدین صورت می‌توان بیان کرد که به جز در لحظات اولیه در بقیه لحظات فیزیک حاکم بر مساله به صورت فرایخشی می‌باشد. همچنین نتایج تحقیق حاضر، توزیع بهتری را برای دما نسبت به نتایج مدل DPL برای مساله مورد بررسی بدست آورده‌است.



شکل ۶- توزیع دمای مدل کسری مرتبه متغیر برای پالس گرمایی برابر $0/56$ ثانیه

۶- مراجع

- [1] Wang, L., Fan, J. (2011), "Modeling Bio Heat Transport at Macro Scale", J. Heat Transfer, Vol. 133, pp 1-10.
- [2] Peshkov, V. (1944), "Second Sound in Helium II", J. Phys. USSR, Vol. 8, pp. 381-389.
- [3] Luikov, A.V. (1965), "Application of Irreversible Process to Investigation of Heat and Mass Transfer", J. Eng. Phys., Vol. 9, pp. 139-152.
- [4] Luikov, A.V. (1966), "Application of Irreversible Thermodynamics Methods to Investigation of Heat and Mass Transfer", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 9, pp. 287-304.
- [5] Kaminski, W. (1990), "Hyperbolic Heat Conduction Equation for Materials with a Non-Homogeneous Inner Structure", ASME J. Heat Transfer, Vol. 112, pp. 555-560.
- [6] Mitra, K., Kumar, A., Vedavarz, A., Moallemi, M.K. (1995), "Experimental Evidence of Hyperbolic Heat conduction in Processed Meat", J. Heat Transfer, Trans. ASME, Vol. 117, pp. 568-573.

- [7] Roetzel, W., Putra N., Das S.K. (2003), "Experiment and Analysis for Non-Fourier Conduction in Materials with Non-Homogeneous Inner Structure", *Int. J. Ther. Scien.*, Vol. 42, pp. 541-552.
- [8] Xingang, L., Yunsheng, X., Zengyuan, G. (1996), "Theoretical Analysis of Transient Heat Conduction in sand", *Acta Mechanical Sinica*, Vol. 39, pp. 855-863.
- [9] Antaki, P.J. (2005), "New Interpretation of Non-Fourier Heat Conduction in Processed Meat", *J. Heat Transfer, Trans. ASME*, Vol. 192, pp. 406-421.
- [10] Agwu Nnanna, A.G., Haji-Sheikh, A., Harris, K.T. (2004), "Experimental Study of Local Thermal Non-Equilibrium Phenomena during Phase Change in Porous Media", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 47, pp. 4365-4375.
- [11] Agwu Nnanna, A.G., Haji-Sheikh, A., Harris, K.T. (2005), "Experimental Study of Non-Fourier Thermal Response in Porous Media", *J. Porous Media*, Vol. 8, pp. 31-44.
- [12] Battaglia, J.L., Le Lay, L., Christophe Batsale, J., Oustaloup, A., Cois, O. (2000), "Utilisation De Modèles d'Identification Non Entiers Pour La Résolution De Problèmes Inverses en Conduction", *Int. J. Therm. Sci.*, Vol. 39, pp. 374-389.
- [13] Battaglia, J.L., Cois, O., Puigsegur, L., Oustaloup, A. (2001), "Solving an Inverse Heat Conduction Problem Using a Non-Integer Identified Model", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 44, pp. 2671-2680.
- [14] Murio, D.A. (2008), "Time fractional IHCP with Caputo Fractional Derivatives", *Comput. Math. Appl.*, Vol. 56, pp. 2371-2381.
- [15] Ghazizadeh, H.R., Azimi, A., Maerefat, M. (2012), "An Inverse Problem to Estimate Relaxation Parameter and Order of Fractionality in Fractional Single-Phase-Lag Heat Equation", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 55, pp. 2095-2101.
- [16] Yunsheng, X., Yingkui, G., Zengyuan, G. (1996), "Experimental Research on Transient Heat Transfer in sand", *Acta mechanical sinica*, Vol. 12, pp. 39-46.
- [17] Lin, Y. and Xu, C. (2007), "Finite Difference/spectral Approximations for the Time-Fractional Diffusion Equation", *Journal of Computational Physics*, Vol. 225: pp. 1533-1552.
- [18] Lynch, V. E., Carreras, B. A., del-Castillo-Negrete, D., Ferreira-Mejias, K. M. and Hicks, H. R. Numerical "Methods for the Solution of Partial Differential Equations of Fractional Order", *J. Comput. Phys.*, Vol. 225: pp. 1533-1552.
- [19] Odibat, Z.M., Shawagfeh, N.T. (2007), "Generalized Taylor's Formula", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 186, pp. 286-293.
- [20] Podlubny, I. (1999), "Fractional Differential Equations", Academic Press, New York.
- [21] Green, A.E., Naghdi, P.M. (1993), "Thermoelasticity without Energy Dissipation", *J. Elasticity*, Vol. 31, pp. 189-208.
- [22] Ghazizadeh, H.R., Maerefat, M., Azimi, A., (2010), "Explicit and Implicit Finite Difference Schemes for Fractional Cattaneo Equation", *J. Comput. Phys.*, Vol. 229, pp. 7042-7057.

[۲۳] غلامی، ش.، (۱۳۹۲)، حل عددی معادله هدایت حرارتی غیرفوریه کسری در مواد کامپوزیت. پایان‌نامه کارشناسی ارشد دانشگاه شهید چمران اهواز.