

مدل‌سازی تحلیلی و عددی ضریب شدت تنش در تیرهای دارای ترک با مقطع I شکل

جواد رزاقی^۱، مرتضی خممامی‌ابدی^۲، علی‌علی جانی^{۳*}

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۰۹/۰۵	در این مقاله، با استفاده از دو رهیافت تحلیلی و عددی، ضریب شدت تنش برای مود اول (بازشدگی) در تیرهای دارای ترک با مقطع I شکل تحت بار محوری بررسی می‌شود. در مقاطع دارای ترک، به دلیل تغییر مکان مرکز هندسی و یا به عبارتی دیگر عدم هم‌راستایی نیروی محوری، یک کوپل خمشی در مقطع ایجاد می‌شود. در رهیافت تحلیلی، یک مدل ریاضی برای ضریب شدت تنش به کمک تئوری نرخ آزادسازی انرژی در ناحیه‌ی ترک پیشنهاد می‌گردد. این مدل با در نظر گرفتن گشتاور خمشی این کوپل حاصل می‌شود. این مدل در دو وضعیت برحسب مکان ترک شامل قرارگیری ترک در قسمتی از بال و ترک در بال و قسمتی از جان ارائه می‌شود. در رهیافت عددی، مشخصات هندسی و مادی و نوع بارگذاری تیر دارای ترک با مقطع I شکل به کمک نرم‌افزار آباکوس مدل و سپس مقادیر ضریب شدت تنش در مود اول استخراج می‌گردد. در حل عددی مسئله‌ی حاضر، از دو روش کانتور انتگرال و اجزای محدود توسعه یافته برای مدل‌سازی ترک استفاده می‌شود. با مقایسه‌ی جواب‌های دو رهیافت عددی و تحلیلی تطابقی مناسب بین نتایج مشاهده و صحت معادلات پیشنهادی تأیید می‌گردد.
پذیرش مقاله: ۱۳۹۷/۰۳/۰۹	
واژگان کلیدی: ضریب شدت تنش، تیرهای دارای ترک، مقطع I شکل، نرخ آزادسازی انرژی، رهیافت تحلیلی، نرم‌افزار آباکوس.	

۱- مقدمه

ایجاد و رشد ترک یکی از عوامل اصلی شکست و خسارات جبران‌ناپذیر در بسیاری از سازه‌ها نظیر پل‌ها، بدنه‌ی هواپیماها، کشتی‌ها و ساختمان‌ها می‌باشد. از این رو، ارائه‌ی مدل‌های تحلیلی و عددی مناسب برای پیش‌بینی رفتار سازه‌های دارای ترک، می‌تواند شناخت مناسبی از این پدیده ارائه کرده و عوامل کاهش آسیب‌ها را پیشنهاد نماید. وجود ترک در سازه، سبب ایجاد "تمرکز تنش" در اطراف نوک ترک می‌شود. تمرکز تنش یکی از پارامترهای تأثیرگذار در مدل‌سازی ترک و رشد آن محسوب می‌گردد؛ که مقدار آن با "ضریب شدت تنش" معرفی می‌شود. این کمیت که به عنوان مشخصه‌ی عددی تمرکز تنش در تحلیل‌ها به کار گرفته می‌شود؛ اهمیت و نقش ویژه‌ای در

تحلیل‌های استاتیکی و دینامیکی دارد؛ که سبب شده است تعداد زیادی از محققان به‌طور خاص آن را مورد توجه و بررسی قرار دهند. تاکنون روش‌های متنوعی برای مدل‌سازی ترک و استخراج ضرایب شدت تنش ارائه شده است که برخی از آنها با توجه به شرایط مرزی و هندسی مسئله از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند [۱]، در اینجا تعدادی از مهم‌ترین روش‌های مدل‌سازی ترک، معرفی و بررسی می‌شوند. یکی از اولین روش‌های مدل‌سازی ترک در سازه‌ها، مدل فنر خطی و پیچشی^۴ است؛ که در سال ۱۹۵۴ توسط ایروین و کایس [۲] معرفی و در سال ۱۹۵۷ توسط ایروین [۳] تکمیل شد. از دیگر روش‌های مهم مدل‌سازی ترک، مدل ترک پخشی^۵ [۴]، مدل المان‌های غنی‌ساز^۶ [۵] و مدل مقطع کاهش‌یافته^۷ [۶] می‌باشد. مدل مقطع کاهش-

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: alijani@iaubanz.ac.ir

۱. استادیار، دانشکده فنی، دانشگاه گیلان

۲. دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده فنی، دانشگاه گیلان

۳. استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد بندر انزلی، بندر

انزلی، ایران

⁴ Line and Rotational Spring

⁵ Smeared Crack Model

⁶ Singular Elements-SEM

⁷ Reduced Section

رابطه‌ای دقیق برای محاسبه‌ی ضرایب شدت تنش در تیرهای دارای ترک با مقطع مستطیلی و دایره‌ای ارائه کردند. در راستای کاربردهای ضریب شدت تنش، کیان و همکاران [۱۸] در سال ۱۹۹۰ ماتریس سختی یک المان دارای ترک را به کمک انتگرال‌گیری از ضرایب شدت تنش به دست آوردند. آنها با این روش مدل اجزای محدود تیر ترک‌دار را استخراج نموده، و شبیه‌سازی ترک را با اعمال این مدل در یک تیر یک سر گیردار انجام دادند. در ادامه با توسعه‌ی روابط کاینز و هرمان و با استفاده از شبیه‌سازی ترک با مدل فنر خطی و پیچشی، ضرایب شدت تنش برای مقاطع T شکل توسط ویولا و رایس [۱۹] در سال ۲۰۰۶ ارائه شد. دامغانی نوری و همکاران [۲۰]، ضریب شدت تنش دینامیکی در دو مود اول و دوم شکست را برای یک ورق الاستیک ترک‌دار تعیین نمودند. همچنین آنها در سال ۲۰۱۵ اثرات زمان فراز بار ضربه‌ای را روی ضریب شدت تنش دینامیکی ترک دو بعدی نیمه بینهایت بررسی کردند [۲۱]. در همان سال با استفاده از نرخ آزادسازی انرژی، یک رابطه‌ی صریح برای تعیین ضرایب شدت تنش در صفحات دارای ترک به شکل مایل (V شکل) توسط دوان و همکاران [۲۲] استخراج شد.

در این مقاله، روابطی جدید برای تعیین ضریب شدت تنش در تیرهای دارای ترک با مقطع I شکل تحت بارگذاری محوری، استخراج می‌شود. این روابط بر مبنای نرخ انرژی آزاد شده بر اثر بازشدگی ترک و با توجه به مشخصات هندسی و مادی تیر پایه‌ریزی می‌گردد؛ که در آنها، علاوه بر اثرات نیروی محوری، اثرات گشتاور خمشی ناشی از عدم هم‌راستایی نیروی محوری به‌طور صریح در معادلات پایه در نظر گرفته می‌شود. در این مطالعه ضرایب شدت تنش در دو حالت قرارگیری ترک در بال و ترک در جان تیر به کمک دو رهیافت تحلیلی و عددی استخراج شده و نتایج با یکدیگر مقایسه می‌شوند. مدل عددی از تیر دارای ترک توسط نرم افزار آباکوس شبیه‌سازی می‌شود. مقایسه‌ی نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که معادلات تحلیلی ارائه شده با دقت قابل قبول می‌تواند مقادیر ضریب شدت تنش در مود اول تیر دارای ترک با مقطع I شکل را تعیین نماید. همچنین نتایج بررسی‌ها بیان می‌کند؛ یک افزایش تصاعدی در ضریب شدت تنش هنگامی مشاهده می‌شود که عمق ترک

یافته علاوه بر آنکه مدلی ساده با کارایی بالا محسوب می‌شود؛ از دقت مناسبی برای مدل‌سازی ترک برخوردار می‌باشد. در ادامه با ارائه‌ی مدل المان‌های غنی‌شده^۱ در سال ۱۹۹۹ توسط موئس و همکاران [۷] اساسی نو در مدل‌سازی ترک ایجاد شد. توسعه‌ی مدل المان‌های غنی‌شده منجر به ابداع روش اجزای محدود توسعه یافته^۲ توسط بلتچکو و همکاران [۸] در همان سال گردید. این روش قادر به شبیه‌سازی ترک با روشی بسیار دقیق بر پایه‌ی غنی‌سازی المان‌های ترک‌خورده و المان حاوی نوک ترک و همچنین نمایش رشد ترک می‌باشد. یک بحث جامع روی اصول و مبانی این روش توسط خویی [۹] در سال ۲۰۱۵ ارائه شد. در جدیدترین تحقیقات انجام شده در راستای به کارگیری، ارتقاء و اصلاح روش‌های مدل‌سازی پیشین ترک، یک بهبود اساسی روی روش اجزای محدود توسعه یافته در سال ۲۰۱۷ توسط سورندران و همکاران [۱۰] انجام شد. همچنین مستان آبادی و همکاران [۱۱] در سال ۲۰۱۶ با استفاده از مدل فنر پیچشی و استخراج معادلات حاکم در دو فرم قوی و ضعیف، رفتار استاتیکی تیر اویلر - برنولی دارای ترک را بررسی نمودند. در ادامه، رزاقی و همکاران [۱۲] و علی‌جانی و همکاران [۱۳] در سال ۲۰۱۸، تکنیک‌های جدیدی بر پایه‌ی روش اجزای محدود، به ترتیب برای مدل‌سازی تیرهای بتن - آرمه دارای ترک و تیرهای دارای ترک روی بستر الاستیک ارائه نمودند. همچنین یک مطالعه‌ی کاربردی روی تحلیل رشد ترک در تیرهای با مقطع I شکل توسط تریامیلوملرد و لنواری [۱۴] انجام شد. یکی از اساسی‌ترین فاکتورها در مدل‌سازی ترک‌خوردگی، تعیین تمرکز تنش در اطراف نوک ترک می‌باشد؛ که مشخصه‌ی مقداری آن در تحلیل‌ها با تعیین ضریب شدت تنش محاسبه می‌شود. تعیین این کمیت همواره جزء اهداف اصلی محققان در تحلیل و شبیه‌سازی ناپیوستگی‌ها به شمار می‌آید. در این راستا، یک مطالعه‌ی جامع روی کاربرد ضرایب شدت تنش و نحوه‌ی استخراج این ضرایب در تیرها و صفحات دارای ترک در شرایط مرزی و هندسی متنوع در سال ۱۹۷۳ توسط سیح [۱۵]، مطرح شد؛ که خود مبنای مطالعات بعدی توسط تدا و همکاران [۱۶] را فراهم نمود. در ادامه کاینز و هرمان [۱۷] در سال ۱۹۸۶ با بررسی نتایج سختی تیرهای دارای ترک و نرخ آزادسازی انرژی،

² Extended Finite Element Method-X-FEM¹ Enriched Elements

همچنین L طول تیر، x_0 محل ترک، c عرض ترک در حالت اولیه و $c + \Delta c$ عرض ترک پس از بازشدگی در حالت ثانویه نام گذاری می‌گردد.

انرژی پتانسیل کل تیر (II)، به صورت مجموع انرژی کرنشی (W) و منفی کار نیروهای خارجی (V) مطابق رابطه‌ی (۲) استخراج می‌شود.

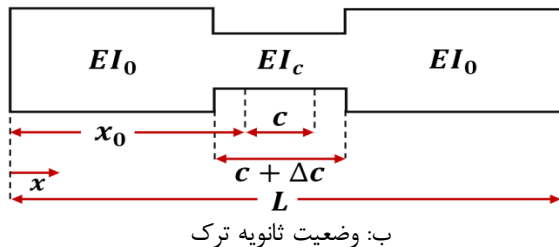
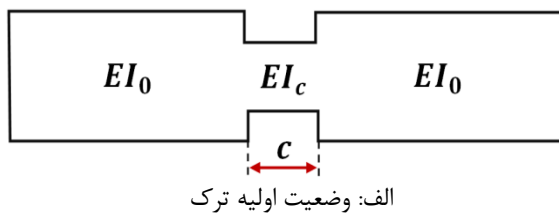
$$\Pi = W - V \quad (2)$$

که در آن

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI(x)} dx \quad (3)$$

$$V = \text{جابجایی} \times \text{بار خارجی} \quad (4)$$

و M ممان خمشی اعمالی بر مقطع می‌باشد.



شکل ۲: مدل مقطع کاهش یافته تیر دارای ترک

با استفاده از معادله‌ی (۳) و با ملاحظه‌ی شکل (۱)، انرژی کرنشی سازه قبل از بازشدگی ترک (W_c) و پس از بازشدگی ترک ($W_{c+\Delta c}$) به صورت روابط (۵) و (۶) تعریف می‌شود.

$$W_c = \frac{1}{2} \frac{M^2(L-c)}{EI_0} + \frac{1}{2} \frac{M^2(c)}{EI_c} \quad (5)$$

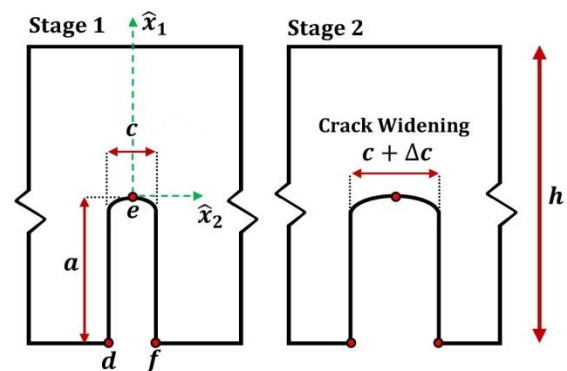
$$W_{c+\Delta c} = \frac{1}{2} \frac{M^2(L-c-\Delta c)}{EI_0} + \frac{1}{2} \frac{M^2(c+\Delta c)}{EI_c} \quad (6)$$

بر طبق تئوری کلاپیرون [۲۴]، انرژی ناشی از تغییر شکل جسمی تحت بار خارجی که در تعادل است، با نیمی از کار انجام شده توسط نیروهای خارجی برابر خواهد بود. برای بیان ساده‌تر این تئوری، فنری خطی تحت بار محوری مطابق با شکل (۳) در نظر گرفته می‌شود. با بررسی انرژی-های موجود در یک فنر خطی که تحت بار محوری قرار

از قسمت بال به سمت جان مقطع تیر افزایش یابد. چنانچه گشتاور ناشی از عدم هم‌راستایی محل اثر نیروهای محوری در نظر گرفته شود؛ مقادیر ضریب شدت تنش حاصل از رهیافت تحلیلی با مقادیر مستخرج از تحلیل عددی در نرم افزار آباکوس، تطابق مناسبی خواهند داشت.

۲- تحلیل ضریب شدت تنش بر پایه‌ی روش مقطع کاهش یافته

مدل مقطع کاهش یافته می‌تواند به عنوان یک مدل ساده و با دقت مناسب برای تعیین ضریب شدت تنش و مدل-سازی ترک استفاده شود. روابط حاکم بر این تحلیل برای اولین بار توسط کاینز و هرمان [۱۷] ارائه شده و توسط ویولا و رایس [۱۹] برای مقاطع T شکل توسعه یافت. این تحلیل بر اساس تغییر انرژی کرنشی سازه قبل از بازشدگی ترک (وضعیت اولیه) و پس از بازشدگی ترک (وضعیت ثانویه)، مطابق شکل (۱) انجام می‌گیرد. به کارگیری روش حاضر بسیاری از پیچیدگی‌های سایر روش‌ها را به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌دهد.



۲-۱- تعیین ضریب شدت تنش در تیر دارای ترک با مقطع مستطیلی

در این تحلیل برای مدل‌سازی ترک قبل و بعد از بازشدگی، گشتاور دوم سطح در طول تیر به ترتیب مطابق با شکل‌های (۲) و (۳) ارائه می‌شود. بر این اساس تغییرات مدول خمشی در طول تیر مطابق معادله‌ی (۱) تعریف می‌گردد؛

$$EI(x) = \begin{cases} EI_0 & , 0 \leq x < x_0 \\ EI_0 & , x_0 + c < x \leq L \\ EI_c & , x_0 < x \leq x_0 + c \end{cases} \quad (1)$$

که در آن EI_0 ، EI_c و $EI(x)$ به ترتیب مدول خمشی مقطع کامل (ترک نخورده)، مدول خمشی مقطع ناقص (ترک-خورده) و مدول خمشی متغیر در طول تیر تعریف می‌شود.

$$\Delta \Pi = \lim_{\Delta c \rightarrow 0} \frac{\frac{M^2 \Delta c}{2EI_0} - \frac{M^2 \Delta c}{2EI_c}}{b \Delta c} = \frac{M^2}{2bEI_0} - \frac{M^2}{2bEI_c} \quad (15)$$

که در آن b ، عرض تیر مقطع مستطیلی می‌باشد. نرخ آزادسازی انرژی ناشی از بازشدگی ترک (جابجایی دو وجه de و ef در خلاف جهت هم)، مطابق شکل (۱)، به صورت ذیل نوشته می‌شود.

$$\bar{G} = 2 \lim_{\Delta c \rightarrow 0} \frac{\Delta \Pi_c^B}{b \Delta c} = \frac{\frac{M^2 \Delta c}{2EI_0} - \frac{M^2 \Delta c}{2EI_c}}{b \Delta c} = \frac{M^2 (EI_c - EI_0)}{bEI_0EI_c} \quad (16)$$

نرخ آزادسازی انرژی با استفاده از رابطه‌ی اروین [۳] در دو وضعیت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای به ترتیب به صورت روابط (۱۷) و (۱۸) نوشته می‌شود.

$$\bar{G} = \frac{K_{IM}^2}{E} \quad (17)$$

$$\bar{G} = \frac{K_{IM}^2 (1 - \nu^2)}{E} \quad (18)$$

که در آن E مدول الاستیسیته، ν نسبت پواسون و K_{IM} ضریب شدت تنش تیر دارای ترک تحت ممان خمشی تعریف می‌شود.

با برابر قرار دادن روابط (۱۷) و (۱۸) و (۱۶)، در وضعیت تنش مسطح خواهیم داشت:

$$\frac{K_{IM}^2}{E} = \frac{M^2 [D]}{b} \quad (19)$$

که

$$[D] = \left[\frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI_c} \right] \quad (20)$$

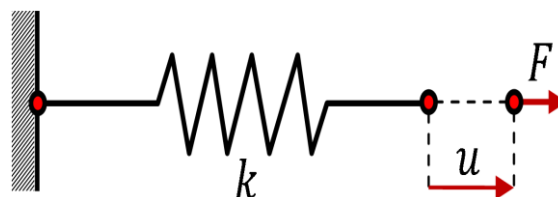
در نتیجه ضریب شدت تنش در مود اول (بازشدگی ترک) برای تیر با مقطع مستطیلی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$K_{IM} = M \sqrt{\frac{1}{b} \left(\frac{1}{I_c} - \frac{1}{I_0} \right)} \quad (21)$$

۲-۲- تعیین ضریب شدت تنش در تیر دارای ترک با مقطع T شکل

تعیین ضرایب شدت تنش در تیرهای دارای ترک با مقطع T شکل از آن رو حائز اهمیت است که به واسطه‌ی تغییر مقطع تیر در محل ترک، مرکز هندسی سطح مقطع تیر تغییر کرده؛ در نتیجه فاصله‌ی راستای دو نیروی محوری معادل که با متغیر (e) نمایش داده می‌شود، مطابق شکل

دارد، می‌توان بیانی ساده از تئوری کلاپیرون و توجیه این تئوری را ارائه نمود.



شکل ۳: مدل فنر خطی تحت اثر نیروی محوری

که در آن u جابجایی افقی، F نیروی خارجی و k ضریب سختی فنر می‌باشد.

در اینجا، انرژی کرنشی فنر و انرژی حاصل از کار خارجی به ترتیب به صورت روابط (۷) و (۸) به دست می‌آید.

$$W = \frac{1}{2} k u^2 \quad (7)$$

$$V = F u \quad (8)$$

در نتیجه انرژی پتانسیل کل فنر مطابق رابطه‌ی (۹) ارائه می‌شود.

$$\Pi = \frac{1}{2} k u^2 - F u \quad (9)$$

با توجه به آنکه داریم:

$$F = k u \quad (10)$$

بنابراین

$$V = k u^2 \quad (11)$$

با مقایسه‌ی W و V در روابط (۱۱) و (۷)، تئوری مذکور مطابق رابطه‌ی (۱۲) تأیید می‌شود.

$$W = \frac{1}{2} V \quad (12)$$

در نتیجه با جایگذاری رابطه‌ی (۱۲) در رابطه (۲) خواهیم داشت:

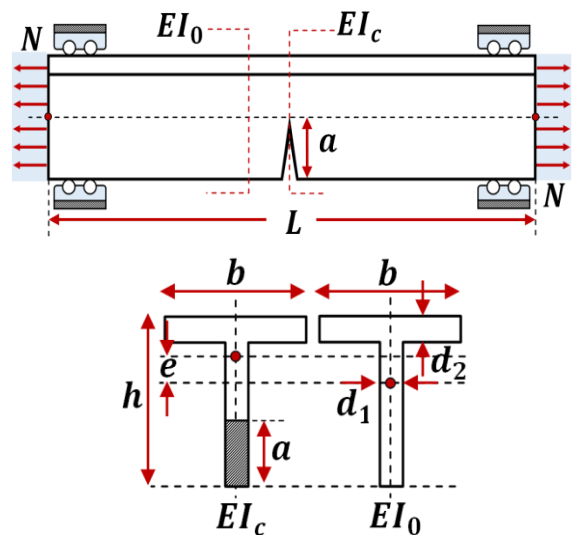
$$\Pi = W - 2W = -W \quad (13)$$

با استفاده از روابط (۵)، (۶) و (۱۳)، نمو انرژی پتانسیل سازه در دو وضعیت اولیه و ثانویه ترک به صورت معادله (۱۴) تعیین می‌شود.

$$\Delta \Pi = -\Delta W = -(W_{c+\Delta c} - W_c) = W_c - W_{c+\Delta c} \quad (14)$$

با جایگذاری فرم باز روابط (۵) و (۶) در رابطه‌ی (۱۴)، نمو انرژی پتانسیل سازه مطابق رابطه‌ی (۱۵) حاصل می‌شود.

(۴)، موجب ایجاد گشتاور در مقطع ترک‌دار می‌شود.



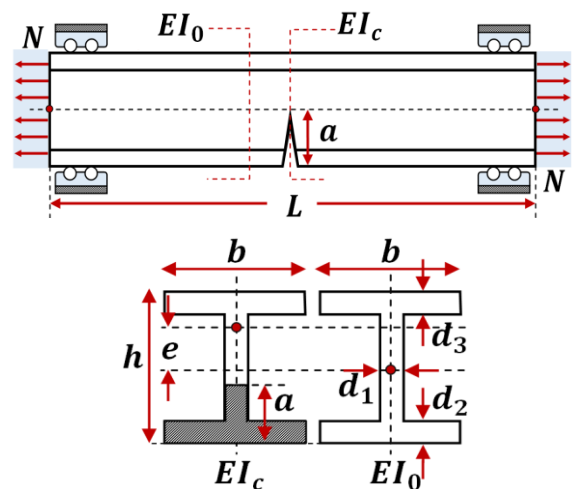
شکل ۴: تیر ترک‌دار با مقطع T شکل تحت بار محوری کششی اثرات ناشی از این گشتاور روی ضریب شدت تنش در مود اول این تیر مطابق رابطه‌ی (۲۲) ارائه می‌شود.

$$K_{I_N} = N \sqrt{\frac{1}{bA_0} \left(\frac{A_0}{A_c} - 1 \right)} + M \sqrt{\frac{1}{bI_0} \left(\frac{I_0}{I_c} - 1 \right)} \quad (22)$$

که در آن

$$M = N \times e \quad (23)$$

که در آن A_0 مساحت مقطع کامل، A_c مساحت مقطع دارای ترک، N نیروی محوری وارد بر سطح مقطع و e فاصله‌ی بین دو مرکز سطح کامل و ترک‌دار می‌باشد.



شکل ۵: تیر ترک‌دار با مقطع I شکل تحت بار محوری کششی

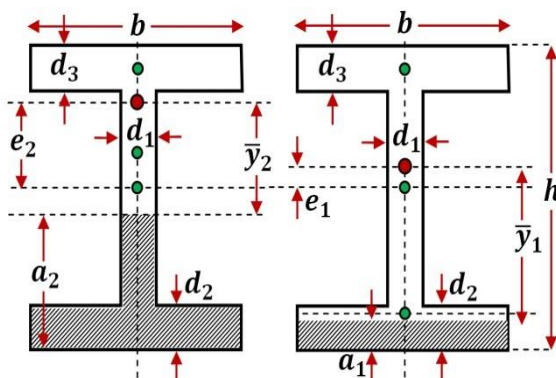
۳- تحلیل ضریب شدت تنش در تیر دارای ترک با مقطع I شکل

در اینجا، یک تیر با مقطع I شکل تحت بارگذاری محوری

مطابق شکل (۵) در نظر گرفته می‌شود. برای مدل‌سازی ترک و تعیین ضریب شدت تنش، تیر به دو قسمت با مدول خمشی متفاوت مطابق شکل (۲) شبیه‌سازی می‌شود.

استخراج ضریب شدت تنش، به واسطه‌ی محل قرارگیری ترک در بال یا جان تیر، دارای دو نوع فرمول‌بندی متمایز است. در حالت اول، عمق ترک در بال تیر و در حالت دوم، عمق ترک در جان مقطع تیر در نظر گرفته می‌شود.

مطابق شکل (۶)، اگر ترک در بال تحتانی یا فوقانی تیر متوقف شود؛ مقطع تیر ترک‌خورده به صورت I شکل و در صورتیکه ترک از بال تیر عبور کرده و به جان تیر برسد؛ مقطع تیر ترک‌خورده به صورت T شکل فرض می‌شود.



الف: ترک در بال تحتانی مقطع ب: ترک در جان مقطع

شکل ۶: مشخصات هندسی مقطع ترک‌دار تیر I شکل

۳-۱- حالت اول (ترک در بال تیر)

در صورتی که ترک در بال تحتانی و یا فوقانی تیر متوقف گردد؛ ضخامت بال d_2 یا d_3 در اثر عمق ترک a_1 اصلاح می‌شود. بنابراین ممان اینرسی در مقطع ترک‌دار به صورت مجموع ممان اینرسی‌های جان تیر، بال بدون ترک و قسمتی از بال ترک‌دار مطابق رابطه‌ی (۲۴) تعیین می‌شود.

$$I_{c1} = d_1 X_1 / 24 X_2 \quad (24)$$

که در آن متغیرهای هندسی X_1 و X_2 ، به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} X_1 = & 2a_1^4 d + 8a_1^3 b d_1 - 16a_1^3 d_1^2 + 8a_1^3 d_1 h \\ & - 12a_1^2 b d_1^2 + 48a_1^2 d_1^3 + 8a_1 d_1 h^3 + 4b^2 d_1^3 \\ & - a_1^4 - 36b d_1^4 + 32d_1^5 - 64d_1^4 h + 48d_1^3 h^2 \\ & - 14d_1^4 - 48a_1^2 d_1^2 h + 12a_1^2 d_1 h^2 + 10a_1 b d_1^3 \\ & - 48a_1 d_1^2 h^2 + 96a_1 d_1^3 h - 64a_1 d_1^4 - 6a_1^2 h^2 \\ & - 2a_1 b d_1^2 + 12a_1 b d_1 h - 12a_1 b h^2 + \\ & 29a_1 d_1^3 - 45a_1 d_1^2 h + 12a_1^2 b h - 21a_1^2 d_1^2 + \end{aligned}$$

۲-۳- حالت دوم (ترک در جان تیر)

در صورتی که ترک a_2 از بال تحتانی و یا فوقانی تیر عبور کرده و درجان تیر قرار گیرد، ممان اینرسی مقطع مؤثر به صورت یک مقطع T شکل محاسبه می‌شود. در اینجا به دلیل آنکه کل ضخامت بال و بخشی از جان به واسطه ترک از مقطع حذف شده است، ممان اینرسی مقطع ترک‌دار به صورت مجموع ممان اینرسی بال بدون ترک فوقانی و ارتفاع باقیمانده از جان محاسبه می‌شود. که با فرض $d_1 = d_2 = d_3$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$I_{c2} = -d_1 X_3 / 12 X_4 \quad (32)$$

و در آن متغیرهای هندسی X_3 و X_4 به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} X_3 = & +6d_1^2 h^2 - 4d_1 h^3 + h^4 + a_2^4 \\ & +12a_2 b d_1 h - 12 a_2 b h^2 + 4 a_2 d_1^3 \\ & -12 a_2 d_1^2 h + 12 a_2 d_1 h^2 - 4 a_2 h^3 \\ & -12 a_2^2 d_1 h + 6 a_2^2 h^2 - 4 a_2 b d_1^2 \\ & -6 b d_1 h^2 + 4 b h^3 + d_1^4 - 4 d_1^3 h \\ & -6 a_2^2 b d_1 + 12 a_2^2 b h + 6 a_2^2 d_1^2 \\ & +4 b d_1^2 h + b^2 d_1^2 - 2 b d_1^3 \\ & -4 a_2^3 b + 4 a_2^3 d_1 - 4 a_2^3 h \end{aligned} \quad (33)$$

$$X_4 = -b - h + a_2 + d_1 \quad (34)$$

با ثابت ماندن I_0 مطابق رابطه (۲۷)، مشخصه عدم هم‌راستایی (e_2) در این حالت به صورت زیر به دست می‌آید.

$$e_2 = \left| \bar{y}_2 + a_2 - \frac{h}{2} \right| = \left| \frac{Y_3}{2(Y_4)} \right| \quad (35)$$

که در آن \bar{y}_2 ، فاصله‌ی مرکز سطح مقطع ترک‌خورده تا محل ترک در جان تیر و متغیرهای هندسی Y_3 و Y_4 به فرم زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} Y_3 = & 3a_2^2 - 4a_2 b + 4a_2 d_1 - 3a_2 h \\ & -bd_1 + bh + d_1^2 - d_1 h \end{aligned} \quad (36)$$

$$Y_4 = -b - h + a_2 + d_1 \quad (37)$$

با جایگذاری روابط (۲۷)، (۳۲) و (۳۵) در روابط (۲۲) و (۲۳)، ضریب شدت تنش به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} K_{IN2} = & \left(N \sqrt{\frac{1}{bA_0} \left(\frac{A_0}{A_{c2}} - 1 \right)} \right) \\ & + \left((N \times e_2) \times \sqrt{\frac{1}{bI_0} \left(\frac{I_0}{I_{c2}} - 1 \right)} \right) \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & 21 a_1^2 d_1 h + 24 a_1 d_1 h^2 + 12 b d_1 h^2 + 27 d_1^3 h \\ & + 2 d_1 h^4 - 3 a_1^3 b - 18 d_1^2 h^2 - 4 a_1 h^3 + 7 a_1^3 d_1 \\ & 3 a_1^3 h - 9 a_1^2 b d_1 + 4 d_1 h^3 + 14 b d_1^3 \\ & - 24 b d_1^2 h - 16 d_1^2 h^3 + 58 b d_1^3 h \\ & - 36 b d_1^2 h^2 + 8 b d_1 h^3 \end{aligned} \quad (25)$$

$$X_2 = a_1 d_1 + b d_1 - 2 d_1^2 + d_1 h - \frac{a_1}{2} + \frac{d_1}{2} \quad (26)$$

همچنین ممان اینرسی در مقطع کامل (ترک‌نخورده) به صورت رابطه‌ی (۲۷) ارائه می‌شود.

$$\begin{aligned} I_0 = & \frac{d_1}{12} (8 b d_1^2 - 12 b d_1 h + 6 b h^2 - 8 d_1^3 \\ & + 12 d_1^2 h - 6 d_1 h^2 + h^3) \end{aligned} \quad (27)$$

که در آن b عرض بال فوقانی و تحتانی، h ارتفاع کل تیر، d_1 ضخامت جان تیر، d_2 ضخامت بال تحتانی و d_3 ضخامت بال فوقانی تیر می‌باشد. در اینجا به منظور ساده‌سازی روابط، مقادیر $d_1 = d_2 = d_3$ فرض شده است. در حالتی که ترک در بال تیر I شکل قرار دارد، فاصله‌ی راستای دو نیروی محوری معادل که به سطح مقطع بدون ترک و ترک‌دار وارد می‌شود، مطابق رابطه‌ی (۲۸) به دست می‌آید.

$$e_1 = \left| \bar{y}_1 + a_1 - \frac{h}{2} \right| = \left| \frac{Y_1}{2(Y_2)} \right| \quad (28)$$

که در آن \bar{y}_1 ، فاصله‌ی مرکز سطح مقطع ترک‌خورده تا محل ترک در بال تیر و متغیرهای هندسی Y_1 و Y_2 به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$\begin{aligned} Y_1 = & 6a_1^2 d_1 + 8a_1 b d_1 - 12a_1 d_1^2 \\ & + 6a_1 d_1 h + 2b d_1^2 - 2b d_1 h - 3a_1^2 \\ & + 4a_1 d_1 - a_1 h - d_1^2 + d_1 h \end{aligned} \quad (29)$$

و

$$Y_2 = 2a_1 d_1 + 2b d_1 - 4d_1^2 + 2d_1 h - a_1 + d_1 \quad (30)$$

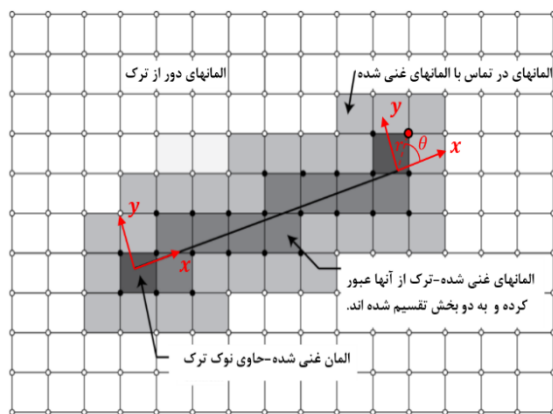
در نتیجه با جایگذاری روابط (۲۴)، (۲۷) و (۲۸) در روابط (۲۲) و (۲۳)، ضریب شدت تنش در حالت اول به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} K_{IN1} = & \left(N \times \sqrt{\frac{1}{bA_0} \left(\frac{A_0}{A_{c1}} - 1 \right)} \right) \\ & + \left((N \times e_1) \times \sqrt{\frac{1}{bI_0} \left(\frac{I_0}{I_{c1}} - 1 \right)} \right) \end{aligned} \quad (31)$$

مقدار مشخص همگرا می‌گردد.

۴-۲- مدل سازی ترک و استخراج ضریب شدت تنش با روش اجزای محدود توسعه یافته

در این مدل سازی یک شبکه‌ی المانی پیرامون نوک ترک ایجاد شده، سپس المان‌های درون این شبکه در مقایسه با سایر المان‌ها، با ابعادی کوچک‌تر مش بندی می‌شوند. در این مدل سازی، درجات آزادی در نقاط گره‌ای هر المان اصلاح یا به اصطلاح غنی سازی می‌شوند. مطابق شکل (۸) غنی سازی المان‌ها به ۴ دسته تقسیم بندی می‌گردد: دسته- ۱ اول المان‌های دور از ترک که هیچ کدام از گره‌های آن نیاز به غنی سازی ندارند. دسته‌ی دوم المان‌ها، در تماس با المان‌های غنی شده‌اند؛ که حداقل یک و حداکثر سه گره آنها غنی سازی می‌شوند. دسته‌ی سوم المان‌هایی هستند که ترک از آنها عبور می‌کند. غنی سازی تمامی گره‌های این المان‌ها با استفاده از تابع غنی ساز هویساید (H) انجام می‌شود؛ و دسته‌ی چهارم، المان‌هایی هستند که نوک ترک در آنها قرار دارند و غنی سازی این المان‌ها با معرفی تابع غنی- ساز (φ_α) ، انجام می‌شود.



شکل ۸: المان‌های غنی شده با روش اجزای محدود توسعه یافته

توابع غنی ساز هویساید و نوک ترک، به ترتیب مطابق روابط (۳۹) و (۴۰) ارائه می‌شود.

$$H = \begin{cases} +1 & y \geq 0 \\ -1 & y < 0 \end{cases} \quad (39)$$

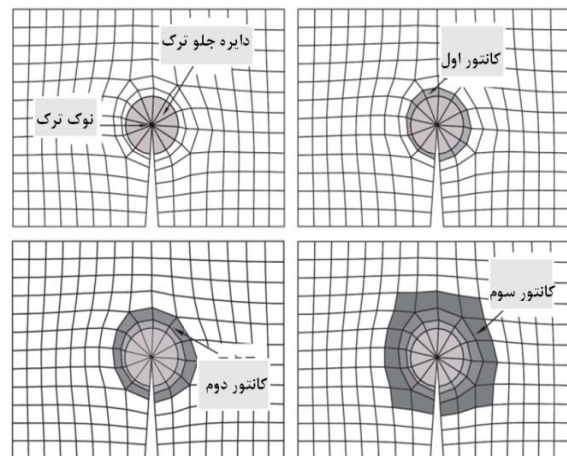
$$[\varphi_\alpha, \alpha = 1, 4] = \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \quad (40)$$

که در آن y محور عمودی دستگاه مختصات منطبق بر راستای نوک ترک، α شماره‌دهی توابع غنی ساز نوک ترک، r ، فاصله‌ی گره‌ها تا مرکز دستگاه مختصات منطبق بر نوک

در نتیجه با استفاده از روابط (۳۱) و (۳۸) و با مشخص بودن ابعاد هندسی مقطع تیر و ابعاد ترک، می‌توان با دقت مناسبی ضریب شدت تنش برای حالت بارگذاری محوری در تیرهای با مقاطع I شکل را محاسبه نمود.

۴- مدل سازی عددی

در این رهیافت با همان فرضیات رهیافت تحلیلی، مدل- سازی تیر با مقطع I شکل تحت بارگذاری محوری در محیط نرم افزار آباکوس [۲۴] انجام می‌شود. به طور کلی برای استخراج ضرایب شدت تنش و شبیه سازی ترک در نرم افزار آباکوس دو روش کانتور انتگرال و اجزای محدود توسعه یافته پذیرفته می‌شود.



شکل ۷: شبکه المانی (کانتور) در اطراف نوک ترک

۴-۱- مدل سازی ترک و استخراج ضریب شدت تنش با روش کانتور انتگرال

برای مدل سازی ترک و استخراج ضرایب شدت تنش با استفاده از روش کانتور انتگرال، می‌بایست در ابتدا یک شبکه‌ی المانی پیرامون نوک ترک ایجاد گردد، بدین منظور، یک دایره به مرکز نوک ترک و به شعاع مشخص ترسیم می‌شود. مقدار این شعاع برابر با یک ضلع المان چهار وجهی در حالت تغییر شکل نیافته فرض می‌گردد. نرم افزار آباکوس بر اساس دایره‌ی ترسیم شده، نواحی معینی را پیرامون این دایره معرفی می‌کند که به هر یک از آنها اصطلاحاً یک کانتور گفته می‌شود. در این روش، ضرایب شدت تنش، بر پایه‌ی روابط جی - انتگرال در هریک از کانتورها تعیین می‌شود. به عنوان نمونه مطابق شکل (۷)، کانتور سوم، ناحیه‌ای است که هر المان در آن، از نوک ترک به اندازه‌ی سه المان فاصله دارد. پس از سومین کانتور پاسخ‌های نرم افزار آباکوس برای ضریب شدت تنش به یک

۰,۱۵، ۰,۲۵ و ۰,۳۵ متر مطابق شکل (۶-ب) فرض می‌شود. با توجه به مشخصات هندسی و مادی ذکر شده، جدول ۱ تأثیر عمق ترک روی ضریب شدت تنش را برای تیری با سطح مقطع I شکل ارائه می‌نماید.

این جداول بیان می‌کنند که با افزایش عمق ترک، ضریب شدت تنش افزایش می‌یابد. مقایسه‌ی میزان خطاهای مدل‌سازی تحلیلی و عددی نشان می‌دهد مقادیر به دست آمده از رهیافت تحلیلی حداکثر حدود ۱۰ درصد از رهیافت عددی کمتر است. این تفاوت هر چند اندک بین مقادیر دو رهیافت می‌تواند ناشی از ساده‌سازی روابط در رهیافت تحلیلی و یا به عبارت دیگر مدل‌سازی کامل‌تر نرم‌افزار آباکوس باشد.

مقایسه بین دو جدول ۱ و ۲ نشان می‌دهد:

الف) تفاوت حداقل ۴,۲ برابری ضریب شدت تنش در دو جدول ۱ و ۲ به علت آن است که ترک در حالت اول در ضخامت بیشتر (عرض تیر) اثر می‌کند. با توجه به قرارگیری پارامتر b در مخرج روابط (۳۱) و (۳۸) و نسبت عکس آن با ضریب شدت تنش، اثر ضخامت می‌تواند به صورت صریح در نتایج مشاهده شود.

ب) چنانچه عمق ترک در بال حدود ۲ برابر افزایش یابد (از ۰,۱۵ به ۰,۳۵ متر) ضریب شدت تنش تقریباً ۱,۳ برابر افزایش پیدا می‌کند. در صورتی که عمق ترک در جان تیر از ۰,۱۵ به ۰,۳۵ متر افزایش یابد (حدود ۲ برابر)، ضریب شدت تنش ۹ برابر افزایش می‌یابد. این مسئله به طور واضح بیان می‌کند که ضریب شدت تنش به صورت غیر خطی با عمق ترک تغییر می‌نماید و در عمق بیشتر، نرخ افزایش بیشتری خواهد داشت.

ترک و θ زاویه گره‌ها نسبت به محور افقی دستگاه مختصات محلی می‌باشد. با استفاده از توابع معرفی شده در روابط (۳۹) و (۴۰)، جابجایی نقاط مختلف سازه به واسطه‌ی حضور ترک به صورت زیر اصلاح می‌شود.

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^4 N_i \left[\mathbf{u}_i + H\mathbf{a}_i + \sum_{\alpha=1}^4 \varphi_{\alpha} \mathbf{b}_{\alpha i} \right] \quad (41)$$

که در آن \mathbf{d} جابجایی افقی و عمودی نقاط درون المان، \mathbf{u} بردار جابجایی گره‌ای در دو راستای افقی و عمودی، N تابع شکل، \mathbf{a}_i و $\mathbf{b}_{\alpha i}$ به ترتیب درجات آزادی گره‌های غنی‌سازی هویساید و نوک ترک می‌باشند.

از جمله مزیت‌های اصلی روش اجزای محدود توسعه یافته نسبت به روش قبل، سادگی و دقت بیشتر آن در مدل‌سازی رشد ترک می‌باشد. برای تعیین ضریب شدت تنش با استفاده از روش حاضر رشد ترک متوقف شده است.

۵- بحث و نتایج

مطابق با شکل (۶)، مشخصات هندسی یک تیر I شکل با مدول یانگ $E = 200 \text{ GPa}$ و نسبت پواسون $\nu = 0.3$ با فرض $L = 4 \text{ m}$ و $b = 0.5 \text{ m}$ ، $d_1 = d_2 = d_3 = 0.05 \text{ m}$ برای انجام یک مطالعه موردی در نظر گرفته می‌شود. بار محوری به مقدار $N = 10 \text{ kN/m}^2$ به صورت کششی بر مقطع تیر اعمال می‌شود. محل ترک در راستای طولی، در میانه‌ی تیر فرض می‌گردد. همچنین شش وضعیت برای عمق ترک بر روی سطح مقطع در نظر گرفته می‌شود. سه موقعیت آن مطابق با شکل (۶-الف) بر روی بال مقطع تیر به صورت a_1 با ابعاد ۰,۱۵، ۰,۲۵ و ۰,۳۵ متر و سه موقعیت دیگر بر روی جان مقطع تیر به صورت a_2 با ابعاد

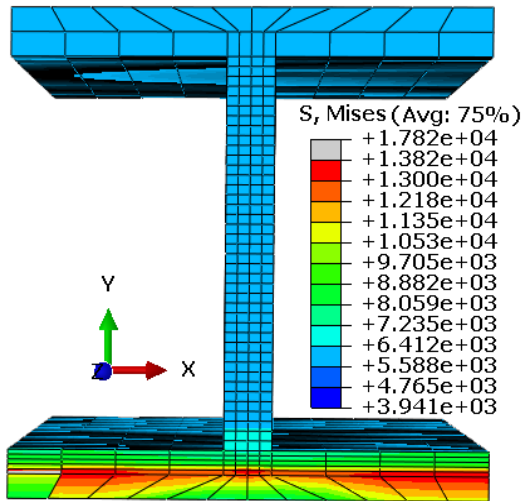
جدول ۱: اثر عمق ترک روی مقادیر ضریب شدت تنش (ترک در بال مقطع تیر)

a_1 عمق ترک (m)	K_{IIN_1} رهیافت عددی ($\text{pa}\sqrt{\text{m}}$)	K_{IIN_1} رهیافت عددی کانطور انتگرال ($\text{pa}\sqrt{\text{m}}$)	میزان خطا (درصد)	K_{IIN_1} رهیافت عددی ($\text{pa}\sqrt{\text{m}}$)
0.015	2311.07	2431.67	4.95	0.0021
0.025	2577.80	2735.87	5.77	0.0034
0.035	2847.04	3045.54	6.52	0.0056

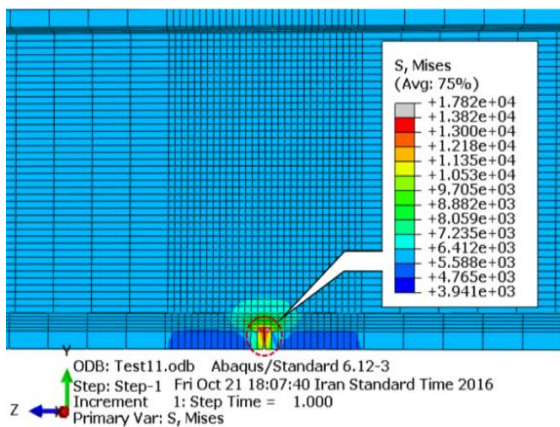
جدول ۲: اثر عمق ترک روی مقادیر ضریب شدت تنش (ترک در جان مقطع تیر)

a_2 عمق ترک (m)	K_{IIN_2} رهیافت عددی ($\text{pa}\sqrt{\text{m}}$)	K_{IIN_2} رهیافت عددی کانطور انتگرال ($\text{pa}\sqrt{\text{m}}$)	میزان خطا (درصد)	K_{IIN_2} رهیافت عددی ($\text{pa}\sqrt{\text{m}}$)
0.15	9641.32	10186.88	5.35	0.045
0.25	28163.67	30149.34	9.58	0.065
0.35	88076.49	94303.79	6.60	0.094

تغییر نیروی محوری تغییر می‌کند که این نکته در روابط (۳۱) و (۳۸) نیز به طور صریح مشهود است. همچنین بررسی شکل‌ها نشان می‌دهد که مدل‌سازی تحلیلی در حالت ترک در جان مقطع تیر، جواب‌های نزدیک‌تری به جواب عددی خواهد داشت و دو روش حل در آباکوس یعنی روش کانتور انتگرال و روش المان محدود توسعه یافته تطابق خوبی با یکدیگر دارند.



ODB: Test11.odb Abaqus/Standard 6.12-3
Step: Step-1 Fri Oct 21 18:07:40 Iran
Increment 1: Step Time = 1.000
Primary Var: S, Mises



ODB: Test11.odb Abaqus/Standard 6.12-3
Step: Step-1 Fri Oct 21 18:07:40 Iran Standard Time 2016
Increment 1: Step Time = 1.000
Primary Var: S, Mises

شکل ۹: مدل اجزای محدود (ترک در بال تحتانی تیر I شکل) مطابق با رهیافت تحلیلی، به علت عدم هم‌راستایی نیروی محوری، علاوه بر این نیرو، یک گشتاور کوپل نیز بر تیر وارد می‌شود. مطابق با جدول ۳ چنانچه برای تعیین ضریب شدت تنش از اثر این کوپل چشم‌پوشی شود؛ خطای نتایج دو رهیافت تحلیلی و عددی، هنگامی که ترک در بال مقطع تیر قرار دارد، قابل ملاحظه نخواهد بود.

اما چنانچه ترک در قسمت جان مقطع تیر واقع شود؛ مطابق با جدول ۴، اختلاف جواب‌ها به حدود ۲۰۰۰ درصد خواهد

ج) با مقایسه‌ی میزان خطاهای مدل‌سازی تحلیلی و عددی، بیشترین میزان خطا ۹٫۵۸ درصد مشاهده می‌شود؛ که نشان‌دهنده‌ی دقت مناسب و قابل قبول روابط تحلیلی پیشنهادی (روابط (۳۱) و (۳۸)) برای محاسبه‌ی ضریب شدت تنش خواهد بود.

د) در اینجا، ضریب شدت تنش در مود اول (بازشدگی) ترک مورد بررسی قرار می‌گیرد. دو بارگذاری مؤثر روی مقدار ضریب شدت تنش در مود اول عبارتند از: بارگذاری محوری و بار خمشی عمود بر صفحه. چنانچه نیروی عرضی بر تیر اعمال شود، این نیرو به دو بارگذاری خمشی و برشی در هر قسمت از سطح مقطع تیر تقسیم می‌شود. این نیروی برشی، ضریب شدت تنش در مود دوم (لغزشی) را ایجاد می‌نماید. با توجه به اینکه در این مقاله هیچ نیروی عرضی بر تیر وارد نمی‌گردد، بنابراین اثر برشی و انرژي آزاد شده در مود دوم ترک بسیار ناچیز و قابل چشم‌پوشی می‌باشد. در تأیید کمی مطالب مذکور می‌توان ضرایب شدت تنش در مود اول (بازشدگی) و مود دوم (لغزشی) را مطابق جداول ۱ و ۲ با یکدیگر مقایسه نمود.

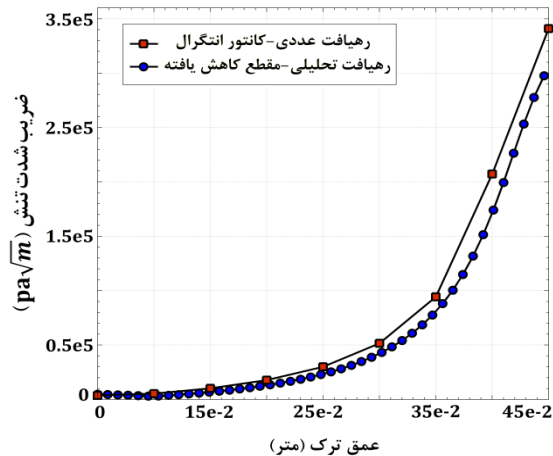
از آنجایی که ضریب شدت تنش مشخصه‌ی عددی تمرکز تنش است و رابطه‌ی مستقیم میان مقدار تنش و ضریب شدت تنش وجود دارد، در نتیجه افزایش ضریب شدت تنش با تغییرات عمق ترک را می‌توان با نتایج حاصل از کانتورهای شبیه‌سازی شده در نرم‌افزار آباکوس نیز بررسی کرد.

در حالتی که ترک مطابق شکل (۹) در بال مقطع تیر قرار دارد، نوک ترک شاهد تنش‌هایی در حدود ۱۳٫۸۲ کیلو نیوتن بر متر مربع است.

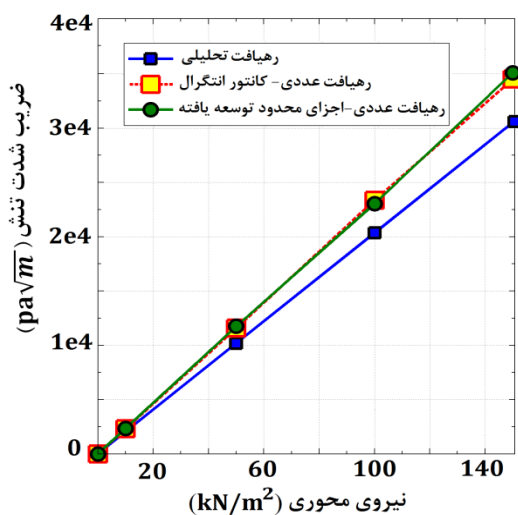
در حالی که اگر ترک در جان مقطع تیر مطابق شکل (۱۰) قرار گیرد، تنش‌ها تا حدود ۷۸٫۹۳ کیلو نیوتن بر متر مربع افزایش پیدا می‌کند.

شکل‌های (۱۱) و (۱۲)، تأثیر عمق ترک را بر ضریب شدت تنش نشان می‌دهد. افزایش ضریب شدت تنش ناشی از افزایش عمق ترک در حالت ترک در بال و در حالت ترک در جان به ترتیب به صورت یک افزایش صعودی تقریباً خطی و دقیقاً غیرخطی می‌باشد.

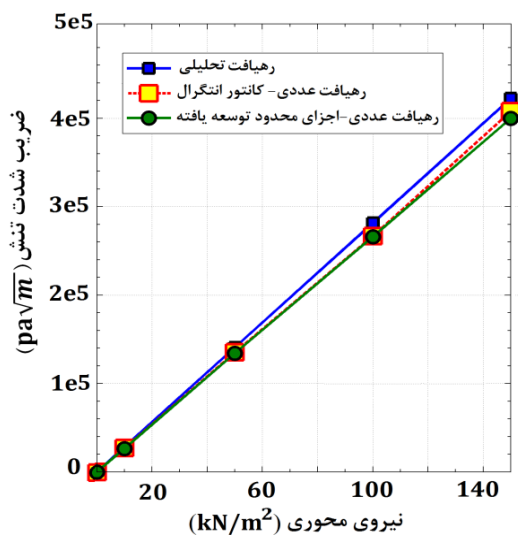
یک بررسی دقیق روی تأثیر نیروی محوری بر ضریب شدت تنش در دو حالت ترک در بال مقطع تیر و در مکان ۰٫۲۵ متر در شکل (۱۳) و ترک در جان مقطع I شکل و در مکان ۰٫۲۵ متر در شکل (۱۴) ارائه می‌شود. هر دو نمودار نشان می‌دهند که ضریب شدت تنش به صورت خطی با



شکل ۱۲: تأثیر عمق ترک روی مقادیر ضریب شدت تنش (ترک در جان تیر I شکل)

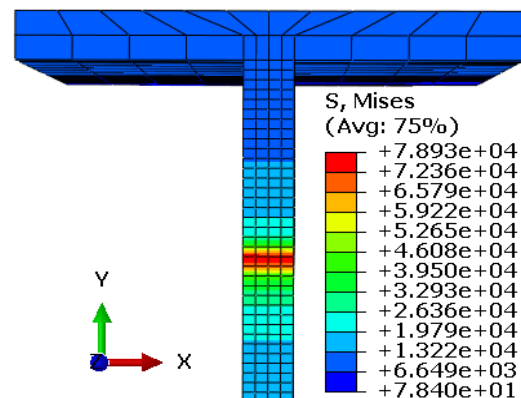


شکل ۱۳: تأثیر نیروی محوری بر روی ضریب شدت تنش (ترک در بال تحتانی تیر I شکل)

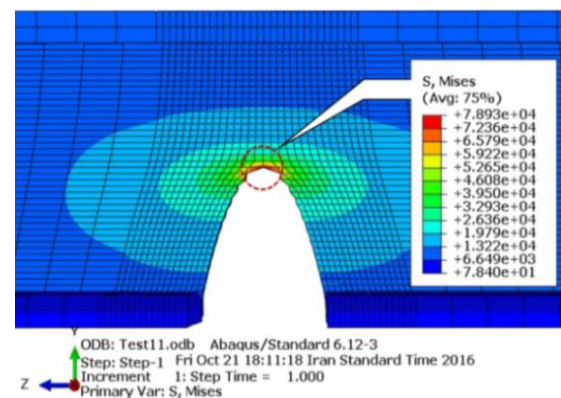


شکل ۱۴: تأثیر نیروی محوری بر روی ضریب شدت تنش (ترک در جان تیر I شکل)

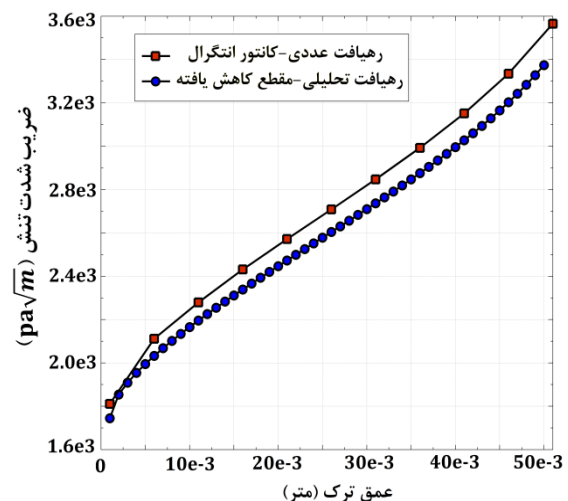
رسید. در نتیجه می توان تأکید کرد که در رهیافت تحلیلی حاضر، در نظر گرفتن گشتاور کوپل ضروری و از اهمیت بالایی برخوردار است.



ODB: Test11.odb Abaqus/Standard 6.12-3
Step: Step-1
Increment 1: Step Time = 1.000
Primary Var: S, Mises



شکل ۱۰: مدل اجزای محدود (ترک در جان تیر I شکل)



شکل ۱۱: تأثیر عمق ترک روی مقادیر ضریب شدت تنش (ترک در بال تحتانی تیر I شکل)

جدول ۳: تأثیر گشتاور خمشی ناشی از عدم همراستایی روی ضریب شدت تنش (ترک در بال تیر)

میزان خطا (درصد)	رهیافت تحلیلی $K_{I_{N1}}$ بدون تأثیر گشتاور خمشی	رهیافت تحلیلی $K_{I_{N1}}$ با تأثیر گشتاور خمشی	عمق ترک a_1 (m)
4.95	1978.86	2311.07	0.015
5.77	2143.78	2577.80	0.025
6.51	2308.54	2847.04	0.035

جدول ۴: تأثیر گشتاور خمشی ناشی از عدم همراستایی روی ضریب شدت تنش (ترک در جان تیر)

میزان خطا (درصد)	رهیافت تحلیلی $K_{I_{N2}}$ بدون تأثیر گشتاور خمشی	رهیافت تحلیلی $K_{I_{N2}}$ با تأثیر گشتاور خمشی	عمق ترک a_2 (m)
197.5	3240.37	9641.32	0.15
652.7	3741.65	28163.67	0.25
1938.5	4320.49	88076.49	0.35

با افزایش عمق ترک، تأثیر گشتاور خمشی ناشی از عدم همراستایی، به صورت تصاعدی افزایش پیدا می‌کند؛ به طوری که مطابق جدول ۳ در عمق ترک ۰,۰۱۵ متر، خطای ۴,۹۵ درصدی بین جواب‌های ضریب شدت تنش با در نظر گرفتن تأثیر گشتاور خمشی و بدون در نظر گرفتن آن، مشاهده می‌شود؛ در حالی که در عمق ترک ۰,۳۵ متر مطابق جدول ۳ میزان خطاها تا ۱۹۳۸,۵ درصد افزایش پیدا می‌کند. بنابراین نتایج تحلیل بدون در نظر گرفتن تأثیر گشتاور خمشی غیر قابل استناد می‌باشد.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله به کمک یک رهیافت تحلیلی، معادله‌ای صریح برای تعیین ضریب شدت تنش در تیرهای با سطح مقطع I شکل تحت بار محوری معرفی شد. در این معادله، اثر گشتاور خمشی ناشی از عدم همراستایی مراکز سطوح مقاطع ترک‌دار و کامل، بر ضریب شدت تنش در نظر گرفته شد. رهیافت ارائه شده برای دو حالت قرارگیری ترک در بال و جان مقطع تیر بررسی گردید. نتایج بررسی‌ها نشان دادند که چنانچه از اثر گشتاور خمشی چشم‌پوشی شود مقادیر ضریب شدت تنش حاصل از رهیافت تحلیلی با مقادیر رهیافت عددی تعیین شده در نرم‌افزار آباکوس اختلاف بسیار زیادی خواهند داشت. در نظر گرفتن اثر این گشتاور، موجب تطابق بهتر جواب‌های دو رهیافت تحلیلی و عددی با یکدیگر می‌شود. همچنین نتایج رهیافت تحلیلی نشان دادند که با افزایش عمق ترک از قسمت بال به سمت جان مقطع، ضریب شدت تنش به طور تصاعدی و غیرخطی افزایش می‌یابد.

۷- مراجع

- [1] M. Mohamadi, Extended finite element method for fracture analysis of structures, first ed. Blackwell Publishing, United States of America, 2008.
- [2] G.R. Irwin, J.A. Kies, "Critical energy rate analysis of fracture strength", Journal of Welding, Vol. 33, 1954, pp. 193–198.
- [3] G.R. Irwin, "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate". Journal of Applied Mechanics, Vol. 24, 1957, pp. 361–364.
- [4] D.R.J. Owen, E. Hinton, Finite element plasticity, theory and practice, Pineridge Press, United Kingdom, 1980.
- [5] D.R.J. Owen, A.J. Fawkes, Eng fracture mechanics: numerical methods and applications, Pineridge Press, United Kingdom, 1983.
- [6] R. Kienzler, G. Herrmann, "An elementary theory of defective beams", Journal of Acta Mechanica, Vol. 62, Issues 1–4, 1986, pp. 37–46.
- [7] N. Moes, J. Dolbow, T. Belytschko, "A finite element method for crack growth without remeshing", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 46, Issue 1, 1999, pp. 131–150.
- [8] T. Belytschko, T. Black, "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 45, Issue 5, 1999, pp. 601–620.
- [9] A.R. Khoei, Extended Finite Element Method, Theory and Applications, first ed. John Wiley & Sons, United States of America, 2015.
- [10] M. Surendrana, S. Natarajanc, S.P.A. Bordasd, G.S. Palania, "Linear smoothed extended finite element method", Numerical Methods in Engineering, Vol. 01, 2017, pp. 1–23.
- [11] M. Mastan Abadi, A. Alijani, A. Darvizeh, F. Mottaghian, "Modeling of the beam discontinuity with two analyses in strong and weak forms using a torsional spring model", Journal of Solid Mechanics in Engineering, Vol. 09, No. 1, 2015, pp. 1–14.
- [12] J. Razzaghi, M.Kh. Abadi, A. Alijani, "A new approach for modeling of crack in reinforced concrete beams using finite element method", Concrete Research a Biannual Journal, in press, 2018.
- [13] A. Alijani, M. Mastan Abadi, A. Darvizeh, M.Kh. Abadi, "Theoretical approaches for bending analysis of founded Euler–Bernoulli cracked beams", Archive of Applied Mechanics, Vol. 88, No. 6, 2018, pp. 875–895.
- [14] W. Triamlumlerd, A. Lenwari, "Analysis of Fatigue Crack Propagation in Steel I-Beams with Welded Transverse Stiffeners Subjected to In-Plane Loadings", Engineering Journal, Vol. 21, No. 4, 2017, pp. 307–324.
- [15] G.C. Sih, Handbook of stress intensity factors for researchers and engineerings, Lehigh University, Bethlehem: Institute for Fracture and Solid Mechanics, United States of America, 1973.
- [16] H. Tada, P.C. Paris, G.R. Irwin, The stress analysis of crack handbook, Paris Production, University of Michigan, United States of America, 1985.
- [17] R. Kienzler, G. Herrmann, "On material forces in elementary beam theory", Journal of Applied Mechanics, Vol. 53, No. 3, 1986, pp. 561–564.
- [18] G.L. Qian, S.N. Gu, J.S. Jiang, "The Dynamic Behavior and Crack Detection of a Beam with a Crack", Journal of Sound and Vibration, Vol. 138, Issue 2, 1990, pp. 233–243.
- [19] P. Ricci, E. Viola, "Stress intensity factors for cracked T-sections and dynamic behaviour of T-beams", Journal of Journal of Engineering Fracture Mechanics, Vol. 73, Issue 1, 2006, pp. 91–111.
- [20] M. Damghani Nouri, H. Rahmani, M.j. Rezvani, "Analytical solution and simulation of dynamic stress intensity factor and stress field determination on the cracked plate under blast loading", Journal of Modeling in Engineering, Vol. 10, No. 29, 2012, pp. 71–80.
- [21] M. Damghani Nouri, H. Rahmani, "The Effect of Rise Time in Dynamic Stress Intensity Factor for Impact Loading", Journal of Modeling in Engineering, Vol. 13, No. 40, 2015, pp. 79–87.
- [22] Y. Wu, H. Chen, X. Wang, "Numerical Flexibility Determination Method of Stress Intensity Factor for Concrete", IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, Vol. 250, 2017, pp. 1–6.
- [23] R. Fosdick, L. Truskinovsky, "About Clapeyron's theorem in linear elasticity", Journal of Elasticity, Vol. 72, Issues 1–3, 2003, pp. 145–172.
- [24] Abaqus, version 6.12–3, Simulia Abaqus, Dassault Systemes Simulia Corp, Build ID: 2012-10-04-20.52.12 120045, United States of America, 2012.